대한기계학회 2001년도 추계학술대회논문집 A pp. 341~348 KSME 01F056

혼합 수치해석 방법을 이용한 무한고체의 탄성해석

이정기* · 허강일**

Elastic Analysis of Unbounded Solids Using a Mixed Numerical Method

Jung-Ki Lee and Kang-Il Heo

Key Words: Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method(혼합 체적-경계 적분방정식법), Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Boundary Integral Equation Method(경계요소법), Inclusions(함유체), Voids(공동)

Abstract

A Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method is applied for the effective analysis of plane elastostatic problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions and voids or isotropic inclusions. It should be noted that this newly developed numerical method does not require the Green's function for anisotropic inclusions to solve this class of problems since only Green's function for the unbounded isotropic matrix is involved in their formulation for the analysis. This new method can also be applied to general two-dimensional elastodynamic and elastostatic problems with arbitrary shapes and number of anisotropic inclusions and voids or isotropic inclusions. Through the analysis of plane elastostatic problems in unbounded isotropic matrix with orthotropic inclusions and voids or isotropic inclusions, it will be established that this new method is very accurate and effective for solving plane elastic problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions and voids or isotropic inclusions.

1. 서론

본 논문에서는 서로 상호작용을 하는 다수의 이방성 함유체[1, 3, 9] 및 공동을 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변형, 변형률 및 응력분포 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 혼합 체적-경계 적분방정식법(Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 소개하고, 이 새로운 수치해석 방법을 적용하여 구한 해의 정확성 및 효율성을 검증한다.

* 정회원, 홍익대학교 기계정보공학과
** 홍익대학교 대학원 기계설계학과

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1(a)는 x축에 평행하게 전파하는 평면 시간-조화 탄성파가 입사할 때 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체에 의하여 산란현상이 발생하는 일반적인 탄성동역학 문제를 나타낸다. Fig. 1(b)는 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 1(a)에서, 기지는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $\rho^{(1)}$과 $c_{ijkl}^{(1)}$은 함유체의 밀도와 탄성상수를

나타내고, $\rho^{(2)}$와 $c^{(2)}_{ijkl}$는 기지의 밀도와 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다. $e^{-i\omega t}u^o_m(\mathbf{x},\omega)$를 입사파의 변위 벡터의 m성분이라고 하고, 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터의 m성분을 $e^{-i\omega t}u_m(\mathbf{x},\omega)$라고 한다. 여기서 ω는 파형의 각 주파수(angular frequency)를 나타내고, 공통적인 시간인자 $e^{-i\omega t}$의 표시는 생략하기로 한다. Mal과 Knopoff[8]는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$가

$$u_m(\boldsymbol{x}) = u^o_m(\boldsymbol{x}) + \int_V [\delta\rho\omega^2 g^m_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi}) - \delta c_{ijkl} g^m_{i,j}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})]d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$이고 $\delta c_{ijkl} = c^{(1)}_{ijkl} - c^{(2)}_{ijkl}$이며 각각 함유체와 기지 사이의 밀도와 탄성상수의 차이를 나타낸다. $g^m_i(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x})e^{-i\omega t}$은 등방성 무한기지에서의 Green 함수이다. 즉, $g^m_i(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x})e^{-i\omega t}$은 등방성 무한기지의 $\boldsymbol{x}$에서 m방향으로 작용하는 단위 집중하중 $\mathbf{e}_m e^{-i\omega t}$ 때문에 $\boldsymbol{\xi}$에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 $\boldsymbol{\xi}_i$에 관해서 행해진다. 여기서, $\delta\rho$와 δc_{ijkl}가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.

만약 $\boldsymbol{x}$가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$에 관한 적분-미분 방정식 (integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$를 수치해석 방법

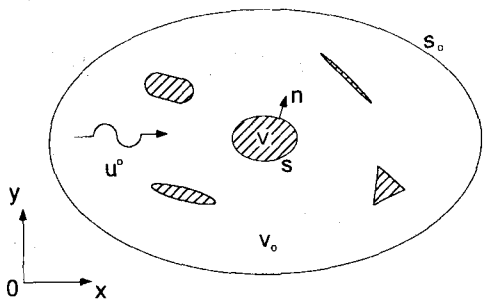


Fig. 1(a) Geometry of the general elastodynamic problem.

