

## 원천함수 기법을 사용한 시간의존 완경사방정식 모형에서의 조파 Generation of Waves in Time-Dependent Mild-Slope Equation Model Using a Source Function Method

김건우<sup>1</sup> · 이창훈<sup>2</sup> · 서경덕<sup>1</sup>

Gunwoo Kim<sup>1</sup>, Changhoon Lee<sup>2</sup>, and Kyung Doug Suh<sup>1</sup>

### 1. 서 론

지금까지 해안공학자들은 항만, 해변 등 해안지역을 보존하고 이용하기 위하여 파랑의 변형을 예측하는 모형들을 개발해왔다. 여러 모형 가운데에서 굴절, 천수 및 회절현상을 복합적으로 해석할 수 있는 모형으로서 Berkhoff(1972)가 개발한 타원형 완경사방정식이 있다. 그러나 타원형 완경사방정식은 수치 계산에 많은 시간이 걸리며 자료저장량 또한 많이 필요하다. 이를 극복하기 위해서 포물선형 식과 쌍곡선형 식이 개발되었다. Berkhoff의 식과 동등한 정확도를 갖는 쌍곡선형의 시간의존 완경사방정식에는 Nishimura 등(1983)의 식, Copeland(1985)의 식이 있다. 한편, 시간의존 완경사방정식 가운데 Smith와 Sprinks(1975)의 식, Radder와 Dingemans(1985)의 식, Kubo 등(1992)의 식은 규칙파 뿐만 아니라 주파수폭이 좁은 불규칙파도  $O(\Delta k)$ 의 정확도를 유지하면서 해석 가능한 모형이라는 사실이 밝혀졌다(Lee와 Pyun, 1995).

시간의존 방정식 모형에서 조파하는 방법은 크게 외부조파와 내부조파로 나눌 수 있다. 외부조파는 수면변위나 유속 또는 체적속을 매 시간간격마다 임의로 지정하는 방법이며, 내부조파는 매 시간간격마다 계산된 수면변위에 임의의 값을 더해 주는 방법이다. 외부조파는 계산영역에서 조파선으로 전파해오는 파를 통과시키지 못하는 반면에 내부조파는 조파선으로 향하는 파의 통과가 가능하므로 계산영역 내에

에너지를 축적시키지 않으면서 조파가 가능하다. 이 내부조파기법은 Larsen과 Dancy(1983)가 Peregrine(1967)의 Boussinesq 식에 최초로 사용하였으며, Madsen과 Larsen(1987)이 Copeland 식에 적용하였다. 그리고, Lee와 Suh(1998)와 Lee 등(2001)은 내부조파의 근본 원리로서 질량전달의 관점을 사용할 경우 문제점이 있음을 발견하고, 에너지전달 관점에서 내부조파가 더 우수함을 밝히면서 내부조파기법을 발전시켰다.

그러나, 이러한 내부조파기법은 엇갈린 격자(staggered grid)의 경우에만 적합하며, 엇갈리게 격자를 구성할 수 없는 모형에는 적용할 수 없는 한계가 있다. 이런 이유로 시간의존 완경사방정식 중에서도 Copeland의 식과 Radder와 Dingemans의 식에는 내부조파기법이 도입되었지만, 엇갈리지 않은 격자를 사용하는 Kubo 등(1992)의 식에는 내부조파기법을 사용할 수 없었다. 최근에 Wei 등(1999)은 엇갈리지 않은 격자의 Boussinesq 모형에 Green 함수를 사용한 원천함수 기법을 도입하여 조파문제를 해결하였다. 이 방법은 원천함수를 포함한 지배방정식의 해를 구하여 원천함수가 공간적으로 분포되도록 하는 조파기법이다.

본 연구에서는 Wei 등의 조파기법을 시간의존 완경사방정식에 도입하여 Kubo 등의 모형에 적용하였다. 제 2절에서는 Green 함수 방법을 사용하여 원천함수를 구하는 이론에 관하여 기술하였으며, 제 3절에서는 일차원 규칙파와 일차원 불규칙파의 경우에 조

<sup>1</sup> 서울대학교 지구환경시스템공학부 (School of Civil, Urban, and Geosystem Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

<sup>2</sup> 세종대학교 토목환경공학과 (Department of Civil & Environmental Engineering, Sejong University, 98 Kunja-Dong, Kwanjingu, Seoul 151-747, Korea)

파기법을 검증하였다. 제 4절에서는 본 연구의 내용을 요약하고 향후 연구방향에 관하여 언급하였다.

