

# 강체요소를 이용한 인발 공정의 상계요소 해석

최일국\* · 최영\*\* · 허관도\*\*\*

## An Analysis for Drawing of Strip by UBET with Rigid Elements

Ilkuk Choi\*, Young Choi\*\* and Kwando Hur\*\*\*

**Key Words:** Kinematically Admissible Velocity Field(동적가용 속도장), Plane Strain Deformation(평면변형), Rigid Element(강체요소), Stresses on Tools(공구에 작용하는 압력), UBET(상계요소법), Upper-Bound Method(상계법)

### Abstract

For metal forming analysis, upper-bound solution is practical method because the solution is overestimated. It is limited to determine stresses on tools by using upper-bound solution. In this study, new scheme to calculate stresses on tools based on upper bound solution is proposed. To verify the proposed scheme, plane strain drawing has been considered. The stresses on tools obtained by the proposed scheme are compared with results of rigid plastic FEM. And the stresses on tools have been determined by the proposed scheme in the forging within plane strain deformation.

#### 기호설명

- $\alpha$  : 다이 반각
- $J^*$  : 총 에너지 소비율
- $k$  : 순수 전단응력
- $p_n$  : 공구에 작용하는 수직응력
- $s_i$  : 삼각형 강체요소의 경계면 길이
- $t_e$  : 소재의 출구쪽 두께
- $t_i$  : 소재의 입구쪽 두께
- $w$  : 다이 폭

### 1. 서 론

상계해(upper-bound solution)를 이용한 다양한 성형공정의 해석이 널리 수행되어 왔다.<sup>(1)</sup> 상계법은 소재의 성형에 필요한 공구 하중의 상계해를 구할 수 있어 실용적으로 유용한 해석법이다.

그러나 상계해를 이용하여 금형설계(die design)에 필요한 공구에 작용하는 압력(stresses on tools)을 예측하는 것에 어려움이 있다. M. Kiuchi<sup>(2)</sup> 등은 상계요소법(UBET)을 이용한 후방압출 공정의 해석에서 가상요소(imaginary element)를 도입하여 근사적인 방법으로 금형에 작용하는 압력을 계산했다.

본 연구에서는 상계해를 이용하여 공구에 작용하는 압력을 계산하는 새로운 방법을 제안하고자 한다. 제안한 방법의 타당성을 평가하기 위하여 간단한 평면변형 인발(plane strain deformation drawing)에 제안한 방법을 적용하였다. 이 때, 상계해는 강체 삼각형 요소(rigid triangle elements)로 이루어진 속도장을 이용했으며, 금형에 작용하는 응력을 계산했다. 또한 제안한 방법의 적용성을 보이기 위해 단조공정을 상계해석하여 금형에 작용하는 압력을 계산했다.

### 2. 금형에 작용하는 수직압력의 상계해

Fig. 1에 금속성형 공정의 한 예로서 평면변형 압출을 도시하였다.<sup>(3)</sup> 이러한 성형공정에 대한 동적가용 속도장(kinematically admissible velocity

\* 동의대학교 일반대학원 기계공학과  
 \*\* 인제대학교 기계자동차공학부  
 \*\*\* 동의대학교 기계산업시스템공학부

fields)이 주어진다면, 상계법을 이용하여 펀치에 의해 제공되는 총 에너지 소비율의 상계해를 계산할 수 있다. 동적가용 속도장은 상계요소법(UBET) 혹은 강체 삼각형 요소를 이용하여 쉽게 구성할 수 있다. 총 에너지 소비율의 상계해를 이용하여 펀치와 소재의 접촉면  $A_1$ 에 작용하는 평균압력  $P_{ave}$ 의 상계값을 얻을 수 있다. 계산된 펀치 평균압력은 펀치설계에 유용하게 이용되어질 수 있다. 압출 다이 설계에 유용한 금형과 소재의 접촉면  $A_2, A_3$ 에서 금형에 작용하는 압력 ( $P_{n2}, P_{n3}$ )을 결정하기 위해 상계해를 이용하는 일반적인 방법은 찾기 어렵다.

