

평면에서의 임의 형상을 갖는 물체의 접촉 해석

전 경 진*·손 정 현**·유 완 석***

Contact analysis of any Shaped Rigid Bodies

Kyoung-Jin Jun, Jeong-Hyun Sohn and Wan-Suk Yoo

Key Words: Contact force(접촉력), Piecewise analysis(불연속 해석법), Continuous analysis(연속 해석법), Penetration(침투량), Velocity of penetration(침투 속도)

Abstract

This paper presents a method for calculating contact force of any shaped rigid bodies on plane. At each integration time step, the proposed method finds expected contact point on their outlines and then calculates penetration and contact force. This paper is using the continuous analysis method to calculate contact force. To get the accurate expected contact point on their outlines, a new algorithm is developed. Through the comparison with DADS, the accuracy of the proposed algorithm is proved.

1. 서 론

기계 시스템에서 접촉은 필연적으로 발생하는 요인이다. 충돌과 같이 짧은 시간 동안에 매우 큰 접촉력을 발생시켜 급격한 속도와 가속도의 변화를 초래하는 접촉도 있는 반면에 기어나 지면을 굴러가는 물체간의 접촉과 같이 계속적인 접촉력을 발생시키는 접촉도 있다. 접촉 요인은 크게 두 가지 요인으로 나눌 수 있는데, 기구를 구성하는 조인트들의 가공 오차로 인한 내적인 요인과 두 물체가 충돌함으로써 발생하는 외적인 요인을 들 수 있다. 이러한 요인에 의한 접촉력은 시스템의 운동에 중요한 역할을 한다.

접촉을 해석하는 방법은 불연속 해석법(piecewise analysis)과 연속 해석법(continuous analysis)으로 나눌 수 있다. 불연속 해석법은 시스템에서 접촉이 순간적으로 일어난다고 가정하여 접촉 전과 접촉 후로 나누어 계산한다. 이

해석법은 자유 물체 혹은 구속되지 않은 물체간의 충돌해석에 사용되어왔다.⁽¹⁻³⁾ 다물체 시스템의 경우에는 Wehage⁽⁴⁾에 의해서 처음으로 선운동량 보존법칙을 이용해 나타내었고, Shabana와 Khulief⁽⁵⁾는 이것을 탄성체에 확장 시켰다. 연속 해석법은 접촉력이 연속적으로 작용한다고 가정해서 해석하는 방식으로 이 해석방법은 단순히 접촉력을 시스템의 운동 방정식에 적용시켜 주기만 하면 된다. 가장 간단한 것으로 Kelvin-Voigt model⁽⁶⁾이라 불리는 접촉력을 선형 스프링과 댐퍼로 표현한 것이 있고, Khulief와 Shabana⁽⁷⁾는 이 모델을 다물체 시스템에 적용시켰으며 Hunt와 Grossley⁽⁸⁾는 이 모델에서 선형 스프링과 댐퍼에 의한 접촉력 해석이 적합하지 않음을 지적하고, 접촉력을 Hertz의 탄성이론에 의한 거리의 함수로 나타내었다.

본 논문에서는 연속 해석법을 이용해서 평면에서 임의의 형상 데이터를 가지는 두 강체의 접촉 해석을 짧은 시간에 접촉현상이 일어나는 충돌현상과 물체가 다른 물체의 표면을 미끄러져 내려가는 미끄럼 접촉으로 나누어 해석해보고 그 결과를 상용 다물체 동역학 해석 프로그램인

* 회원, 부산대학교 대학원

** 회원, 부산대학교 대학원

*** 회원, 부산대학교 기계공학부

DADS⁽⁹⁾와 비교하여 본 프로그램의 신뢰성을 검증하였다. 수치예제에서 DADS와의 비교를 위한 물체는 원형의 형상을 갖는 물체로 하여 시뮬레이션을 수행하였다.