## 2. 조파 이론

Kubo 등(1992)의 시간의존 환경사방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (\overline{CC_g} \nabla \hat{\eta}) + \bar{k}^2 \overline{CC_g} \hat{\eta} + i\nabla \cdot \left( \frac{\partial(CC_g)}{\partial\omega} \nabla \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial t} \right) + i \frac{\partial(k^2 CC_g)}{\partial\omega} \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

위 식에서  $h$ 는 수심,  $g$ 는 중력가속도,  $i = \sqrt{-1}$ 이며,  $\nabla$ 은 수평미분연산자이다.  $\hat{\eta}$ 는 실제수면변위  $\eta(x, y, t)$ 와  $\eta = \hat{\eta} \exp(-i\bar{\omega}t)$ 의 관계를 갖는 수면변위이며, 계수 위에 bar가 붙은 것은 각주파수가 대표파의 각주파수인  $\bar{\omega}$ 일 때 정의되는 계수들이다. 즉,  $\bar{k}$ 는 대표파의 파수이고,  $\overline{C} (= \bar{\omega} / \bar{k})$ 와  $\overline{C_g} (= \overline{C}(1 + 2\bar{k}h / \sinh 2\bar{k}h) / 2)$ 는 대표파의 파속과 군속도이다. 셋째 항과 넷째 항의 계수들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(CC_g)}{\partial\omega} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}^2} \left[ 2(\bar{n}-1) + \frac{2\bar{n}-1}{2\bar{n}} \{ 1 - (2\bar{n}-1) \cosh 2\bar{k}h \} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial(k^2 CC_g)}{\partial\omega} = \bar{\omega} \left[ 2\bar{n} + \frac{2\bar{n}-1}{2\bar{n}} \{ 1 - (2\bar{n}-1) \cosh 2\bar{k}h \} \right] \quad (3)$$

여기서  $\bar{n} = \overline{C_g} / \overline{C}$ 이다.

원천함수  $f(x, y, t)$ 를 식 (1)의 우변에 더해 주고, 조파하고자 하는 파에 대응하는 원천함수를 구한다.

$$\nabla \cdot (\overline{CC_g} \nabla \hat{\eta}) + \bar{k}^2 \overline{CC_g} \hat{\eta} + i\nabla \cdot \left( \frac{\partial(CC_g)}{\partial\omega} \nabla \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial t} \right) + i \frac{\partial(k^2 CC_g)}{\partial\omega} \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial t} = f(x, y, t) \quad (4)$$

본 연구에서는 주 파향선을  $x$ 축으로 하고  $y$ 축을 따라 조파하였다. 각각의 성분파마다 파향각  $\theta$ 는 파의 진행방향과  $x$ 축 사이의 각이다.

### 2.1 규칙파의 조파

불규칙파의 대표파에 해당하는 각주파수 ( $\bar{\omega}$ )를 갖는 규칙파를 조파하는 경우  $\partial\hat{\eta}/\partial t = 0$ 이고, 수심이 일정하면  $\overline{CC_g}$ 의 공간적인 변화율과 수심변화의 고차항이 0이므로 식 (1)은 다음과 같이 된다.

$$\nabla^2 \hat{\eta} + \bar{k}^2 \hat{\eta} = \frac{f(x, y, t)}{\overline{CC_g}} \quad (5)$$

이 식의 좌변은 수심이 일정한 영역에서 선형파의 엄밀해인 Helmholtz 식이며, 우변이 Helmholtz 식의 원천함수가 된다.

조파하고자 하는 파랑이 경사지게 입사할 경우, 즉  $y$ 축 방향으로 정현함수를 포함하는 경우에  $y$ 축 방향 정현함수를 분리하면 목적파랑을 식 (6)과 같이 변환할 수 있으며, 같은 확장을 통해서 원천함수를 식 (7)과 같이 변환할 수 있다.

$$\hat{\eta}(x, y, t) = \tilde{\eta}(x, t) \exp[i(\bar{\lambda}y + \varepsilon)] \quad (6)$$

$$f(x, y, t) = \tilde{f}(x, t) \exp[i(\bar{\lambda}y + \varepsilon)] \quad (7)$$

여기서  $\bar{\lambda} = \bar{k} \sin \theta$ 는  $y$ 축 방향의 파수이고,  $\varepsilon$ 는 위상차이다. 규칙파의 경우에 수면변위와 원천함수가 시간에 무관한 함수이므로 식 (6)과 (7)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같은  $x$ 에 관한 2차 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 \tilde{\eta}}{dx^2} + \bar{l}^2 \tilde{\eta} = \frac{\tilde{f}(x)}{\overline{CC_g}} \quad (8)$$