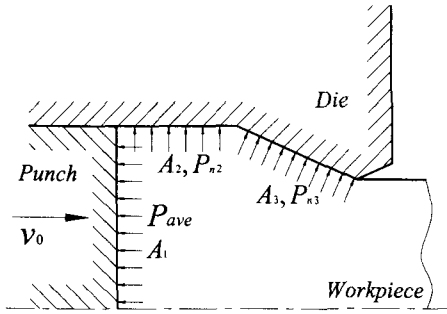


Fig. 1 Extrusion of plane strain

본 연구에서는 공구와 소재의 접촉면  $A_2$ 와  $A_3$ 의 금형에 작용하는 압력 ( $P_{n2}, P_{n3}$ )을 계산하는 새로운 방법을 제안하고자 한다.

소성변형에 필요한 총 에너지 소비율의 상계해는 다음 식으로 주어진다.

$$J^* = \sum \dot{W}_i + \sum \dot{W}_s + \sum \dot{W}_f \quad (1)$$

여기서  $\dot{W}_i$ 는 각 요소의 내부 변형에너지 소비율이다.

$$\dot{W}_i = \int_v \bar{\sigma}_0 \dot{\bar{\epsilon}} dV \quad (2)$$

$\dot{W}_s$ 는 요소 경계상의 전단에너지 소비율이다.

$$\dot{W}_s = k \int_S |\Delta V|_s dS \quad (3)$$

$\dot{W}_f$ 는 금형과 소재 사이의 접촉면에서 발생하는 마찰에너지 소비율이며 아래와 같다.

$$\dot{W}_f = mk \int_{S_f} |\Delta V|_f dS_f \quad (4)$$

식(1)~(4)에서,  $\bar{\sigma}_0$ 는 상당응력(equivalent stress)이며,  $\dot{\bar{\epsilon}}$ 는 상당변형률속도(equivalent strain rate)이다.  $|\Delta V|_s$ 는 요소 사이의 전단면에서의 속도 불연속량이며,  $|\Delta V|_f$ 는 소재와 다이 접촉면에서의 속도 불연속량이다. 또한,  $m$ 은 다이(또는 펀치)와 재료 사이의 마찰상수이며,  $k$ 는 전단항복응력(shear yield stress)이다.

소재와 금형의 접촉면에서 금형에 작용하는 압력  $P_n$ 은 아래와 같다.

$$P_n \cdot A = \left. \frac{\partial J^*}{\partial v_n} \right|_{v=v'} \quad (5)$$

이때  $v_n$ 은 소재와 금형의 접촉면  $A$ 에서 접촉면에 수직한 소재의 유동을 나타낸다.

일반적인 상계 해석에서 주어진 동적가용 속도장  $v^*$ 를 이용하여 식(1)을 계산하였다. 그러므로 식(5)를 평가하여 금형에 작용하는 압력을 계산하는데 제약이 있다.

본 연구에서는 금형에 작용하는 압력을 강체 삼각형 요소를 이용하여 계산하는 방법을 제안하고자 한다.

식(5)를 평가하기 위해서,  $J^*$ 를 일반적인 상계요소<sup>(4,5)</sup> 및 강체 삼각형 요소(rigid triangle elements)를 이용하여  $v_n$ 을 포함한 총 에너지 소비율  $J^*$ 를 구성한다. 이때, 식(3)의 전단에너지 소비율과 식(4)의 마찰에너지 소비율의 계산은 주어진 동적가용 속도장을 이용함으로써 양의 값으로 절대값 기호 없이  $v_n$ 에 대해 미분 가능한 형태로 표현되어진다.

구성된  $J^*$ 를 이용하여 식(5)를 계산함으로써 공구에 작용하는 수직 압력  $P_n$ 을 평가한다.

### 3. 강체 요소(rigid elements)를 사용한 인발 공정의 상계해

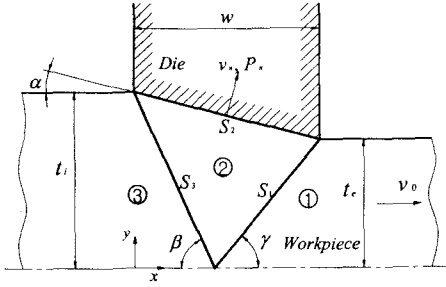


Fig. 2 Rigid elements in plane strain drawing

Fig. 2에 평면변형 인발 공정을 해석하기 위한 강체 삼각형을 이용한 속도장을 나타내었고, 각 영역의 속도성분은 Table 1에 제시하였다.