2. 접촉력 계산 알고리즘

2.1 접촉 해석의 단계

시스템의 접촉을 해석하기 위해서는 크게 접촉을 판단하는 단계와 접촉력을 구하는 두 가지의 단계로 나뉜다.

2.1.1 접촉 판단

임의의 형상 데이터를 갖는 두 물체의 접촉에 있어서 가장 중요한 것은 두 물체의 접촉점을 찾아내는 것이다. 예상되어지는 접촉점은 두 물체의 형상을 이루는 점들 중 최단거리를 갖는 두 개의 점이 된다. 그러나 형상 데이터가 이산적(discreted)으로 주어져 있기 때문에 주어진 점들 사이의 거리가 최단거리가 아닐 수도 있다. 즉 주어진 점들이 아니라 그 점들 사이의 주어지지 않은 임의의 점이 최단거리를 갖는 점이 될 수도 있다. 그러므로 우선 일차적으로 주어진 점들 중 최단거리를 갖는 두 점을 찾고, 그 이후에 그 찾은 점의 이웃하는 점들과의 벡터를 이용해 다시 한번 최단거리를 갖는 점을 구한다. Fig.1은 위의 과정을 설명한 그림이다. 본 프로그램에서는 두 물체의 형상 데이터들 중에서 최단거리를 갖는 두 점을 찾아내어서 그 두 점을 접촉점이라고 가정하고 그 점들간의 거리가 영(zero)에 가까울 때 (본 프로그램에서는 10^{-10} 으로 하였음.) 접촉이 일어난다고 판단하였다.

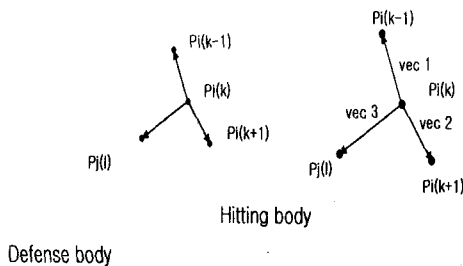


Fig. 1 Process of detection of contact point

2.1.2 연속 접촉력(continuous contact force) 계산
일반적으로 접촉은 두 물체간의 압축 상태와 복원 상태(restitution phase)로 구분되어진다. 압축 상태동안 두 물체는 접촉면의 수직방향으로 변형이 생기고, 두 물체의 접촉점의 상대속도는 영(zero)으로 감소된다. 압축 상태가 끝나는 시점은 변형이 최대로 되었을 때이며 이때가 이완 상태의 시작이 된다. 이완 상태는 두 물체가 떨어질 때까지 계속된다.⁽¹⁰⁾

연속 접촉 모델에서 접촉력은 접촉 기간동안 지속적으로 작용한다. 연속 접촉 모델은 Kelvin-Voigt 모델에서 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델로 이어져 왔다. 이 모델에서는 접촉력을 구하기 위해서 충돌하는 두 물체를 단순히 스프링과 댐퍼를 가진 시스템으로 가정하고 스프링 강성 및 댐핑 계수를 이용하여 접촉력을 구하거나 침투량과 침투 속도에 따른 스프링 및 댐핑 데이터를 사용하여 비선형적인 접촉력을 구한다. 그리고 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델은 재료의 물성치인 영 계수와 반발 계수를 사용하여 접촉력을 구한다.

Kelvin-Voigt 모델에서 접촉력을 구하는 식은 다음과 같다.

$$F = K\delta + c\dot{\delta} \quad (1)$$

여기서 K 와 c 는 각각 스프링 강성과 댐핑 계수를 나타내고, δ 와 $\dot{\delta}$ 는 각각 침투량과 침투 속도를 나타낸다. 식 (1)에 의한 접촉력은 댐핑이 있는 경우 침투량이 영이더라도 침투 속도에 의해 0이 아닌 값을 가지게 된다. 따라서 실제 물리현상에 적용시키기에는 불합리하다고 할 수 있다.