여기서,  $\bar{l} = \sqrt{\bar{k}^2 - \bar{\lambda}^2} = \bar{k} \cos \theta$ 는  $x$ 축 방향의 파수이다. 특히, 파향각  $\theta = 0$ 인 경우, 즉  $x$ 축에 평행하게 입사하는 파를 조파하는 경우에는  $y$ 축 방향으로 정현함수가 없으므로, 식 (8)에서  $\tilde{\eta}(x) = \hat{\eta}(x)$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x)$ ,  $\bar{l} = \bar{k}$ 로 둘 수 있다. 식 (8)의 동차해(homogeneous solution)는 다음과 같다.

$$\tilde{\eta}_h(x) = \exp(\pm i\bar{l}x) \quad (9)$$

$\tilde{\eta}$ 의 특수해(particular solution)를 구하기 위해서 다음을 만족하는 Green 함수  $G(x, x')$ 를 구한다.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \bar{l}^2 G = \delta(x - x') \quad (10)$$

그리고, 위 식에서 Green 함수는 파의 방사조건을 만족하는 다음의 경계조건을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial^a G}{\partial x^a} \rightarrow (+i\bar{l})^a G, \frac{d^a \tilde{\eta}}{dx^a} \rightarrow (+i\bar{l})^a \tilde{\eta} \text{ as } x \rightarrow +\infty \quad (11)$$

$$\frac{\partial^a G}{\partial x^a} \rightarrow (-i\bar{l})^a G, \frac{d^a \tilde{\eta}}{dx^a} \rightarrow (-i\bar{l})^a \tilde{\eta} \text{ as } x \rightarrow -\infty$$

식 (10)을  $x' = 0$ 부터  $x' = 0$ 까지  $x$ 에 대하여 적분하

면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} + \bar{I}^2 \int_{x'-0}^{x'+0} G(x, x') dx = 1 \quad (12)$$

$G(x, x')$  를  $x = x'$  에서 연속인 함수로 구하고자 하므로, 식 (12)는 다음의 식을 만족하는  $G(x, x')$  를 구하는 식이 된다.

$$\frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = 1 \quad (13)$$

Green 함수  $G(x, x')$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G(x, x') = \begin{cases} a \exp[i\bar{I}(x-x')] & \text{if } x > x' \\ a \exp[i\bar{I}(x'-x)] & \text{if } x < x' \end{cases} \quad (14)$$

위의 함수는 방사경계조건과  $x = x'$  에서의 연속조건을 동시에 만족한다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하면 다음과 같이  $a$  를 구할 수 있다.

$$a = -\frac{i}{2\bar{I}} \quad (15)$$

식 (10)에  $\tilde{\eta}(x')$  를 곱한 후  $-\infty$  부터  $+\infty$  까지  $x'$  에 대하여 적분한다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}(x') \left[ \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial x'^2} + \bar{I}^2 G(x, x') \right] dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}(x') \delta(x-x') dx' \quad (16)$$

부분적분하고, 식 (11)의 방사경계조건을 사용하고, delta 함수의 정의를 사용하면 다음과 같이 수면변위를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x, x') \tilde{f}(x')}{CC_s} dx' \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{G(x, x') \tilde{f}(x')}{CC_s} dx' + \int_x^{+\infty} \frac{G(x, x') \tilde{f}(x')}{CC_s} dx' \end{aligned} \quad (17)$$

이론적으로는  $\tilde{f}(x')$  의 형상에 제한이 없지만, 여기서는 다음과 같은 Gauss 함수형을 사용하기로 하였다.

$$\tilde{f}(x') = D \exp[-\beta(x'-x_s)^2] \quad (18)$$

여기에서  $D$  는 원천함수의 크기로서 파의 진폭과 관계가 있으며,  $\beta$  는 원천함수의 폭과 관계가 있고,  $x_s$  는 조파선의 위치를 나타낸다. 식 (18)과 같은 원천함수를 정의하면 조파선에서 충분히 먼 지점에서 원천함수 값이 무시할 수 있을 정도로 작다.

