

# 탄성-완전-소성 보강셀 구조물의 설계민감도해석

정재준 \* · 이태희 \*\* · 임장근 \*\*\*

## Design Sensitivity Analysis of Elasto-perfectly-plastic Structure for Stiffened Shell Structure

Jaejoon Jung, Tae Hee Lee, Jang Keun Lim

**Key Words :** Design Sensitivity Analysis (설계민감도해석), Elasto-perfectly-plastic materials (탄성-완전-소성 재료), Incremental equilibrium equation (증분평형방정식), Flow rule (유동법칙), Yield criterion (항복기준)

### Abstract

Design sensitivity analysis for nonlinear structural problems has been emerged in the last decade as a glowing area of engineering research. As a result, theoretical formulations and computational algorithms have already developed for design sensitivity of nonlinear structural problems. There is not enough research for practical nonlinear problems using multi-element, due to difficulties of implementation into FEA. Therefore, nonlinear response analysis for stiffened shell which consists of Mindlin plate and Timoshenko beam, was considered. Specially, it presents the backward-Euler method which is adopted to describe an exact yield state in the stress computation procedure. Then, design sensitivity analysis of nonlinear structures, particularly elasto-perfectly-plastic structure, is developed using direct differentiation method. The accuracy of the developed sensitivity analysis was compared with the central finite difference method. Finally, on the basis of above results, design improvement for stiffened shell is suggested.

### 기호설명

- $d\epsilon_{ij}$ : 미소변형률 (infinitesimal strain)
- $d\lambda$ : 소성승수 (plastic multiplier)
- $f$ : 항복함수 (yield function)
- $\mathbf{a}$ : 유동벡터 (flow vector)
- $\mathbf{D}$ : 탄성구성행렬 (elastic constitutive matrix)
- $\mathbf{D}_{ep}$ : 탄성-완전-소성 구성행렬 (elasto-perfectly-plastic constitutive matrix)
- ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$ : 접선강성행렬 (tangent stiffness matrix)
- $J'_2$ : 2 차 편차응력 불변량 (2<sup>nd</sup> deviatoric stress invariant)

### 1. 서론

설계민감도해석은 구조물이나 시스템의 성능을 극대화하는 설계 방향 정보를 제공함으로써 그 활용 분야가 점차 확대되고 있다. 초기의 설계민감도해석에 대한 연구는 주로 선형시스템에 국한되었다. 하지만 점차 시스템이 복잡해지고, 구조물의 실제적인 비선형 거동을 고려한 최적화가 요구됨에 따라, 재료의 탄소성 거동과 경화 특성을 함께 고려한 비선형 설계민감도해석에 대한 연구가 필요하게 되었다.

Ryu[1]와 Wu[2]는 재료·기하 비선형 특성을 갖는 간단한 트러스 구조물에 대한 비선형 설계민감도를 토달라그란지안과 업데이트 라그란지안 정식화를 통해 구한 뒤, 이를 최적화하는 연구를 수행하였다. Bendsoe 와 Sokolowski[3]는 탄소성구조물의 설계민감도해석을 2 차계획법 (Quadratic Progra

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 한양대학교 기계공학부

\*\*\* 한양대학교 기계공학부

-mming) 문제로서 정식화하였고, Cardoso 와 Arora[4]는 적분형의 응답함수를 직접 변분하는 방법을 통해 설계민감도를 구하는 연속민감도해석 방법을 제시하였다. 또한 Tsay[5]와 Vidal[6]은 경로의존적인 비선형 거동을 나타내는 구조물에 대한 설계민감도해석을 수행하였으며, Osaki[7]는 직접변분법을 통해 탄소성 트러스 구조물에 대한 설계민감도를 구하였다.

Lee[8]는 탄소성 재료가 변이점에서는 민감도값이 불연속인 점을 고려해, 하중 증분 상태가 아닌 중 하중 상태에서의 평형 방정식을 변분하는 방법으로 트러스 구조물에 대한 비선형 설계민감도해석을 수행하였다. 또한 Lee[9]는 보조변수법을 이용해 탄소성 구조물의 비선형 민감도 해석을 수행하기도 했다.

이와 같이 비선형 설계민감도해석은 재료의 다양한 비선형성으로 인해, 여러 가지 방법론과 정식화가 이루어져 왔다. 하지만 복잡한 구조물이나 다중 요소를 사용한 모델에 대한 비선형 설계민감도 해석은 수치계산을 위한 FEA 작업의 어려움으로 인해, 그 연구가 다소 미흡한 실정이다.