반면, Hertz의 탄성이론을 바탕으로 하는 모델에서는 접촉력을 구하는 스프링력과 댐핑력을 거리에 대한 비선형적인 함수로 계산을 하고 있다. Fig.2는 침투량에 대한 접촉힘을 나타낸 것이고, Fig.3은 접촉이 일어나는 순간부터 접촉이 끝나는 순간까지 시간에 대한 침투량을 나타낸 것이다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 침투량이 영인 지점에서는 접촉력이 영이 되며 거리에 따른 접촉력이 비선형적인 것을 알 수 있다. 이것은 접촉힘이 Kelvin-Voigt 모델과는 달리 접촉력이 거리에 따른 선형적인 함수가 아니라 비선형적인 함수이기 때문이다. 또한 반발 계수에 의한 에너지 감쇠 역시 거리의 함수로 계산되어진다.

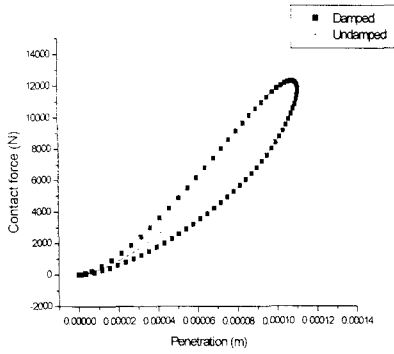


Fig. 2 Contact force vs penetration

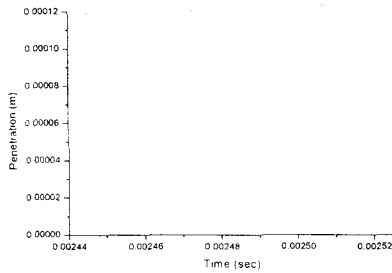


Fig. 3 Penetration vs time

Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델에서 접촉력을 구하는 식은 다음과 같다.

$$F = K\delta^n + c\dot{\delta} \quad (2)$$

여기서 $n=3/2$ 이고, K 는 물성치와 구의 반지름에 관련된 변수이며 다음과 같다.

$$K = \frac{4}{3\pi(h_i + h_j)} \left[\frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^2 \quad (3)$$

여기서 R_i 와 R_j 는 구의 반지름이고, h_i 와 h_j 는 재료의 물성치를 나타내는데 다음과 같다.

$$h_l = \frac{1 - \nu_l^2}{\pi E_l} : l = i, j \quad (4)$$

여기서 ν_l 과 E_l 은 각각 프와송 비와 영 계수를 나타낸다.

또한 D 는 댐핑 계수를 말하며 다음과 같다.

$$D = \mu\delta^n \quad (5)$$

여기서 μ 는 이력 댐핑요소(hysteresis damping factor)이며 다음과 같이 나타낸다.

$$\mu = \frac{3K(1-e^2)}{4\delta^{(-)}} \quad (6)$$

여기서 $\delta^{(-)}$ 는 초기 침투 속도를 의미한다. 이상과 같이 식 (3)에서 식 (6)까지를 조합하면 Hertz 탄성이론을 기반으로 하는 모델의 접촉력은 다음과 같이 나타난다.

$$F = K\delta^n \left[1 + \frac{3(1-e^2)}{4} \frac{\dot{\delta}}{\delta^{(-)}} \right] \quad (7)$$

3. 수치 예제

3.1 자유 낙하 예제

Fig. 4는 기울어진 지면과 충돌하는 공을 보여 준다. 2장에서 언급한 연속 접촉 해석법을 이용하여 접촉력을 계산하고 있다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이 지면 아래쪽으로 작용을 하고 중력 가속도는 9.8066 m/sec^2 의 크기를 갖는다. 해석에 사용된 공과 지면의 물성치는 Table 1에 나타내었다. 공의 초기 위치좌표는 (2.0,2.0)이다. 공의 형상 데이터는 초기의 공의 위치와 반경을 가지고 180개의 점들의 x, y 좌표로 나타내었다. 해석 시간의 효율을 위해 매 시간마다 최단거리를 계산해서 그 거리가 길면 적분 간격도 길게, 그 거리가 짧아지면 그에 맞게 적분 간격도 짧아지는 형태로 적분 간격을 조정하였다.