계산영역 중에서 조파선의 오른쪽, 즉  $+x$  방향으로 전파하는 파를 조파하는 경우  $x > x_s$  인 영역에서

는 식 (17)의 우변의 두 번째 항이 첫 번째 항에 비하여 무시할 수 있을 정도로 작다. 따라서 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(x) &\cong \int_{-\infty}^x \frac{G(x, x') \tilde{f}(x')}{CC_s} dx' \\ &\cong \frac{aDI \exp[i\bar{I}(x-x_s)]}{CC_s} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $I$  는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x'^2) \exp(-i\bar{I}x') dx' \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{\bar{I}^2}{4\beta}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

수면변위  $\tilde{\eta}$  는 정의에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\eta}(x) = \frac{aDI \exp[i\bar{I}(x-x_s)]}{CC_s} = \hat{\eta}_0 \exp[i\bar{I}(x-x_s)] \quad (21)$$

여기서,  $\hat{\eta}_0$  는 조파선에서 조파하고자 하는 목적수면변위이며 규칙파의 경우에는 파의 진폭과 같은 값을 가진다. 이로부터 다음과 같은 상수  $D$  를 구할 수 있다.

$$D = \frac{\hat{\eta}_0 CC_s}{aI} \quad (22)$$

계산영역 중에서 조파선의 왼쪽, 즉  $-x$  방향으로 전파하는 파를 조파하는 경우  $x < x_s$  인 영역에서는 식 (17)의 우변의 첫 번째 항이 무시할 수 있을 만큼 작으므로, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(x) &\cong \int_x^{+\infty} \frac{G(x, x') \tilde{f}(x')}{CC_s} dx' \\ &\cong \frac{aDI \exp[i\bar{I}(x_s-x)]}{CC_s} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $I$  는 식 (20)과 같다. 위 식에 식 (22)의  $D$  를 대입하면  $x < x_s$  인 영역에서도 수면변위  $\tilde{\eta}$  의 정의를 만족하는 것을 확인할 수 있다. 즉,

$$\tilde{\eta}(x) = \hat{\eta}_0 \exp[i\bar{I}(x_s-x)] \text{를 만족하므로 다음의 원천함수를 사용하면 } +x \text{ 방향과 } -x \text{ 방향으로 모두 조파할 수 있는 것이다.}$$

$$f(x, y) = D \exp[-\beta(x-x_s)^2] \exp[i(\bar{\lambda}y + \varepsilon)] \quad (24)$$

## 2.2 불규칙파의 조파

각주파수가  $\omega_m (\neq \bar{\omega})$  인 파를 조파할 경우 조파선에서 정의되는 수면변위  $\eta_0$  는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_0 = \hat{\eta}_0 \exp(-i\bar{\omega}t) = A_m \exp(-i\omega_m t) \quad (25)$$

여기서,  $A_m$ 은 조파하고자 하는 파의 진폭이다. 위의 관계에서 다음과 같이  $\hat{\eta}_0$ 를 구할 수 있다.

$$\hat{\eta}_0 = A_m \exp(-i\Delta\omega t) \quad (26)$$

여기서,  $\Delta\omega = \omega_m - \bar{\omega}$ 이다. 식 (26)을  $t$ 에 대해서 미분하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial t} = -i\Delta\omega \hat{\eta}_0 \quad (27)$$

그리고, 정상상태의 수면변위  $\hat{\eta}$ 는  $\hat{\eta} = \hat{\eta}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ 이므로 위의 관계와 같이  $\hat{\eta}$ 에 대한 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial t} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (28)$$

$$= -i\Delta\omega \hat{\eta}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = -i\Delta\omega \hat{\eta}$$

식 (28)을 식 (4)에 대입하면 다음 식이 된다.

$$\nabla \cdot \left[ \left\{ \overline{CC}_s + \frac{\partial(\overline{CC}_s)}{\partial \omega} \Delta\omega \right\} \nabla \hat{\eta} \right] + \quad (29)$$

$$\left[ \overline{k^2 CC}_s + \frac{\partial(k^2 \overline{CC}_s)}{\partial \omega} \Delta\omega \right] \hat{\eta} = f(x, y, t)$$

식 (29)의 좌변의 항들은 각각의 계수들의  $\omega_m$ 에서의 값을  $\bar{\omega}$ 를 기준으로  $O(\Delta\omega)$ 의 정도로 Taylor 급수 전개한 것과 같다. 따라서, 식 (29)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla \cdot \left[ \left( \overline{CC}_s \right)_{\omega=\omega_m} \nabla \hat{\eta} \right] + \left[ \overline{k^2 CC}_s \right]_{\omega=\omega_m} \hat{\eta} \quad (30)$$

$$= f(x, y, t)$$

위 식은 수심이 일정한 경우 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overline{CC}_s \Big|_{\omega=\omega_m} \nabla^2 \hat{\eta} + k^2 \overline{CC}_s \Big|_{\omega=\omega_m} \hat{\eta} = f(x, y, t) \quad (31)$$