Table 1 Velocity components of the regions

Region	Velocity components
①	$v_{x1} = v_0$ $v_{y1} = 0$
②	$v_{x2} = \frac{v_0 \sin \gamma + v_n \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}}{\sin \gamma + \cos \gamma \tan \alpha}$ $v_{y2} = - \left( \frac{v_0 \sin \gamma + v_n \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}}{\sin \gamma + \cos \gamma \tan \alpha} \right) \tan \alpha + \frac{v_n}{\cos \alpha}$
③	$v_{x3} = \left( \frac{v_0 \sin \gamma + v_n \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}}{\sin \gamma + \cos \gamma \tan \alpha} \right) \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right) + \frac{v_n}{\cos \alpha \tan \beta}$ $v_{y3} = 0$

영역 ①, ②, ③ 모두 강체로 가정됨으로 식(1)의 내부에너지 소비율을 항은 제거된다.

전단에너지 소비율은  $S_1$ 과  $S_3$ 에서 계산되고

$$\dot{W}_s = k \int_{S_1} |\Delta V| dS_1 + k \int_{S_3} |\Delta V| dS_3 \quad (6)$$

마찰에너지 소비율은  $S_2$ 에서 계산된다.

$$\dot{W}_f = mk \int_{S_2} |\Delta V| dS_2 \quad (7)$$

식(6)과 식(7)에서  $v_n = 0$ 이므로 각 요소의 경계면에서 속도 불연속량은 다음과 같다.

$$|\Delta V|_{on S_1} = |v_{x1} \cos \gamma + v_{y1} \sin \gamma - v_{x2} \cos \gamma - v_{y2} \sin \gamma| \quad (8)$$

$$|\Delta V|_{on S_2} = |v_{x2} \cos \alpha - v_{y2} \sin \alpha| \quad (9)$$

$$|\Delta V|_{on S_3} = |v_{x2} \cos \beta - v_{y2} \sin \beta - v_{x3} \cos \beta + v_{y3} \sin \beta| \quad (10)$$

그러므로, 총 에너지 소비율은 식(8), (9), (10)을 식(6), (7)에 대입하여 아래와 같이 계산된다.

$$J^* = \dot{W}_s + \dot{W}_f \quad (11)$$

총 에너지 소비율( $J^*$ )이  $S_2$ 면에 수직인 속도  $v_n$ 에 대해 미분이 불가능하다.

$v_0 = 1, v_n = 0$ 일 때, 식(11)의 총 에너지 소비율( $J^*$ )이 최소가 되는  $\beta = \beta^*, \gamma = \gamma^*, S_1 = S_1^*, S_2 = S_2^*, S_3 = S_3^*$  및  $v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}, v_{y1}, v_{y2}, v_{y3}$ 를 구한다.

식(8), (9), (10)을 얻어진  $\beta^*, \gamma^*, v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}, v_{y1}, v_{y2}, v_{y3}$  및  $v_n = 0, v_0 = 1$ 의 값을 이용하여 미분가능한 함수로 표현한다. 즉, 얻어진 각도 및 속도성분에 대해 식(8), (9), (10)이 양의 값이 되도록하여 절대값 기호를 제거한다.

$$|\Delta V|_{on S_1} = v_{x1} \cos \gamma^* + v_{y1} \sin \gamma^* - v_{x2} \cos \gamma^* - v_{y2} \sin \gamma^* \quad (12)$$

$$|\Delta V|_{on S_2} = v_{x2} \cos \alpha - v_{y2} \sin \alpha \quad (13)$$

$$|\Delta V|_{on S_3} = v_{x2} \cos \beta^* - v_{y2} \sin \beta^* - v_{x3} \cos \beta^* + v_{y3} \sin \beta^* \quad (14)$$

총 에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 J^* &= \dot{W}_s + \dot{W}_f \quad (15) \\
 &= k[(v_{x1} \cos \gamma^* + v_{y1} \sin \gamma^* - v_{x2} \cos \gamma^* - v_{y2} \sin \gamma^*)S_1^* \\
 &\quad + (v_{x2} \cos \beta^* - v_{y2} \sin \beta^* - v_{x3} \cos \beta^* + v_{y3} \sin \beta^*)S_3^*] \\
 &\quad + mk(v_{x2} \cos \alpha - v_{y2} \sin \alpha)S_2^*
 \end{aligned}$$

금형에 접촉하는 면  $S_2$ 에 작용하는 수직 압력을 구하기 위해 식(5)에 식(15)를 대입하여 수직 속도  $v_n$ 에 대해 미분하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{1}{S_2^*} \cdot \frac{\partial J^*}{\partial v_n} \Bigg|_{v=v^*} \quad (16) \\
 &= \frac{1}{S_2^*} \cdot \frac{\partial J^*}{\partial v_n} \Bigg|_{v_n=0, v_o=1} \\
 &= \frac{1}{S_2^*} \cdot k \left[ \left( -\frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} \cos \gamma^* - \frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} \sin \gamma^* \right) S_1^* \right. \\
 &\quad + \left( \frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} \cos \beta^* - \frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} \sin \beta^* - \frac{\partial v_{x3}}{\partial v_n} \cos \beta^* \right) S_3^* \\
 &\quad \left. + m \left( \frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} \cos \alpha - \frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} \sin \alpha \right) S_2^* \right]
 \end{aligned}$$

각 영역의 속도를  $S_2$ 면에 수직인 속도 성분  $v_n$ 에 대해 편미분하면 Table 2와 같다.

**Table 2** The partial derivatives of velocities

Region	Partial derivatives
①	$\frac{\partial v_{x1}}{\partial v_n} = 0$ $\frac{\partial v_{y1}}{\partial v_n} = 0$
②	$\frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} = \frac{\cos \gamma^*}{\sin(\alpha + \gamma^*)}$ $\frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} = -\frac{\sin \gamma^*}{\sin(\alpha + \gamma^*)}$
③	$\frac{\partial v_{x3}}{\partial v_n} = \frac{\cos \gamma^*}{\sin(\alpha + \gamma^*)} \cdot \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta^*} \right)$ $+ \frac{1}{\cos \alpha \cdot \tan \beta^*}$ $\frac{\partial v_{y3}}{\partial v_n} = 0$

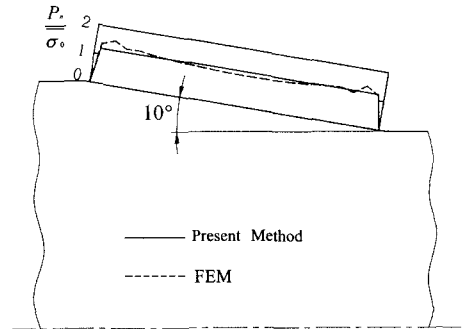
## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 강제요소를 사용한 인발 공정의 해석 결과

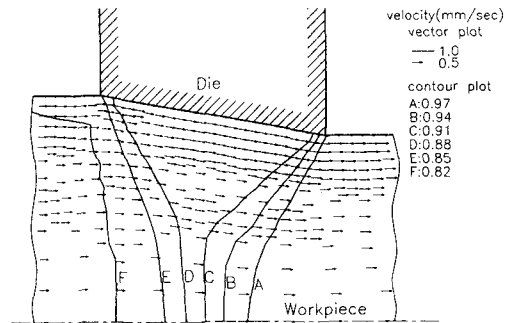
제안한 금형에 수직으로 작용하는 압력을 계산하는 식(15)에 의해 다이 반각에 따른 계산 결과는 다음과 같다. 이때 마찰상수  $m=0.1$ 로 하였으며, 초기두께  $t_i=1$ , 다이 폭( $w$ )은 일정하다. 강소성 유한요소해석 프로그램인 DEFORM-2D V7.0<sup>(6)</sup>를 이용하여 제안한 방법과 비교하였다.

#### 4.1.1 다이 반각 $\alpha=10^\circ$ 일 때

다이 반각이  $10^\circ$  일 때, 상계법을 이용하여 다이 접촉면압을 계산하고, 유한요소해석을 통해 얻은 결과를 가지고 접촉면에 작용하는 수직 압력 분포를 그래프로 나타내었다.



**Fig. 3** Comparison of normal pressure distribution on the surface between die and workpiece ;  $\alpha=10^\circ$ ,  $m=0.1$



**Fig. 4** Distribution of velocity ;  $\alpha=10^\circ$

Fig. 3에서 보는 바와 같이 유한요소 해석결과와 제안한 방법의 결과가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 4는 강소성 유한요소 해석결과로 변형시 속도 분포를 나타내었다. 해석결과 강제 삼각형으로 가정한 동적가용 속도장의 속도분포 형태가 잘 일치한다.