따라서 본 논문에서는 보강셀 구조물에 대한 비선형 설계민감도해석을 수행하고 그 결과를 소개하고자 한다. 보강셀은 비용절감과 구조물의 경량설계를 위하여 판을 이루는 셀요소와 보강재를 이루는 빔으로 구성되어 있으며, 재료의 소성 특성을 고려하여 모델링 하였다. 보강판을 이루는 여러 설계변수에 대한 변위 민감도를 구해보고, 그 결과를 중앙차분법과 비교하는 한편, 위 결과를 바탕으로 주요 설계변수의 선정과 설계개선 방향에 대해서 살펴보고자 한다.

## 2. 탄성-완전-소성 재료의 유한요소해석

### 2.1 구성 방정식

항복 (yielding)이 일어난 후, 재료의 미소변형률은 탄성과 소성 성분의 합으로 나타낼 수 있다 [10].

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (i,j=1,2,3) \quad (1)$$

여기서, 위첨자  $e$  와  $p$  는 각각 탄성과 소성 성분을 의미한다. 탄성변형률 (elastic strain)은 응력 증분량 (stress increment)을 편차응력 (deviatoric stress)  $\sigma'_{ij}$  와 정수압 응력 (hydrostatic stress)  $\sigma_{kk}$  로 나타낼 수 있다는 관계를 이용하면,

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{3E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (2)$$

이 된다.  $\mu$ ,  $E$ ,  $\nu$  는 각각 라메상수 (Lame constant), 탄성계수 (Young's modulus), 그리고 프와송비 (Poisson's ratio)를 나타낸다. 여기서 편차응력은  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$  이다. 소성변형률 (plastic strain)은 항복 기준에 따라 달라지는 항복함수  $f$  를 응력으로 편미분한 값인, 항복함수의 응력 구배량에 비례한다. 이를 유동법칙 (flow rule)이라고 하며, 식 (3)과 같이 쓸 수 있다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \mathbf{a} \quad (3)$$

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xz}} \right]^T \quad (4)$$

(4)식에서 벡터  $\mathbf{a}$  는 항복면에 수직인 방향의 유동벡터이다.

(2)식과 (3)식을 (1)식에 대입하면, 탄소성 재료의 응력과 변형률에 대한 관계식을 유도할 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{3E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

식(5)를 탄성 구성행렬인  $\mathbf{D}$  를 이용하여 나타내면 아래와 같다.

$$d\epsilon = \mathbf{D}^{-1} d\sigma + d\lambda \mathbf{a} \quad (6)$$

(6)식의 양변에  $\mathbf{D}$  를 곱하고 응력에 대해서 정리하면, 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$d\sigma = \mathbf{D}(d\epsilon - d\epsilon^p) = \mathbf{D}(d\epsilon - d\lambda \mathbf{a}) \quad (7)$$

탄성-완전-소성재료는 경화현상 (hardening)이 없이 항복면의 크기가 고정되어 있는 경우이므로, 응력 변화량  $d\sigma$  와 유동벡터  $\mathbf{a}$  는 다음과 같은 관계가 있다.

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma = \mathbf{a}^T d\sigma = 0 \quad (8)$$

(8)식은 항복면에서 응력증가 방향이 벡터  $\mathbf{a}$  와 수직을 이루므로, 응력은 항복면에서 접선방향으로 증가한다는 것을 나타낸다. 이러한 현상 때문에 유동법칙을 직교조건 (normality condition)이라고도 한다.

(6)식의 양변에  $\mathbf{a}^T \mathbf{D}$  를 곱하고, (8)식의 관계를 이용하면 비례상수  $d\lambda$  를 구할 수 있다.

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \quad (9)$$

(9)식을 다시 (7)식에 대입하고,  $\mathbf{D}$  의 대칭성질 이용하면, 최종적으로 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \left( \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{D}\mathbf{a})^T (\mathbf{D}\mathbf{a})}{\mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

$$\equiv \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{D}_{ep}$  는 탄성-완전-소성재료의 구성행렬로 접선계수행렬(tangential modular matrix)이라고 한다.