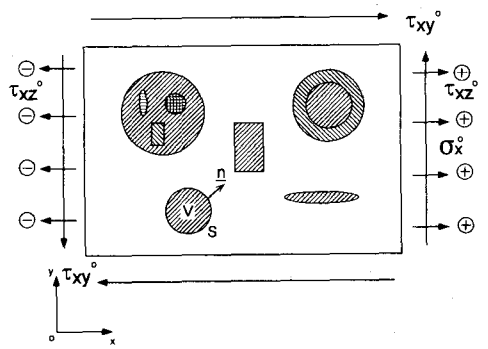


Fig. 1(b) Geometry of the general elastostatic problem.

으로 결정하는 체적 적분방정식법이 이 정기와 Mal[4, 5]에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 산란파의 변위 및 응력은 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움없이 계산할 수 있다.

Fig. 1(b)에 있는 탄성정역학 문제해석의 경우는 파형의 주파수가 0인 극한 경우의 탄성동역학 문제로 수식화할 수 있으며, 함유체를 포함하는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위벡터 $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$가 다음의 방정식을 만족함을 알 수 있다.[4, 5]

$$u_m(\boldsymbol{x}) = u^o_m(\boldsymbol{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g^m_{i,j}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \quad (2)$$

식 (2)에서, $\delta c_{ijkl} = c^{(1)}_{ijkl} - c^{(2)}_{ijkl}$이며, 함유체와

기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $g_i^m(\xi, x)$은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수(또는 Kelvin의 해)이다.

등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 이 정기와 Mal[4, 5]에 잘 나타나 있다.

일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다.[7] 식 (1), (2)에서 g_i^m은 등방성 무한기지에서의 탄성동역학 및 탄성정역학 Green 함수이므로, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

3. 혼합 체적-경계 적분방정식법

3.1 등방성 기지에 직교 이방성 함유체와 공동이 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

Fig. 2에 있는 직교 이방성 함유체(orthotropic #1)와 공동(hole)이 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를 고찰해 본다. 이 경우는 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 공동에 대하여는 경계요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다. 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 공동에 경계요소법을 적용하면 분할요소의 수를 줄일 수 있으며, 또한, 공동의 경계면에서 표면력 벡터가 0이 된다는 사실을 이용할 수 있기 때문이다.

식 (1)을 응용하면, 직교 이방성 함유체와 공동을 포함하는 무한고체에 대하여 혼합 체적-경계 적분방정식을

$$u_m(x) = u_m^0(x) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{k,l}^{m(2)}(\xi, x) u_{i,j}(\xi) d\xi + \int_S c_{ijkl}^{(2)} g_{k,l}^{m(2)} u_i n_j dS \quad (3)$$

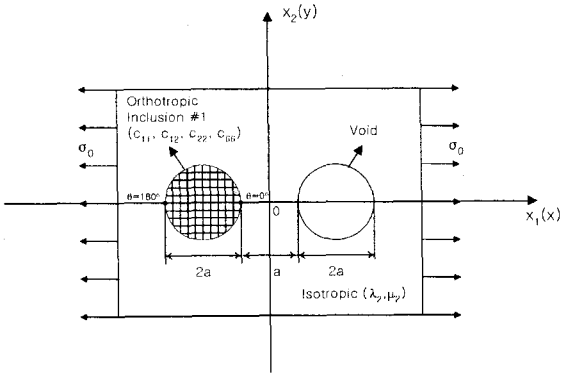


Fig. 2 An orthotropic cylindrical inclusion and a cylindrical void in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

로 표시할 수 있다.[10] 여기서, $u_m(x)$는 고체의 임의의 위치에서의 변위성분을 나타내고, V는 직교 이방성 함유체의 체적을 나타내며 S는 공동의 경계면을 나타낸다. n은 S에서의 바깥쪽 법선방향의 단위 벡터이고, 윗첨자 (2)는 등방성 기지에 대한 양(quantity)을 나타낸다.

Fig. 3은 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 직교 이방성 함유체는 144개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 공동의 경계면은 80개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다.

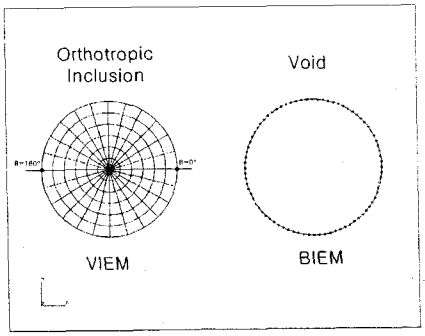


Fig. 3 A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method.