주파수가  $\omega_m$ 일 때의 파수를  $k_m$ 이라고 할 때, 식 (31)의 동차해는 다음과 같게 된다.

$$\hat{\eta}_s(x) = \exp(\pm i l_m x) \quad (32)$$

여기서,  $l_m = k_m \cos \theta$ 이다. 식 (10)부터 식 (24)까지의 과정을 따라 원천함수의 계수  $D$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D = \frac{\hat{\eta}_0 \overline{CC}_s}{aI} = \frac{A_m \overline{CC}_s \exp(-i\Delta\omega t)}{aI} \quad (33)$$

여기서,  $I$ 와  $a$ 는 각각 다음과 같다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) \exp(-il_m x) dx \quad (34)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{l_m^2}{4\beta}\right)$$

$$a = -\frac{i}{2I_m} \quad (35)$$

그리고, 다방향 불규칙파를 조파할 경우에는 다음과 같이 조파함수를 정하면 된다.

$$f(x, y, t) = \sum_m \sum_n D_{m,n} \exp[-\beta(x-x_s)^2] \exp[i(\lambda_{m,n}y + \varepsilon_{m,n})] \quad (36)$$

아래 첨자  $m$ 과  $n$ 은 각각 주파수 성분과 방향 성분을 의미한다. 그리고 위상차  $\varepsilon_{m,n}$ 은 0부터  $2\pi$  사이에 무작위로 분포하도록 한다.

### 3. 수치 실험

#### 3.1 원천함수의 결정

원천함수의 계수  $\beta$ 에 제한이 있지는 않지만, 다음과 같은 방법으로 범위를 한정한다. 원천함수의 폭  $W$ (Fig. 1 참조)와 계수  $\delta$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$W = |x_2 - x_1| = \delta \frac{L}{2} \quad (37)$$

여기서,  $x_1$ 과  $x_2$ 가 다음 식의 근이 되도록 한다.

$$\exp[-\beta(x-x_s)^2] = \exp(-5) = 0.0067 \quad (38)$$

즉,  $\exp(-5)$ 의 값이 무시할 수 있을 정도로 작은 값이므로, 원천함수를 다음과 같은 범위내에만 적용하도록  $\beta$ 와  $\delta$ 를 정하려는 것이다.

$$\beta(x-x_s)^2 \leq 5 \quad (39)$$

식 (37)과 식 (39)로부터 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\beta = \frac{80}{\delta^2 L^2} \quad (40)$$

$\delta$ 는  $\beta$ 와 마찬가지로 정해지지 않은 값이다. 그러나,  $\delta$ 가 너무 작은 값일 경우 원천함수의 폭이 작아져서 수치적인 문제를 유발할 수 있으며, 너무 큰 값이면 조파구간이 넓어져서 계산영역이 불필요하게 커지게 된다. Wei 등(1999)은  $\delta$ 가 0.3-0.5의 범위를 만족하고, 따라서 조파함수의 폭이 파장의 0.15-0.25 배가 되도록 제안하였다. 그리고, 불규칙파의 경우에는 대표파에 상응하는  $\beta$ 를 고정하여 사용해도 무관하다고 하였다.

#### 3.2 모형식 차분

계산영역의 상·하류 경계에 파의 반사를 막기 위한 스폰지층을 두었다. 스폰지 층은 지배방정식에 에너지 감쇠항을 첨가함으로써 가능한데, 본 연구에서는 Lee(1994)가 유도한 스폰지층을 사용하였다. 그리고, 지배방정식은 Lee와 Pyun(1995)에서 사용된

Crank-Nicolson 방법을 사용하여 차분하였다. 자세한 내용은 Lee와 Pyun(1995)에 기술되어 있다.

내부조파기법을 사용할 때는 일반적으로 조파함수에  $\tanh(t/pT)$ 를 곱하여 서서히 파를 조파하도록 하여 수치적으로 연속적인 해를 얻도록 하였다. 여기서  $p$ 는 서서히 조파하는 정도로서 3이상일 때 원활한 조파가 가능하였다. 계산영역의 경계에는 완전 반사조건을 사용하였다. 그러나, 스폰지 층의 영향으로 경계부근의 에너지가 거의 0이 되므로 반사되는 에너지는 무시할 수 있을 만큼 작았다.