## 2.2 비선형 구조해석

비선형 유한요소 해석에서 빠른 수렴성과 해의 정확성을 위해 뉴턴-랩선법 (Newton-Raphson scheme)이 자주 사용된다. 뉴턴-랩선법은 외력을 여러 개의 하중단계로 나누고, 각각의 하중단계에서 증분평형방정식의 평형조건을 만족할 때까지 해석을 반복하는 방법이다[12]. 하중단계  $t$  에서 평형조건이 만족되었다고 가정하면, 하중단계  $t + \Delta t$  에서의 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b}) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) = 0 \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{b}$  는 설계변수 (design variable),  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b})$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U})$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$  는 각각 하중단계  $t + \Delta t$  에서의 외력 (external force), 내력 (internal force), 그리고 변위 (displacement)를 의미한다. 일반적으로 비선형 해석에서 내력  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U})$  는 설계변수와 변위의 함수이고, 외력  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b})$  은 일반성을 위해 설계변수의 함수라고 가정한다. (12)식에서 (i-1)번째 반복횟수에서의 변위  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}$  와 내력  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)})$  를 계산하였다고 가정하고, 이

를 1차 테일러 급수로 전개하면 아래와 같다.

$$0 = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b}) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) - \left[ \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right]_{{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}} \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \right) \quad (13)$$

여기서, 내력과 변위의 관계로부터 내력에 대한 변위의 편미분 값은 접선강성행렬 (tangent stiffness matrix)  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$  가 되고, (13)식은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b}) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (15)$$

식(14)는 비선형 구조해석에서 사용되는 증분평형방정식이고, (14)식과 (15)식을 이용하여 그 해를 구하는 방법을 뉴턴-랩선법이라고 한다. 이때 접선강성행렬  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$  는  $\xi - \eta$  좌표계 (coordinate)의 등매계변수 대응 (isoparametric mapping)을 이용하여 요소강성행렬 (element stiffness matrix)로 표현하면, 식(11)에서 유도한 접선계수행렬과 다음과 같은 관계가 성립한다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} = \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_{ep}^{(i-1)} \right) \mathbf{B} |J| d\xi d\eta \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{B}$  는 변형률-변위행렬 (strain-displacement matrix)이고,  $J$  는 자코비안 행렬 (Jacobian matrix)을 나타낸다.

## 2.3 응력과 변형률의 계산

일반적으로 탄성-완전-소성 재료는 항복이 일어난 경우, 물성치가 변하기 때문에 정확한 해를 얻기 위해서 하중단계의 설정과 응력 및 변형률의 계산 방법에 대한 세심한 고려가 필요하다. 본 논문에서는 이러한 이유로 사용된 후방 오일러 방법 (backward Euler method)을 이용하여, 항복조건과 구성 방정식을 만족하는 응력과 변형률을 구하였다 [10].

식(14)에서 구한 변위증분량  $d\mathbf{U}^{(i)}$  는 선형응력 증분 (linear stress increment)  $d\boldsymbol{\sigma}^{(i)} (= \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)})$  를 구하는데 사용되고,  $i$  번째 반복횟수에서의 전체 응력  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$  는 식(7)을 이용하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - d\lambda\mathbf{D}\mathbf{a} \quad (17)$$

$i$  번째 반복횟수에서 모든 응력과 변형률은 가우스 적분점 (Gaussian integration point)에서 소성변형의 발생 유무가 검토되고, 정확한 항복응력을 계산하기 위해 탄성-탄성변형, 탄성-소성변형, 소성-소성변형의 경우를 고려해 (17)식을 다시 쓰면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + (1-r)\mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} + r\mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - d\lambda\mathbf{D}\mathbf{a} \quad (18)$$

여기서  $r$  은  $(\boldsymbol{\sigma}_e^{(i)} - \boldsymbol{\sigma}_Y)/(\boldsymbol{\sigma}_e^{(i)} - \boldsymbol{\sigma}_e^{(i-1)})$  로  $i$  번째 반복횟수에서 전체 응력 증분량에 대한 선형 응력 증분량의 비 (ratio)를 나타내고, 하첨자  $e$  와  $Y$  는 각각 유효응력 (effective stress)과 항복응력을 의미한다[10]. 이때, 탄성상태에서는  $r=0$ ,  $d\lambda=0$  이고, 소성변형후에는  $r=1$  이 된다.