#### 4.1.2 다이 반각 $\alpha = 15^\circ$ 일 때

다이 반각이  $15^\circ$  일 때, 상계법을 이용하여 다이 접촉면압을 계산하고, 유한요소해석을 통해 얻은 결과를 가지고 접촉면에 작용하는 수직 압력 분포를 그래프로 나타내었다. Fig. 5에서도 유한요소 해석과 제안한 방법의 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있으며, 제안한 방법이 타당함을 알 수 있다.

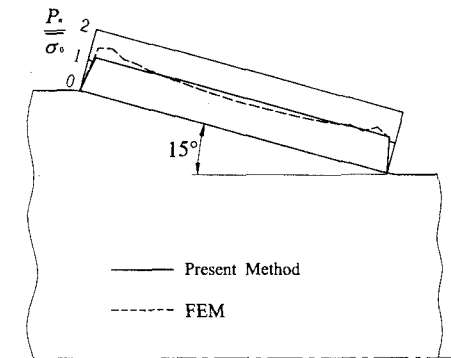


Fig. 5 Comparison of normal pressure distribution on the surface between die and workpiece ;  $\alpha = 15^\circ$  ,  $m = 0.1$

Fig. 3에서는 유한요소법보다 제안한 방법으로 얻어진 접촉압력이 약 0.9% 정도의 근소한 차이로 높고, Fig. 5에서는 제안한 방법으로 얻은 접촉압력이 약 2%정도 높았다.

또한 다이 반각만 변화할 때의 총 에너지를 최소화하는 강제 속도장의 각도 및 수직 압력을 Table 3에 나타내었다. 이 결과로 보아 다이 반각이 커짐에 따라 수직 압력은 감소하지만 총 에너지 소비율은 증가하는 일반적인 결과를 얻을 수 있었다.

따라서 제안한 방법의 타당성을 확인하였다.

Table 3 The results for the variation of semi-die angle ( $\alpha$ )

$\alpha$	$J^*$	$\beta^*(\text{rad})$	$\gamma^*(\text{rad})$	$P_n/\sigma_0$
$5^\circ$	0.173	1.1525	1.0240	1.313
$10^\circ$	0.271	1.1736	0.9569	1.210
$15^\circ$	0.353	1.1898	0.8847	1.102
$20^\circ$	0.418	1.1991	0.8061	0.990
$25^\circ$	0.464	1.1992	0.7185	0.872
$30^\circ$	0.488	1.1855	0.6181	0.746

#### 4.2 단조 공정의 상계해석

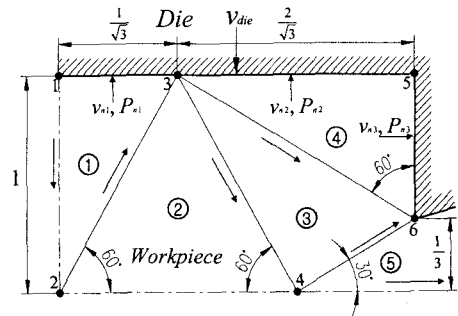


Fig. 6 Simple plane strain forging

Fig. 6은 제안한 방법을 간단한 평면변형 단조 공정<sup>(7)</sup>에 적용한 모델이다. 면12와 면24는 대칭면이다. 그러므로 단조시 면13으로 가압되며, 요소⑤를 통하여 소재가 바깥으로 유동한다.

금형에 작용하는 압력을 구하기 위해 앞서 제안한 방법을 이용하여 총 에너지 소비율을 구성한다. 요소 ①, ②, ③, ④ 및 ⑤ 모두 강체로 가정하므로 내부에너지 소비율은 없다. 요소 ①, ④가 데드메탈영역(dead metal zone)으로 금형에 의해 구속되어지기 때문에 금형과 소재의 접촉면에서 미끄럼 속도가 없다. 그러므로 마찰에 의한 에너지 소비율도 제거된다.

따라서 Fig. 6의 단조공정의 총 에너지 소비율은 전단면에서의 전단에너지 소비율의 합이다. 간단히, 호도그래프를 이용하여 Fig. 6에 보인 단

조공정의 속도장을 얻을 수 있다.

이때 영역 ①, ④의 속도 성분 중  $v_{n1}$ ,  $v_{n2}$ ,  $v_{n3}$ 는 금형과 소재가 접하는 면에 수직한 속도 성분이며, 이들 값을 미지수로 하여 각 요소의 속도성분을 표현한 후, 전단에너지 소비율을 표현하며, 이때 얻어진 속도장을 이용 절대값 기호를 제거한다.