### 3.3 1차원 규칙파

Fig. 1과 같은 영역에 대해 일방향파를 조파하여 원천함수를 사용한 조파기법 및 스폰지 층의 거동을 확인하였다. 계산영역의  $x$ 방향 길이는 40 m, 수심은 0.5 m 이고 원천함수의 중심은  $x_c = 20$  m 에 두어 양방향으로 조파하였다.

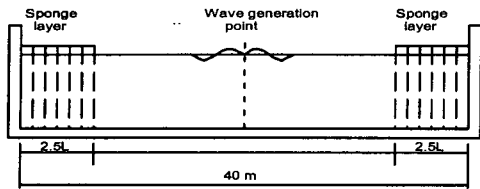


Fig. 1. Computational domain used to test the source function method for unidirectional wave.

주기는 각각  $T=1.0, 2.0, 3.0$  s 를 사용하였으며, 격자간격은 각각  $\Delta x=0.01$  m,  $\Delta t=0.01$  s 로 두었다. Fig. 2는 경과시간이  $30T$  일 때 수면변위를 주기별로 도시한 것이다.

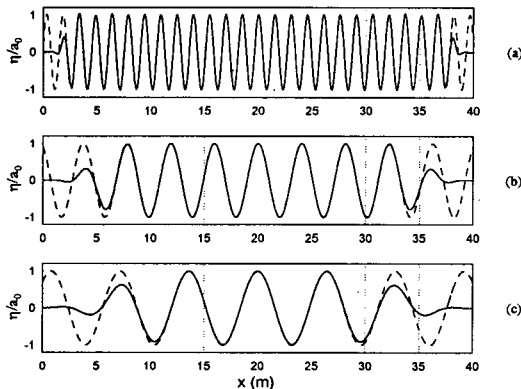


Fig. 2. Snapshots of surface elevation at  $t=30T$ : (a)  $T=1.0$  s; (b)  $T=2.0$  s; (c)  $T=3.0$  s; solid line = model solution, dashed line = exact solution.

모든 경우에 조파하고자 했던 파의 파고와 파장이 정확하게 재현되고, 스폰지층에서 효과적으로 에너지가 감소하는 것을 알 수 있다. 즉, 본 조파기법은 천해역과 심해역에 관계없이 적용될 수 있다.

이번에는 우측의 스폰지층을 제거하여 완전반사가 되도록 한 후 조파영역에서 반사파가 제대로 통과시키는지를 살펴보았다. 주기는 2.0 s 로 하였으며, 우측경계에서 입사파와 반사파의 위상이 같아지도록 조파선의 위치를 왼쪽으로 0.29 m 이동하였다. 그 결과 조파선과 우측경계 간의 거리가 파장의 4 배가 되어 중복파가 생성되도록 하였다.  $30T$ 의 시간이 지난 후부터  $(1/4)T$ 마다의 수면변위를 Fig. 3에 도시하였다. 우측경계에서 완전반사가 일어나고, 반사된 파가 조파된 파와 합쳐져서 중복파를 형성하고, 조파영역을 통과하여 스폰지층으로 흡수되는 것을 볼 수 있다. 이로써, 원천함수를 사용한 조파방법을 사용하면 반사파로 인한 수치적 문제를 해결할 수 있음을 확인할 수 있었다.

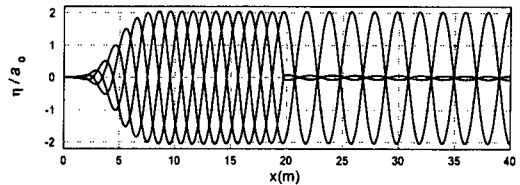


Fig. 3. Superposition of four snapshots of surface elevation at  $30T, 30T+T/4, 30T+T/2, 30T+3T/4$

### 3.4 1차원 불규칙파

수치실험의 세 번째 보기로서 일방향 불규칙파를 조파하는 경우를 살펴보았다. 입사파의 주파수 스펙트럼으로는 천해역에서도 적용될 수 있는 다음과 같은 TMA 스펙트럼을 사용하였다.

$$S(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp[-1.25(f/f_p)^4] \times \gamma^{\exp[-(f/f_p)^2/2\sigma^2]} \phi_k(f, h) \quad (41)$$