### 3. 설계민감도해석

#### 3.1 설계민감도해석

설계민감도해석은 설계변수의 변화에 대한 응답함수의 변화율을 구하는 것이므로, 다음과 같은 응답함수 (response function)의 전미분 (total derivative)을 구하는 것으로 정의할 수 있다.

$$\frac{d\psi(\mathbf{b}, \mathbf{U})}{db} = \frac{\partial\psi(\mathbf{b}, \mathbf{U})}{\partial\mathbf{b}} + \frac{\partial\psi(\mathbf{b}, \mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{db} \quad (19)$$

응답함수는 일반적으로 설계변수  $\mathbf{b}$  와 상태변수 (state variable)인 변위  $\mathbf{U}$  에 대해 양함수 (explicit function)이므로, 이들의 편미분은 쉽게 구할 수 있다. 그러나 변위  $\mathbf{U}$  는 설계변수에 대해서 음함수 (implicit function)이기 때문에, 평형방정식 (12)를 설계변수에 대해 직접미분 (direct differentiation)하는 방법이나 보조함수 (augmented function)를 정의하고 이를 미분하는 보조변수법 (adjoint variable method)을 통해서 변위 민감도를 구할 수 있다.

#### 3.2 직접미분법

평형방정식 (12)를 설계변수에 대해 직접 미분하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}} - \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U})}{\partial\mathbf{b}} - \left[ \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, \mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t, \mathbf{U}} \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{U}}{db} = 0 \quad (20)$$

여기서, 외력  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{b})$  이 설계변수의 함수가 아닌 상수 (constant)라고 가정하고, 식(13)과 식(14)의 접선강성행렬을 이용해 (20)식을 다시 쓰면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K} \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{U}}{db} = - \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U})}{\partial\mathbf{b}} \quad (21)$$

접선강성행렬  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}$  은 해석과정을 통해 주어지는 값이므로 우변의 설계변수에 대한 내력의 편미분량을 구해야 한다. 내력  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)})$  는 변형률-변위 관계 행렬인  $\mathbf{B}$  와 식(18)식과는 아래와 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)}) \\ &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + (1-r)\mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} + r\mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - d\lambda\mathbf{D}\mathbf{a}) \right] J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)을 설계변수에 대해 편미분 하면 (21)식의 우변항을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{b}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)})}{\partial\mathbf{b}} \\ &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial\mathbf{B}^T}{\partial\mathbf{b}} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathbf{B}^T \left( \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}}{\partial\mathbf{b}} - \frac{\partial r}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} + (1-r) \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{b}} d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial r}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} + r \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{b}} d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - \frac{\partial d\lambda}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{D}\mathbf{a} - d\lambda \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{a} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - d\lambda \mathbf{D} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{b}} \right) \right] \left[ J \right] d\xi d\eta + \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \right] \frac{\partial[J]}{\partial\mathbf{b}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (23)$$

(23)식에서 해석과정동안 적분구간이 바뀌는 형상문제 (shape problem)가 아니라면 첫번째와 마지막 항은 소거된다. (23)식을 (21)식에 대입하고,  $d^{t+\Delta t} \mathbf{U}/db$  에 대해 선형 방정식인 (21)식을 풀면, 비선형 설계민감도해석을 수행할 수 있다.

#### 4. 적용 예제

##### 4.1 보강셸(stiffened shell)

본 논문에서는 민들린 판 (Mindlin plate)과 티모센코 빔 (Timoshenko beam)으로 구성된 보강판에 대한 설계민감도해석을 수행하였다. 적용 모델은 Fig.1 과 같으며, 보강판의 물성치는 Table.1 과 같다.

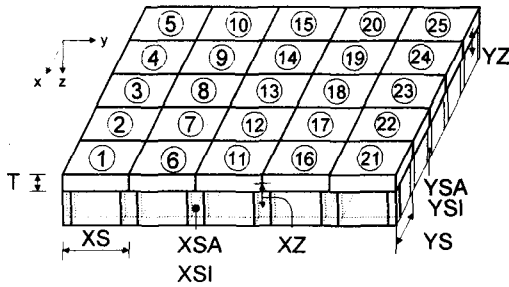


Fig.1 1/4 stiffened shell model

민들린 판은 변의 중앙에 4 개의 중앙노드 (mid-node)를 갖는 8-노드 요소로서 모델링 하였고, 이 변에서 보강재와 노드를 공유하는 방식으로 총 60 개의 보강재가 사용되었으며, 총 노드의 개수는 96 개이다. 판의 (+)X 면과 (-)Y 면에는 대칭경계조건을 주었으며, (-)X 면과 (+)Y 면에는 경계조건으로 Z 축의 변위만을 고정하였다. 그리고 하중 조건으로는 (+)Z 축 방향으로 요소의 모서리마다 1kN 의 하중을 가하였다. XS, YS 는 각각 X, Y 방향 보강재의 간격, XSA, YSA 는 보강재의 단면적, XSI, YSI 는 보강재의 2 차 관성모멘트, XZ, YZ 는 보강재의 도심에서 판의 도심까지의 편심거리, 그리고 T 는 판의 두께를 나타낸다.