그러므로 구성된 총 에너지 소비율은 수직 속도 성분  $v_{n1}$ ,  $v_{n2}$ ,  $v_{n3}$ 에 대해 미분 가능한 식으로 표현된다.

식(5)를 이용하여 각각의 수직속도 성분  $v_{n1}$ ,  $v_{n2}$ ,  $v_{n3}$ 에 대해 편미분하여 금형과 소재의 접촉면에 작용하는 수직 압력  $P_{n1}$ ,  $P_{n2}$ ,  $P_{n3}$ 을 계산하였다.

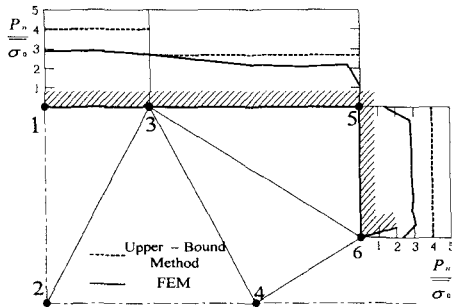


Fig. 7 Comparison stresses on tools

Fig. 7은 제안한 방법으로 구한 금형에 작용하는 압력의 상계해석 결과와 유한요소 해석 결과를 비교를 나타내었다.

제안한 방법을 적용하여 금형과 소재의 접촉면 13, 35, 56에 작용하는 압력을 성공적으로 계산했다. 일반적인 상계해석에서 얻어지는 면13에 작용하는 평균압력을 면35에 작용하는 분포압력으로 계산하였다. 제안한 방법으로 상계해석을 위해 분할된 각 요소에 대해 공구에 작용하는 압력을 계산할 수 있음을 보였다. 또한 일반적인 상계해석에서 얻기 어려운 금형과 소재의 접촉면 56에서의 금형에 작용하는 압력을 구했다. 그 결과 또한 잘 일치함을 보여준다.

따라서 제안한 방법이 인발공정 뿐만 아니라 단조공정에서도 성공적으로 적용되었으며, 그 결과가 잘 일치하므로 그 타당성을 확인하였다.

## 5. 결론

본 연구에서는 상계해를 이용하여 공구에 작용하는 압력을 계산하는 새로운 방법을 제안하였고, 제안한 방법의 타당성을 평가하기 위하여 간단한 평면변형 인발에 제안한 방법을 적용하였다. 이 때, 상계해는 강체 삼각형 요소(rigid triangle elements)로 이루어진 속도장을 이용했으며, 제안한 방법의 적용성을 보이기 위해 단조공정을 또한 상계해석 하였다. 그 결과들은 다음과 같다.

인발 공정대해 제안한 방법으로 얻어진 소재와 금형 접촉면에서의 접촉압력은 유한요소 해석 결과와 잘 일치하였다.

그리고 단조 공정에서도 제안한 방법을 적용하여 금형에 작용하는 압력을 성공적으로 계산하였다. 금형 운동방향과 수직한 접촉면에 대해 접촉압력의 분포 값을 얻었으며 금형 운동방향과 평행한 접촉면에서의 금형에 작용하는 압력을 계산하였다. 계산되어진 값은 유한요소 해석 결과와도 잘 일치하였다. 두 가지 예를 통하여 제안한 방법의 타당성을 확인했다.

향후, 일반적인 UBET 속도장에 대해 제안한 방법을 적용하는 연구를 진행할 것이다.

## 참고문헌

- (1) B. Avitzur, 1968, "Metal Forming : Processes and Analysis", McGraw-Hill, pp. 52~66.
- (2) M. Kiuchi and Y. Murata, 1980, "Simulation of Contact Pressure Distribution on Tool Surface by UBET," Proc. MTDR 21st. pp.13~20.
- (3) William F. Hosford and Robert M. Caddell, 1996, "Metal Forming : Mechanics and Metallurgy", PTR Prentice Hall, pp. 146~156.
- (4) J. Oudin and Y. Ravalard, 1982, "Computer Aided Forging Design in Plane-Strain Condition", Int. Conf. on Num. Methods in Industrial Forming Processes, Swansea, U. K., pp. 351~362.
- (5) M. Kiuchi and A. Katrato, 1981, "Application of Upper Bound Elemental Technique(UBET) to Asymmetric Forging Process", J. of JSTP, Vol. 22, No. 251, pp. 1208~1214.
- (6) DEFORM-2D Version 7.0 Labs Manual.
- (7) 金東垣, 1994, "塑性學", 清文閣, pp. 265~266.