여기서  $\alpha$ 는 Phillips 스펙트럼 상수,  $f_p$ 는 첨두 주파수,  $\gamma$ 는 첨두신장인자,  $\sigma$ 는 스펙트럼의 폭을 나타내는 변수이고,  $\phi_k(f, h)$ 는 천해역에서의 수심의 영향을 나타내는 Kitaigorodskii 형태함수이다.  $\sigma$ 는

$$\sigma = \begin{cases} 0.07, & f \leq f_p \\ 0.09, & f > f_p \end{cases} \quad (42)$$

의 값을 사용하였으며,  $\phi_k(f, h)$ 는 다음과 같은 근사식으로 표현할 수 있다.

$$\phi_k(f, h) = \begin{cases} 0.5\omega_b^2, & \omega_b < 1 \\ 1 - 0.5(2 - \omega_b)^2, & 1 \leq \omega_b \leq 2 \\ 1, & \omega_b > 2 \end{cases} \quad (43)$$

위 식에서  $\omega_b = 2\pi f\sqrt{h/g}$  이다. 본 연구에서는  $\alpha = 7.57 \times 10^{-4}$ ,  $f_p = 0.767$  Hz, 주파수 폭이 좁은 경우로서  $\gamma = 20$  으로 두었으며, 수치실험 영역은 규칙파의 경우와 같이 하여 첨두주기에서의 상대수심은  $k_p h = 0.425\pi$  로서 중간수심으로 설정하였다. 그리고, 지배방정식에서  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{C}_g$  등의 계수는 첨두 주파수를 대표 주파수로 하여 정하였다.

해석 가능성과 수치적인 안정성을 얻기 위하여 입사파의 주파수 영역을 제한하여야 한다. 주파수 스펙트럼의 에너지 밀도가 첨두 주파수 에너지 밀도의 5% 이하인 부분을 제외시켜서 입사파의 주파수 영역이 0.67 Hz 와 1.00 Hz 사이에 있도록 하였으며, 이 영역의 에너지는 전체 에너지의 83% 가 되었으며, 유의파고는 2.54 cm 가 되었다.

격자 간격은  $\Delta x = 0.05$  m,  $\Delta t = 0.05$  s 이고  $L_{min}/\Delta x = 30.3$  이 되어 공간적으로 충분한 해상도를 얻을 수 있었다.  $L_{min}$  는 주어진 주파수 영역에서 재현되는 최소의 파장을 의미한다. 1888.4 s 가 경과한 시각에 재현된 수면변위와 엄밀해를 Fig. 4에 나타내었다. 스폰지 층의 영향을 받는 구간을 제외하면, 재현된 파는 엄밀해와 거의 일치함을 볼 수 있다.

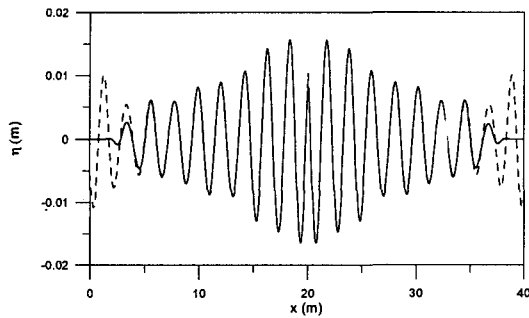


Fig. 4. Water surface elevations of uni-directional random waves at  $t=100$  s; solid line=model solution, dashed line=exact solution.

조파영역의 중심에서  $10L_{max}$  떨어진 지점에서 수면변위  $\eta$  의 시계열을 측정하였다.  $L_{max}$  는 주어진 주파수 영역에서 재현되는 최대의 파장이다. 입사파 중에서 단주기파도 측정지점에서 감지하기 위하여 조파시각 후 250 s 가 경과한 시각부터 1888.4 s 까지

0.1 s 시간간격으로 모두 16384 개의 시계열을 측정하였다. 측정된 수면변위의 시계열로부터 주파수 스펙트럼을 구하는 방법으로서 FFT 기법을 사용하고 Otnes와 Enochson(1978)의 평활화 기법을 사용하였다. 즉, 16384 개의 측정값을 인접한 묶음이 서로 50% 씩 중복되게 하여 각각의 묶음이 4096 개의 측정값을 갖는 총 7 개의 묶음으로 분리하였다. 각 묶음에 대하여 FFT 기법을 사용하여 주파수 성분을 구한 후 7 개의 묶음에 대하여 ensemble 평균하였다. Fig. 5에서 나타난 바와 같이 수치적으로 재현된 입사파의 주파수 스펙트럼은 목표 스펙트럼과 일치함을 알 수 있다.