Table.1 Properties of stiffened shell

T	E	v	$\sigma_Y$
0.005(m)	21(Gpa/m <sup>2</sup> )	0.3	192(Mpa)
XS	XSA	XSI	XZ
0.02(m)	0.03(m <sup>2</sup> )	0.25(m <sup>4</sup> )	0.01(m)
YS	YSA	YSI	YZ
0.02(m)	0.03(m <sup>2</sup> )	0.25(m <sup>4</sup> )	0.01(m)

##### 4.1.1 구성방정식

보강판의 구성방정식은 판요소와 보요소의 구성방정식을 중첩시켜 유도할 수 있으며, 응력합벡터 (stress resultant vector)와 탄성구성행렬 **D**, 그리고 변형률벡터로 나타내보면 아래와 같다[11][12].

$$\sigma^T = \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_{xz} \ Q_{yz}\} \quad (24)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{88} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D_{11} = \frac{E \cdot T}{1 - \nu^2} + \frac{E \cdot XSA}{XS} \quad (26)$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{E \cdot T}{1 - \nu^2} \cdot \nu \quad (27)$$

$$D_{22} = \frac{E \cdot T}{1 - \nu^2} + \frac{E \cdot YSA}{YS} \quad (28)$$

$$D_{33} = \frac{E \cdot T}{2(1 + \nu)} \quad (29)$$

$$D_{44} = \frac{E \cdot T^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{E \cdot (XSI + XSA \cdot XZ^2)}{XS} \quad (30)$$

$$D_{45} = D_{54} = \frac{E \cdot T^3 \cdot \nu}{12(1 - \nu^2)} \quad (31)$$

$$D_{55} = \frac{E \cdot T^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{E \cdot (YSI + YSA \cdot YZ^2)}{YS} \quad (32)$$

$$D_{66} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E \cdot T^3}{12(1 + \nu)} \quad (33)$$

$$D_{77} = \frac{5}{6} \cdot \frac{E \cdot T}{2(1 + \nu)} + \frac{5}{6} \cdot \frac{E \cdot XSA}{2(1 + \nu) \cdot XS} \quad (34)$$

$$D_{88} = \frac{5}{6} \cdot \frac{E \cdot T}{2(1 + \nu)} + \frac{5}{6} \cdot \frac{E \cdot YSA}{2(1 + \nu) \cdot YS} \quad (35)$$

$$d\epsilon^T = \{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy} \ \kappa_{xx} \ \kappa_{yy} \ \kappa_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\} \quad (36)$$

여기서 응력합벡터는 응력을 적분한 값이며,  $N_x, N_y$  는 축방향 힘,  $M_x, M_y$  는 굽힘모멘트,  $M_{xy}$  는 비틀림 모멘트, 그리고  $Q_{xz}, Q_{yz}$  는 전단력을 의미한다.

또한 재료의 항복 기준은 식(37)과 같은 본미세스 항복기준 (von Mises yield criterion)을 사용하였기 때문에 유동벡터 **a**는 식(38)과 같다.

$$f = \sqrt{3}\sqrt{J'_2} - \sigma_Y$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{2}[\sigma'_x{}^2 + \sigma'_y{}^2 + \sigma'_z{}^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} - \sigma_Y \quad (37)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J'_2}} \{\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz}\}^T \quad (38)$$

식(38)에서 유동벡터는  $\mathbf{D}$ 의 행이나 열의 개수와 같으므로 본 문제에서는

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J'_2}} \{0, 0, 0, \sigma'_x, \sigma'_y, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz}\}^T \quad (39)$$

이 된다. 식(25)과 식(39)을 (10)식에 대입하면, 보강판의 구성방정식을 얻을 수 있다.

#### 4.2 보강판의 설계민감도해석

식(14), (15)를 통해 비선형 해석을 한 후, 식(21)과 (23)식 이용하여 두께  $T$ 에 대한 설계민감도 해석을 수행한 결과와 유한차분법의 결과를 Table.2와 Table.3에 나타내었다.