이때, 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)과 공동의 경계면의 절점(node)에서의 변위에 대한 선형 연립방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} [E]_{[(m+n)\times(m+n)]} & [F]_{[(m+n)\times(m+n)]} \\ [G]_{[(m+n)\times(m+n)]} & [H]_{[(m+n)\times(m+n)]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{u_1^0\}_{(m)} \\ -\{u_1^0\}_{(n)} \\ -\{u_2^0\}_{(m)} \\ -\{u_2^0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$[E]_{[(m+n)\times(m+n)]} = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m\times m)} & [VB]_{(m\times n)} \\ [BV]_{(n\times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n\times n)} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}1)$$

$$[F]_{[(m+n)\times(m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m\times m)} & [VB]_{(m\times n)} \\ [BV]_{(n\times m)} & [BB]_{(n\times n)} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}2)$$

$$[G]_{[(m+n)\times(m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m\times m)} & [VB]_{(m\times n)} \\ [BV]_{(n\times m)} & [BB]_{(n\times n)} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}3)$$

$$[H]_{[(m+n)\times(m+n)]} = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m\times m)} & [VB]_{(m\times n)} \\ [BV]_{(n\times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n\times n)} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}4)$$

을 나타내고, m은 직교 이방성 함유체에서의 절점수를, 그리고 n은 공동의 경계면(S)에서의 절점수를 나타내며, Fig. 3에 있는 모델에서 m = 433이고 n = 160이다. [VV]는 직교 이방성 함유체 내부에서의 상호작용(interaction)을, [VB]는 직교 이방성 함유체와 공동의 경계면과의 상호 작용을, [BV]는 공동의 경계면과 직교 이방성 함유체와의 상호작용을, 그리고 [BB]는 공동의 경계면에서의 상호 작용을 포함하는 행렬(matrix)들을 각각 나타낸다.

따라서, 식 (4)로부터 직교 이방성 함유체 내부에서의 변위 및 공동의 경계면에서의 변위를 구할 수 있고, 또한, 직교 이방성 함유체 내부에서의 변형률과 응력도 결정할 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변위 및 응력은 식 (3)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 이 수치해석 방법의 정확도를 조사하기 위하여, 직교 이방성 함유체 및 공동 모두에 체적 적분방정식법을 사용한 해를 구하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해와 비교 검토해 보았다.

직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 직교 이방성 함유체 #1(orthotropic #1)의 c_{11}이 등방성 기지의 c_{11}보다 크다.[2] Fig. 4는 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다.

Fig. 5는 혼합 체적-경계 적분방정식법과 체적 적분방정식법을 사용했을 때, 직교 이방성 함유체(orthotropic #1)와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분 ($\frac{\sigma_x}{\sigma_x^0}$)에 대한 비교를 나타낸다 ($\theta = 0° \sim 180°$). 두 가지 수치해석 방법들의 해가 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the orthotropic inclusions for the elastostatic problems.

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Isotropic	Orthotropic #1
λ	67.34	176.06	—
μ	37.88	176.06	—
c_{11}	143.10	528.18	279.08
c_{12}	67.34	176.06	7.80
c_{22}	143.10	528.18	30.56
c_{66}	37.88	176.06	11.80

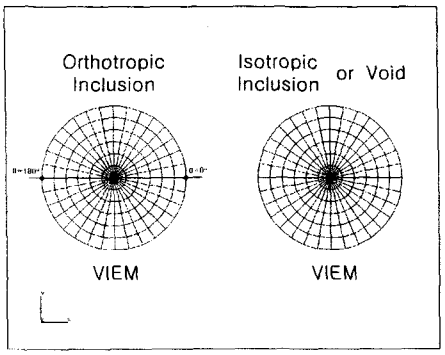


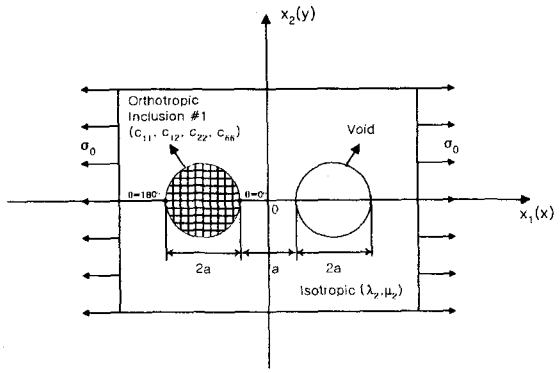
Fig. 4 A typical discretized model in the volume integral equation method.

3.2 등방성 기지에 직교 이방성 함유체와 등방성 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

Fig. 6에 있는 직교 이방성 함유체(Orthotropic #1)와 등방성 함유체($\lambda = \mu = 176.06$ GPa)가 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를 고찰해 본다.(*Table 1*) 이 경우는 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 등방성 함유체에 대하여는 경계요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다. 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 등방성 함유체에 경계요소법을 적용하면 분할요소의 수를 줄일 수 있기 때문이다.

직교 이방성 함유체와 등방성 함유체의 바깥면에 (S_+)에서의 혼합 체적-경계 적분방정식은

$$u_m(\boldsymbol{x}) = u_m^0 - \int_V [\delta c_{ijkl}\, g_{k,l}^m(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})\, u_{i,j}(\boldsymbol{\xi})]\, d\xi + c_{ijkl} \int_{S_+} [g_{k,l}^m\, u_i(\boldsymbol{\xi}) - g_i^m\, u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})]\, n_j\, dS \quad (5)$$



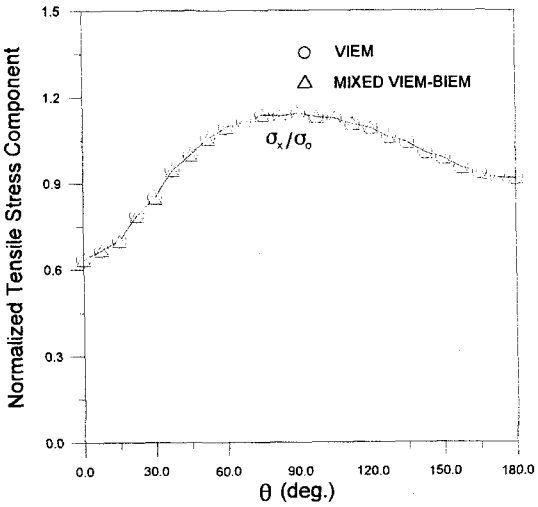


Fig. 5 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_x^0) at the interface between the orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

로 표시되며, 반면에 등방성 함유체 안쪽면 (S_-)에서는

$$u_m(\boldsymbol{x}) = -c_{ijkl} \int_{S_-} [g_{k,l}^m\, u_i(\boldsymbol{\xi}) - g_i^m\, u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})]\, n_j\, dS \quad (6)$$

로 표시된다.

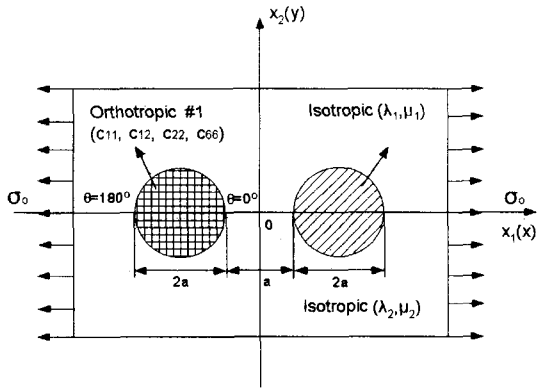


Fig. 6 An orthotropic cylindrical inclusion and an isotropic cylindrical inclusion in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

Fig. 3은 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 직교 이방성 함유체는 144개의 표준의 8-node 사각형 및 6-node 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 등방성 함유체의 경계면은 80개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다. 등방성 함유체의 경계면에서 연속성 조건을 적용하고, 분할하게 되면, 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)에서의 변위와 등방성 함유체의 경계면의 절점(node)에서의 변위와 표면력 벡터에 대한 선형 연립방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} [E] & [F] \\ [G] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{T_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \\ \{T_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{u_1^o\}_{(m)} \\ -\{u_1^o\}_{(n)} \\ \{0\}_{(n)} \\ -\{u_2^o\}_{(m)} \\ -\{u_2^o\}_{(n)} \\ \{0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

여기서,

$$[E]_{[(m+2n)\times(m+2n)]} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}1)$$

이때,

$$E_{11} = [[VV]-[I]]_{(m\times m)}$$
$$E_{12} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$E_{13} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$E_{21} = [BV_{[M]}]_{(n\times m)}$$
$$E_{22} = [[BB_{[M]}]-\frac{1}{2}[I]]_{(n\times n)}$$
$$E_{23} = [BB_{[M]}]_{(n\times n)}$$
$$E_{31} = [0]_{(n\times m)}$$
$$E_{32} = [[BB_{[I]}]-\frac{1}{2}[I]]_{(n\times n)}$$
$$E_{33} = [BB_{[I]}]_{(n\times n)}$$

$$[F]_{[(m+2n)\times(m+2n)]} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}2)$$

이때,

$$F_{11} = [VV]_{(m\times m)}$$
$$F_{12} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$F_{13} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$F_{21} = [BV_{[M]}]_{(n\times m)}$$
$$F_{22} = [BB_{[M]}]_{(n\times n)}$$
$$F_{23} = [BB_{[M]}]_{(n\times n)}$$
$$F_{31} = [0]_{(n\times m)}$$
$$F_{32} = [BB_{[I]}]_{(n\times n)}$$
$$F_{33} = [BB_{[I]}]_{(n\times n)}$$

$$[G]_{[(m+2n)\times(m+2n)]} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}3)$$

이때,

$$G_{11} = [VV]_{(m\times m)}$$
$$G_{12} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$G_{13} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$G_{21} = [BV_{[M]}]_{(n\times m)}$$
$$G_{22} = [BB_{[M]}]_{(n\times n)}$$
$$G_{23} = [BB_{[M]}]_{(n\times n)}$$
$$G_{31} = [0]_{(n\times m)}$$
$$G_{32} = [BB_{[I]}]_{(n\times n)}$$
$$G_{33} = [BB_{[I]}]_{(n\times n)}$$

$$[H]_{[(m+2n)\times(m+2n)]} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (7\text{-}4)$$

이때,

$$H_{11} = [[VV]-[I]]_{(m\times m)}$$
$$H_{12} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$H_{13} = [VB_{[M]}]_{(m\times n)}$$
$$H_{21} = [BV_{[M]}]_{(n\times m)}$$
$$H_{22} = [[BB_{[M]}]-\frac{1}{2}[I]]_{(n\times n)}$$
$$H_{23} = [BB_{[M]}]_{(n\times n)}$$
$$H_{31} = [0]_{(n\times m)}$$
$$H_{32} = [[BB_{[I]}]-\frac{1}{2}[I]]_{(n\times n)}$$
$$H_{33} = [BB_{[I]}]_{(n\times n)}$$

으로 나타난다. 여기서, $[m+2n]$ = 직교 이방성 함유체의 절점(node) 수 $[m]$ + 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)에서의 절점수 $[n]$ + 등방성 함유체의 안쪽 경계면 (S_-)에서의 절점수 $[n]$를 나타낸다. $[VV]$는 직교 이방성 함유체 내부에서의 상호작용(interaction)을, $[VB_{[M]}]$는 직교 이방성 함유체와 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)과의 상호 작용을, $[BV_{[M]}]$는 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)과 직교 이방성 함유체와의 상호작용을, 그리고 $[BB_{[M]}]$은 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)에서의 상호 작용을, $[BB_{[I]}]$는 등방성 함유체의 안쪽 경계면 (S_-)에서의 상호 작용을 포함하는 행렬(matrix)들을 나타낸다.

따라서, 식 (7)로부터 직교 이방성 함유체 내부에서의 변위 및 등방성 함유체 경계면에서의 변위와 표면력 벡터 (traction vector)를 구할 수 있고, 또한, 직교 이방성 함유체 내부에서의 변형률과 응력도 결정될 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변형, 변형률 및 응력은 식 (5), (6)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 이 수치해석 방법의 정확도를 조사하기 위하여, 직교 이방성 함유체 및 등방성 함유체 모두에 체적 적분방정식법을 사용한 해를 구하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법을 사용하여 구한 해와 비교 검토해 보았다.

Fig. 4는 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. Fig. 7은 혼합 체적-경계 적분방정식법과 체적 적분방정식법을 사용했을 때, 직교 이방성 함유체(Orthotropic #1)와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분 $(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$에 대한 비교를 나타낸다 $(\theta = 0^\circ \sim 180^\circ)$. 두 가지 수치해석 방법들의 해가 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

4. 결 론

등방성 무한기지에 직교 이방성 함유체 및 공동 또는 등방성 함유체등이 포함된 무한고체가 무한하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변위 및 응력 분포를 해석하는 수치해석 방법으로 혼합 체적-경계 적분방정식법을 고찰해 보았으며, 이들 새로운 수치해석 방법을 사용하여 정확한 해를 구할 수 있었다.

체적-경계 적분방정식법에 의한 탄성정역학 해석에는 함유체와 기지 사이의 밀도 및 탄성상수차와 등방성 무한기지에서의 Green 함수만이 필요하다는 장점이 있었다. 그러나, 경계요소법을 적용한 해석에는 등방성 기지에서의 Green 함수와 직교 이방성 함유체에서의 Green 함수 모두가 필요하다는 단점이 있었다. 그러므로, 등방성 무한기지에 다수의 일반적인 이방성 함유체 및 공동 또는 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 탄성정역학 문제해석에는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는 체적-경계 적분방정식법이 매우 효과적인 수치해석 방법임을 알 수 있었다.

따라서, 혼합 체적-경계 적분방정식법을 적용하면 등방성 기지에 강한 이방성 재료로 이루어진 함유체 및 공동이 포함되어 있는 금속기지 복합재료[6]에서의 파손 메카니즘을 규명하는 기술을 향상시킬 수 있을 것으로 판단된다.

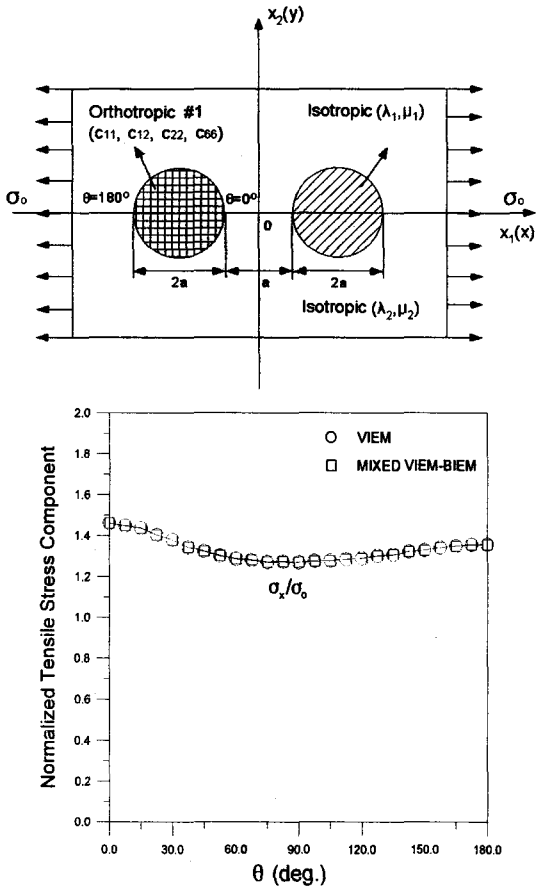


Fig. 7 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_x^o) at the interface between the orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (2001-1-30400-012-2) 지원으로 수행되었으며, 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

(1) Banerjee, P. K., 1993, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England.

(2) Davì, G. and Milazzo, A., 1996, "Stress Fields in Composite Cross-Ply Laminates," *Eleventh International Conference on Boundary Element Technology, BETECH 96*, Ertekin, R. C., Brebbia, C. A., Tanaka, M. and Shaw, R., Eds., Computational Mechanics Publications, pp. 175～184.

(3) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993 (Sep.), "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626～632.

(4) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135～159.

(5) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997 (Mar.), "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23～31.

(6) Lee, J. K. and Mal, A., 1998, "Characterization of matrix damage in metal matrix composites under transverse loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339～346.

(7) Lee, K. J. and Mal, A. K., 1990, "A boundary element method for plane anisotropic elastic media," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 600～606.

(8) Mal, A. K. and Knopoff, L., 1967, "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems," *J. Inst. Math. Applics.*, Vol. 3, pp. 376～387.

(9) Yang, H. C. and Chou, Y. T., 1976 (Sep.), "Generalized Plane Problems of Elastic Inclusions in Anisotropic Solids[1]," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 424～430.

(10) 이정기, 최성준, 라원석, 1997, "직교 이방성 함유체가 포함된 2차원 무한 고체의 탄성 해석에 관한 연구," 대한기계학회 추계학술대회논문집 A, KSME 97F072, pp. 420～425.