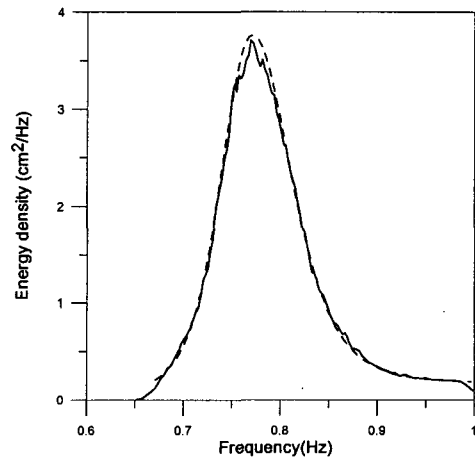


Fig. 5. Frequency spectra of uni-directional random waves; solid line=simulated data, dashed line=target.

#### 4. 맺음말

본 연구에서 시간의존 환경사방정식인 Kubo 등 (1992)의 식에 Wei 등(1999)이 Boussinesq 식에 사용한 원천함수 기법을 도입하여 조파하였다. 원천함수 기법을 사용하여 일차원 규칙파를 조파하였으며, 조파영역에서 반사파가 제대로 통과하는 것을 보였다. 불규칙파의 경우에도 수면변위가 엄밀해와 일치하였으며, 목적인 파의 에너지가 성공적으로 재현됨을 스펙트럼 분석을 통하여 알 수 있었다.

그런데, 실제 해역은 다방향 불규칙파이다. 본 연구에서 개발한 조파 기법을 사용하여 다방향 불규칙파를 조파할 필요가 있겠다. 본 연구에서는 Kubo 등의 환경사방정식에 원천함수 기법을 적용하였지만, 이창훈 등(2001)의 확장형 환경사방정식에도 조파기

법의 적용이 가능하다. 그리고, 해를 구하는 과정이 Helmholtz 식의 해를 구하는 과정과 동일하므로, Helmholtz 식으로 귀결되는 다른 모형에도 원천합수 기법의 적용이 가능할 것으로 보인다.

## 사 사

이 논문은 2000년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었다.

## 참고 문헌

- 이창훈, 김건우, 서경덕, 2001. 불규칙파 해석이 가능한 확장형 완경사방정식. 대한토목학회 논문집 (인쇄중).
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Int. Conf. Coast. Engrg.*, ASCE, 471-490.
- Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the mild-slope wave equation. *Coast. Engrg.*, 9, 125-149.
- Kubo, Y., Kotake, Y., Isobe, M. and Watanabe, A., 1992. Time-dependent mild slope equation for random waves. *Proc. 23rd Int. Conf. Coast. Engrg.*, ASCE, 419-431.
- Larsen, J. and Dancy, H., 1983. Open boundaries in short wave simulations – a new approach. *Coast. Engrg.*, 7, 285-297.
- Lee, C., 1994. *A Study of Time-dependent Mild-slope Equations*. Ph.D. Dissertation, Dept. of Civil Eng., Univ. of Delaware.
- Lee, C., Cho, Y.-S. and Yum, K., 2001. Internal generation of waves for extended Boussinesq equations. *Coast. Engrg.*, 42, 155-162.
- Lee, C. and Pyun, C.K., 1995. Wave group behavior for time-dependent mild-slope equations. *J. Korean Soc. Civil Engrs.*, 15, 1659-1668.
- Lee, C. and Suh, K.D., 1998. Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations. *Coast. Engrg.*, 34, 35-57.
- Madsen, P.A. and Larsen, J., 1987. An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation. *Coast. Engrg.*, 7, 329-351.
- Nishimura, H., Maruyama, K. and Hirakuchi, H., 1983. Wave field analysis by finite difference method. *Proc. 30th Japanese Conf. Coast. Engrg.*, 123-127 (in Japanese).
- Otnes, R.K. and Enochson, L., 1978. *Applied Time Series Analysis. Vol. 1. Basic Techniques*, John

- Wiley and Sons, New York, N.Y.
- Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, 27, 815-827.
- Radder, A.C. and Dingemans, M.W., 1985. Canonical equations for almost periodic weakly nonlinear gravity waves, *Wave Motion*, 7, 473-485.
- Smith, R. and Sprinks, T., 1975. Scattering of surface waves by a conical island, *J. Fluid Mech.*, 72, 373-384.
- Wei, G., Kirby, J.T. and Sinha, A., 1999. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method, *Coast. Engrg.*, 36, 271-299.