Fig. 5, Fig. 6은 각각 접촉력과 공의 중심의 위치를 y축 상에서 본 그래프를 나타내었다. DADS의 해석 결과와 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다.

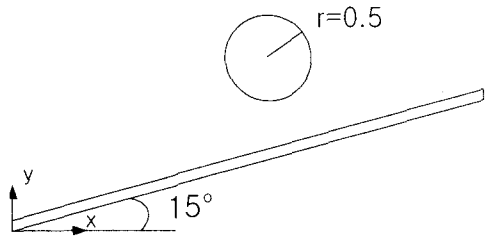


Fig. 4 Ball colliding with declined ground

Table 1 Properties of ball and ground

Stiffness	Damping	Radius	Depth
10000 N/m	10 N · s/m	0.5 m	0.1 m

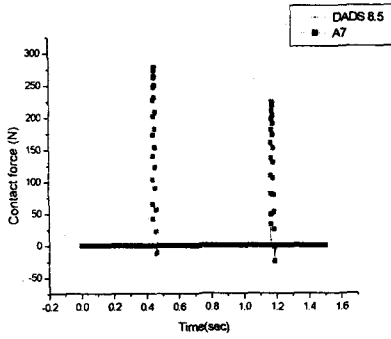


Fig. 5 Contact force

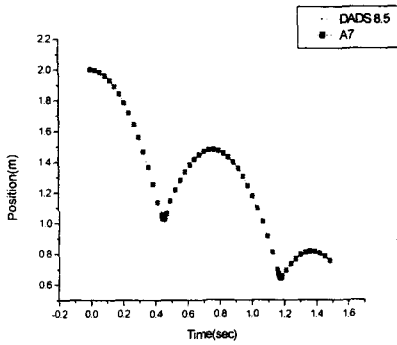


Fig. 6 Displacement of ball on y-coordinate

3.2 두 개의 단진자

Fig. 7은 두 개의 단진자로 구성된 계를 보여준다. 하나의 단진자는 반경이 0.5m인 원형의 외형을 갖는 진자이고 다른 하나는 장축의 길이가 1.4142m이고 단축의 길이가 0.5m인 타원형의 외형을 갖는 진자이다. 각각 180개의 점 데이터를 가지고 각 물체의 외형을 나타내었다. 계에 작용하는 외력은 중력이고, 중력 가속도는 9.8066 m/sec^2 의 크기를 갖는다. 초기에 타원형의 단진자가 45° 각도로 기울어져 있다가 중력에 의해 이 진자가 단진자 운동을 하게되고 이 운동에 의해 두 진자가 충돌을 하게된다. 충돌하는 두 물체의 물성치는 Table 3에 나타내었다.

Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11은 각각 타원 형태의 진자와 원형 형태의 진자의 x축 방향의 위치와 속도를 나타낸 그래프이다. 이 결과 그래프 역시 DADS와 같은 결과를 나타내고 있다.

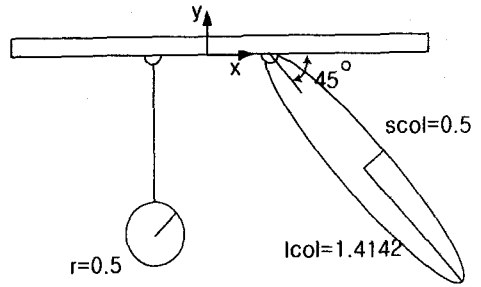


Fig. 7 Ball and ellipse pendulum

Table 2 Properties of pendulums

Young's modulus	Poisson's ratio	Restititional coefficient	Radius
210 GPa	0.33	0.7	0.0085 m

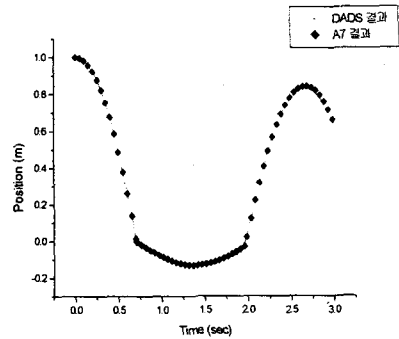


Fig 8. Displacement of ellipse pendulum on x-coordinate

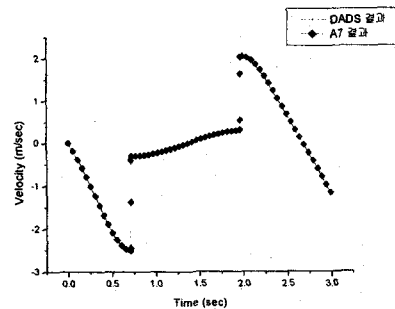


Fig 9. Velocity of ellipse pendulum on x-coordinate

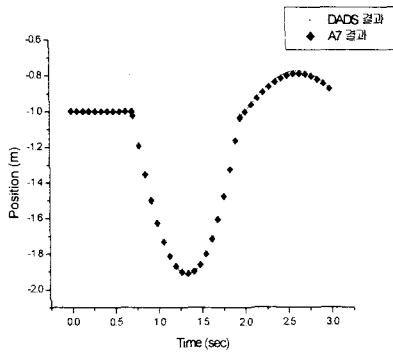


Fig 10. Displacement of ball pendulum on x-coordinate

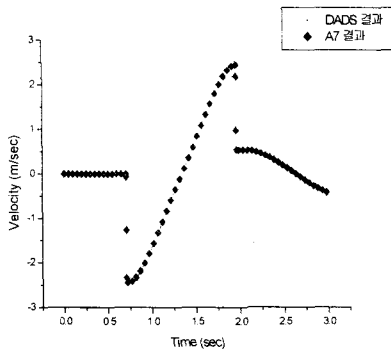


Fig 11. Velocity of ball pendulum on x-coordinate

3.3 미끄럼 예제

Fig. 12은 기울어진 면을 공이 미끄러져 내려오는 모습을 보여주고 있다. 이 예제는 마찰을 고려하지 않은 완전 미끄럼 현상(full slip)이라는 가정하에서의 예제이다. 면은 x축과 45° 각도를 가지고 기울어져 있다. 공의 외형은 180개의 점으로 이루어져 있으며 계에 작용하는 외력은 중력이고, 중력 가속도는 9.8066 m/sec^2 의 크기를 갖는다. 충돌하는 두 물체의 물성치는 Table 4에 나타내었다.

Fig. 13, Fig. 14, Fig. 15은 각각 슬라이더와 블록의 x축 방향의 위치와 속도를 나타낸 그래프이다. 이 결과 그래프 역시 DADS와 같은 결과를 나타내고 있다.

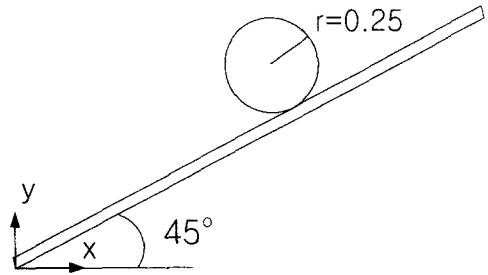


Fig. 12 Ball and declined surface contact

Table 3 Properties of ball and ground

Stiffness	Damping	Radius	Depth
10000 N/m	10 N · s/m	0.25 m	0.1 m

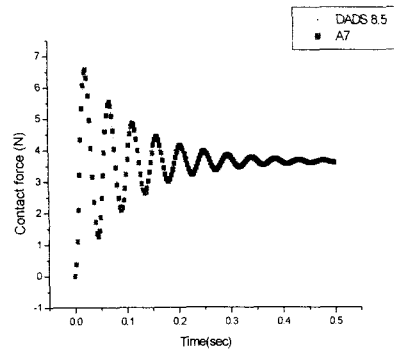


Fig. 13 Contact force

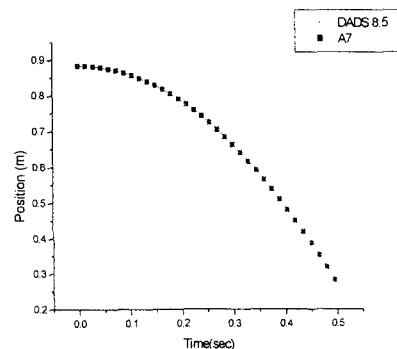


Fig. 14 Displacement of ball on y-coordinate

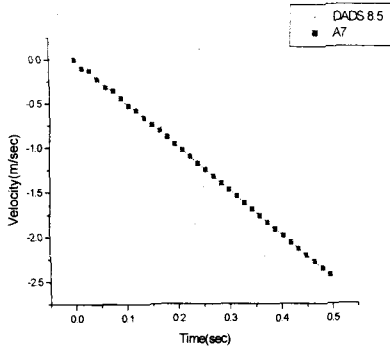


Fig. 15 Velocity of ball on y-coordinate

4. 결론 및 향후 계획

본 연구에서는 평면에서 외형의 데이터를 갖는 두 물체의 충돌을 해석하였다. 짧은 순간에 발생하는 접촉인 충돌해석과 지속적인 접촉 상태를 유지하는 마찰을 고려하지 않은 미끄럼 접촉해석을 수행했으며, 동역학 상용 프로그램인 DADS와 그 결과를 비교·검증하여 신뢰성을 추구하고 있다. 본 논문에서 수행한 수치 예제에서는 DADS와의 비교를 위해 한 물체의 외형이 원형인 경우에 대한 것만을 수행했지만, 두 결과의 일치성을 통해 두 물체 모두가 임의의 형상을 갖는 물체들의 접촉 또한 그 결과의 신뢰성을 예측할 수 있었다. 예상된 두 접촉점들의 거리를 가지고 적분 간격을 조정하여 해석 시간을 단축하였으며, 충돌 시간과 충돌 지점을 계산할 수 있었다. 향후 마찰을 고려한 구름접촉과 3차원으로 확장된 임의 형상을 갖는 물체의 접촉을 해석할 예정이다.

참고문헌

- (1) Greenwood D.T., Principles of Dynamics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- (2) Meirovitch, L., Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, 1970.
- (3) Kane, T. R., Dynamics, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1968.
- (4) Wehage, R. A., "Generalized Coordinate Partitioning in Dynamic Analysis of Mechanical

- Systems," Ph.D. dissertation, University of Iowa, 1980.
- (5) Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., "Dynamic Analysis of Constrained System of Rigid and Flexible Bodies with Intermittent Motion," ASME JOURNAL OF MECHANISMS, TRANSMISSIONS, AND AUTOMATION IN DESIGN, Paper NO. 84-DET-116, 1984
- (6) Goldsmith, W., Impact, the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids, Edward Arnold Ltd., 1960
- (7) Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., "A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody System," Mechanism and Machine Theory, Vol. 22, NO. 3, pp. 213-224, 1987
- (8) Hunt, K. H. and Grossley, F. R. E., "Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact," ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 440-445, 1975
- (9) DADS User's Manual, CADSI, Oakdale, Iowa, U.S.A.
- (10) Lankarani, H. M. and Nikravesh, P. E., "A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 112, pp. 369-376, 1990
- (11) Nikravesh, P. E. and Pourboghra, R., "Planar Contact Between Rigid Bodies," University of Iowa, Technical Report, No. 83-8, 1983