Table.2 Displacement sensitivity of stiffened shell

Node	UX	UY	UZ	θ X	θ Y	θ Z
1	0	0	-0.024290	0	0	0
2	0	0	-0.023856	0.000090	0	0
3	0	0	-0.022476	0.000178	0	0
4	0	0	-0.020414	0.000222	0	0
:	:	:	:	:	:	:
92	0	0	0	-0.000021	0.000200	0
93	0	0	0	-0.000024	0.000156	0
94	0	0	0	-0.000026	0.000105	0
95	0	0	0	-0.000026	0.000057	0
96	0	0	0	-0.000025	-0.000025	0

요소 ①번의 모든 노드에서 항복이 일어났으며, 전체 모델에서 중앙에 해당하는 1번 노드의 Z 방향의 변위 민감도가 예상대로 가장 크게 나왔다.

두께  $T$ 에 대한 변위 민감도 값은 중앙차분법과 거의 일치했으며, 이를 바탕으로 1번 노드의 Z 방향 변위에 대한 민감도를 여러 설계변수에 대해서 구하여 보았으며, 그 결과는 Table. 4와 같다.

Table.3 Displacement finite difference method ( $\Delta b = 0.0002$ )

Node	UX	UY	UZ	θ X	θ Y	θ Z
1	0	0	-0.024262	0	0	0
2	0	0	-0.023830	0.000090	0	0
3	0	0	-0.022458	0.000177	0	0
4	0	0	-0.020402	0.000222	0	0
:	:	:	:	:	:	:
92	0	0	0	-0.000021	0.000200	0
93	0	0	0	-0.000024	0.000156	0
94	0	0	0	-0.000026	0.000105	0
95	0	0	0	-0.000026	0.000057	0
96	0	0	0	-0.000025	-0.000025	0

Table.4 Sensitivities for design variables of stiffened shell

Design variable	Sensitivity
T	-0.02429
XS	0.00511
YS	0.00511
XSA	-0.003146
YSA	-0.003146
XSI	-0.000031
YSI	-0.000031
XZ	-0.018751
YZ	-0.018751

## 5. 결론

본 논문에서는 다중요소를 사용하여, 탄성-완전-소성 거동을 하는 보강판의 비선형 해석을 수행하였다. 정확한 소성응력을 계산하기 위해 후방 오일러 방법을 사용하였으며, 평형방정식을 직접 미분하는 직적미분법을 통해 설계민감도 해석을 수행하였다. 그 결과 보강판을 이루는 설계변수 중, 처짐 감소를 위해서는 보강재의 단면적, 2차 관성 모멘트, 그리고 보강재의 편심거리는 증가시켜야 하며, 보강재의 간격은 줄어야 한다는 설계 개선 정보를 얻었다. 그리고, 이들 설계변수 중, 중요 설계변수는 보강판의 두께임을 알 수 있었다. 본 연구에서는 재료의 경화현상은 고려하지 못했으므로

로, 이것을 고려한 민감도 해석에 대한 연구가 필요하다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Y.S. Ryu, M. Haririan, C.C. Wu and J.S. Arora, 1985, "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Computers & Structures*, Vol.21, pp.245~255
- (2) C.C. Wu and J. S. Arora, 1987, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure", *AIAA Journal*, Vol.25, No. 8, pp.1118~1125
- (3) M.P. Bendsoe and J Sokolowski, 1988, "Design Sensitivity Analysis of Elasto-Plastic Analysis Problems", *Mech. Struct Machines*, Vol.16 , pp. 81~102
- (4) J.B. Cardoso and J.S. Arora, 1988, "Variational Method for Design Sensitivity Analysis in Nonlinear Structural Mechanics.", *AIAA Journal*, Vol.26, No.5, pp.595~603
- (5) J.J. Tsay and J. S. Arora, 1990, "Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems. Part 1: General theory", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 81, pp.183~208
- (6) C.A. Vidal, H. S. Lee and R. B. Haber, 1991, "The Consistent Tangent Operator for Design Sensitivity Analysis of History-Dependent Response", *Comput. Syst. Engrg* , pp.509~523
- (7) Osaki and J.S. Arora, 1994, "Design Sensitivity Analysis of Elasto-Plastic Structure", *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, Vol. 37, pp.737~762
- (8) T.H. Lee and J.S. Arora, 1995, "A Computational Method for Design Sensitivity Analysis of Elastoplastic Structures.", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 122 , pp.27~50
- (9) T.H Lee, 1999, "An Adjoint Variable Method for Design Sensitivity Analysis of Elastoplastic Structures", *KSME International Journal*, Vol. 13, No. 3, pp. 246~252
- (10) D.R.J Owen, E. Hinton, 1980, *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited Swansea, U.K
- (11) M.A. Crisfield, 1991, *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structure*, John Wiley & Sons Ltd.
- (12) Bathe, 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc.