

ANSYS 비선형 정적설계민감도해석 외부모듈 개발

최병남* · 정재준* · 유정훈* · 이태희**

Development of Nonlinear Static Design Sensitivity Analysis Based ANSYS

Byung Nam Choi, Jae Jun Jung, Jung Hoon Yoo and Tae Hee Lee

Key Words : Design Sensitivity Analysis(설계민감도해석), Nonlinear Static Analysis(비선형 정적 해석)

Abstract

CAE has been settled down to an indispensable tool for the simulation of a mechanical system according to the development of computer-aided analysis rapidly. Particularly finite element programs have advanced to the one of most valuable things in the field of CAE due to the remarkable progress in the implementation. But since this analysis tool mostly provides the result of the analysis, it cannot satisfy designers who are seeking for information to improve their designs. Therefore, design sensitivity analysis or optimization module has been incorporated into commercial FEA programs to satisfy the desire of designers since 1990s. Design sensitivity analysis is to compute the rate of change of response with respect to design variable. Design sensitivity analysis is classified into static design sensitivity analysis, Eigenvalue design sensitivity analysis and dynamic design sensitivity analysis. In this research, it will be presented to nonlinear static design sensitivity analysis formulation and nonlinear static design sensitivity analysis external module based ANSYS have been developed and illustrated an example to verify the developed module.

기호설명

- K** : 전체 강성 행렬 (global stiffness matrix)
- K_t** : 접선강성 행렬 (tangential stiffness matrix)
- U** : 절점 변위 벡터 (nodal displacement)
- F, R** : 절점 외력 벡터 (external nodal load)
- F_e, Q** : 요소 절점 내력 벡터 (element force vector)
- b** : 설계변수 (design variable)

1. 서 론

급속한 컴퓨터 하드웨어 및 컴퓨터응용해석 기법의 발달에 힘입어 CAE는 기계시스템해석에서 없어선 안될 도구로 정착되었고, 특히 유한요소해석 프로그램은 눈부신 발전을 거듭하여 이의 응용성과 해의 신뢰성을 산업현장에서 인정 받고 있다. 그러나 이런 해석프로그램은 설계된 시스템의 해

설정보만 제공하고 있어서 설계도구로서 유용하게 사용되고 있지 못한 실정이다. 이러한 설계자에게 설계개선정보를 제공하기 위한 설계방법론적인 연구가 활발하게 진행되고 있다. 설계방법론의 한 분야로 1980년대부터 진행되어 온 설계민감도해석(design sensitivity analysis)은 현재까지 그 연구가 꾸준히 진행되고 있다.

설계민감도(design sensitivity)는 설계변수에 대한 응답함수의 변화율로 정의된다. 설계민감도해석에는 근본적으로 이산접근법과 연속접근법으로 나뉘어지고, 이산접근법에는 유한차분법, 해석적인 방법 그리고 준해석법의 세가지가 있다. 연속접근법에는 구조시스템을 나타내는 연속변분식의 일차변분을 가지고 설계민감도식을 얻는 것이다. 이 방법은 요소강성행렬의 형식에 상관없이 독립적으로 설계민감도를 구하는 이점이 있다.

또한, 응답해석에 따라 크게 정적설계민감도해석, 고유치설계민감도해석 그리고 동적설계민감도해석으로 나뉜다. 또한 구조물에 따라 선형 설

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 한양대학교 기계공학부 교수

계민감도해석과 비선형 설계민감도해석으로 구분된다. 비선형 설계민감도해석에는 다시 재료비선형과 기하비선형으로 나뉘어진다.

비선형 설계민감도해석에 관한 연구로는 Bendsoe 와 Sokolowski[1]은 경로비의존적인 탄소성구조물의 설계민감도해석을 Quadratic Programming 문제로서 정형화하였고, Osaki 와 Arora[2]는 토탈라그란지언 형식을 이용하여 탄소성구조물의 기하비선형 설계민감도식을 표현했다. Wu 와 Arora[3]는 비선형구조물의 응답함수에 대한 증분법(incremental solution scheme)을 이용하였다. 그들은 토탈과 업그레이드 라그란지언 형식을 사용하였고 준해석법으로 설계민감도를 계산하였다. Y.S.Ryu 와 Arora[4]는 ADINA 를 이용한 비선형 정적설계민감도해석을 수행하였고, Arora 와 Cardoso[5]는 비선형구조물의 응답함수들에 대한 연속설계민감도방법을 제시하였다. 또한 콘트롤블롭 접근법과 물질미분 접근법이 이론적으로 일치함을 증명하였다[6].

T.H.Lee 와 Arora[7]는 연속형식을 이용하여 탄소성 구조물의 크기설계민감도방법을 개발하였고, FEA 프로그램을 이용하여 향상시켰다. Tsay 와 Arora[8]는 비선형 설계민감도해석을 토탈라그란지언형식을 이용하여 적은 변위량을 가정한 경로의 존적인 문제에 적용하였다. Vidal 과 Haber[9]는 탄소성재료 구조물의 설계민감도해석에 대하여 음합수적분법(implicit integration scheme)과 일관접선연산자(consistent tangent operator)를 이용하였다.

이러한 설계민감도해석을 좀 더 실제적으로 유한요소해석프로그램으로부터 이산시스템에 대한 결과정보를 이용하여 설계민감도해석을 수행하는 연구가 1990년대부터 Lee et al. 등에 의해 상용유한요소해석프로그램인 ANSYS 설계민감도해석 외부모듈이 개발되고 있다. 현재까지의 ANSYS 설계민감도해석 외부모듈의 개발은 선형시스템의 정적, 고유치 설계민감도해석을 수행할 수 있었다[10].

본 연구에서는 이산시스템에서의 재료 및 기하 비선형 정적 설계민감도해석을 직접미분법을 이용하여 설계민감도식을 정형화하고 이를 상용유한요소해석프로그램인 ANSYS 를 통하여 준해석법으로 유한요소모델의 설계민감도해석을 수행하여 보겠다.

2. 비선형 정적설계민감도해석

2.1 비선형 유한요소해석

비선형 시스템의 정적해석은 선형과는 달리 외력(external force)을 여러 개의 하중단계(load step)

로 나누어 해석한다. 이 하중단계에서도 평형방정식을 만족하는 변위를 얻기 위해 해석횟수(iteration)를 반복시킨다. 또한 평형방정식의 해를 구하기 위해서는 반복증감법과 업데이트법 등이 사용되고 있다. 반복증감법 중 뉴튼-랩슨법에서 하중단계 t 에서 평형상태가 만족되었다고 가정하고, 하중단계 $t + \Delta t$ 에서의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(b) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{R}(b)$ 는 외력, $\mathbf{Q}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U})$ 는 내력 나타낸다. 또한 (i-1)번째 반복횟수에서의 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}$ 를 계산하였다고 가정한다. 다음 식(1)을 테일러 급수로 전개하고, 이 식에 식(2)와 (3) 그리고 식(4)를 대입하고 정리하면 식(5)와 같다.

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (2)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(b) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) = -\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)})}{\partial \mathbf{U}} \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(b) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = 0 \quad (5)$$

식(5)에서 $\mathbf{R}(b)$ 는 \mathbf{U} 의 함수가 아니므로 $\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(b) / \partial \mathbf{U}$ 은 영이 되고, 내력에 대한 변위의 편미분(partial derivative)은 접선강성행렬 \mathbf{K}_t (tangent stiffness matrix)를 의미한다. 그러므로 뉴튼-랩슨법을 이용한 평형방정식은 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_t^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(b) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}(b, {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (6)$$

2.2 비선형 정적설계민감도해석

비선형구조물의 정적 설계민감도해석은 식(7)과 같은 이산시스템의 평형방정식을 설계변수로 직접 미분함으로써 나타낼 수 있다. 여기서 선형시스템과 다른 것은 강성행렬 \mathbf{K} 가 변위와 설계변수의 함수란 것이다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}, b) \mathbf{U}(b) = \mathbf{F} \quad (7)$$

\mathbf{K} 는 요소강성행렬을, \mathbf{F} 는 하중을, \mathbf{U} 는 변위를 나타낸다. 위 식을 설계변수 b 로 직접미분하면 식(8)과 같이 된다.

$$\left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} \right) \frac{d\mathbf{U}}{db} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \mathbf{U} \quad (8)$$

식(8)에서 $d\mathbf{U}/db$ 가 설계변수에 대한 민감도를 나타낸다. 식(8)이 선형시스템의 정적설계민감도식과의 차이점은 $(\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{U})\mathbf{U}$ 항이 추가로 생겼다는 것이다. 이는 선형 정적설계민감도해석에서는 시스템의 평형방정식과 유사한 형태로 되어 있어 가상하중(pseudo load)만을 구하여 재해석(Re-analysis)을 통하여 나타나는 설계민감도를 구할 수 있었다. 하지만 비선형 정적설계민감도식 특성상, 좌변() 항은 더 이상 원래의 시스템 평형방정식과는 상이한 형태로 나타나게 되어 다른 방법으로 이 항을 결정하여야 한다. 우변의 가상하중(pseudo load) 또한 설계변수에 대한 강성행렬의 편미분 값으로 나타나 있어 이를 결정하는 데 중요한 사항이 되었다.

먼저 좌변의 $\mathbf{K} + (\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{U})\mathbf{U}$ 을 생각해보자. 정적구조물의 평형방정식 $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ 과 $\mathbf{F} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ 에서 양변을 변위 \mathbf{U} 에 대해서 편미분을 취하고 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\mathbf{K}\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \quad (9)$$

식 (9)에서 $\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{U}$ 은 하중과 변위의 관계에서 한 상태에서의 접선강성행렬(tangent stiffness matrix)가 된다. 그러므로 식(8)의 좌변()항은 접선강성행렬로 표현할 수 있다. 이는 비선형 유한요소해석과정에서 뉴튼-랩슨법(full Newton-Raphson method)을 사용할 때에 적용될 수가 있다.

다음은 가상하중 $(\partial \mathbf{K} / \partial b)\mathbf{U}$ 를 고려해 보자. 정적 구조물의 평형방정식 $\mathbf{Q}(\mathbf{U}, b) = \mathbf{R}$ 에서 설계변수 b 에 대해 전미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{db} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{db} &= -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b} \end{aligned} \quad (10)$$

위 식은 식(8)과 동등한 식이다. 식 (8)과 (10)에서 가상하중 항을 등식으로 나타내면 다음과 같다. 즉, 비선형 정적설계민감도식에서의 가상하중은 설계 변수 변화에 따른 요소절점력(element nodal force)의 편미분값으로 구할 수가 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial b} \quad (11)$$

그러므로 비선형 정적설계민감도식은 다음 식으로 정형화 한다.

$$\mathbf{K}_t \frac{d\mathbf{U}}{db} = -\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial b} \quad (12)$$

3. ANSYS 를 이용한 비선형 정적설계민감도 외부모듈

ANSYS에서 비선형 정적구조물의 유한요소해석 시 사용자는 해석방법, 수렴조건, 구간 설정 등 다양한 옵션으로 원하는 해석을 수행할 수 있다. 해석방법으로 기본으로 뉴튼-랩슨법, 수정 뉴튼-랩슨법, 초기강성법을 선택할 수 있고, 다른 방법도 옵션화 되어 있다. 먼저 ANSYS에서 원 모델의 유한요소모델을 뉴튼-랩슨법으로 해석한다. 여기에서 접선강성행렬(tangent stiffness matrix)과 요소절점력(element nodal force)의 정보를 얻는다. 그리고 설계변수에 변화를 주고 비선형 유한요소해석을 수행한다. 여기서 설계변수변화에 따른 요소절점력(element nodal force)의 정보를 얻는다. 다음으로 설계민감도외부모듈에서 준해석법으로 설계변수 변화에 따른 요소절점력의 편미분값을 구한다. 위의 과정으로 비선형 정적설계민감도해석에 필요한 접선강성행렬과 가상하중을 구하였다. 그러므로 ANSYS에서 재해석옵션을 이용하여 가상하중을 주고 재해석을 하여 나온 변위결과가 설계변수 변화에 따른 변위의 설계민감도가 되는 것이다.

다음은 ANSYS 비선형 설계민감도 외부모듈의 흐름도이다.

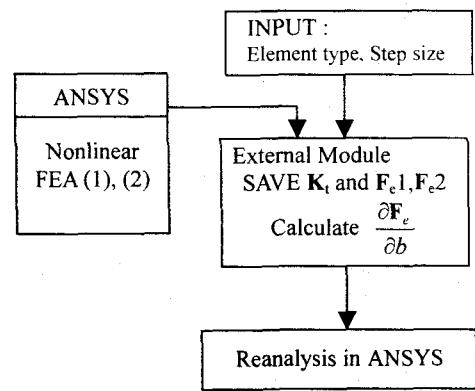


Fig. 1.The flow chart of the external module for nonlinear static design sensitivity analysis

4. 예제

아래의 Fig. 2는 3개의 바(bar)로 이루어진 구조물이다. 설계변수는 요소 1의 단면적으로 하고, 2번 노드의 변위에 대한 설계민감도를 알아보겠다. 기본 모델은 정해진 상태에서 설계민감도해석을 재료비선형, 재료기하비선형의 2가지로 구분하여 수행하고자 한다.

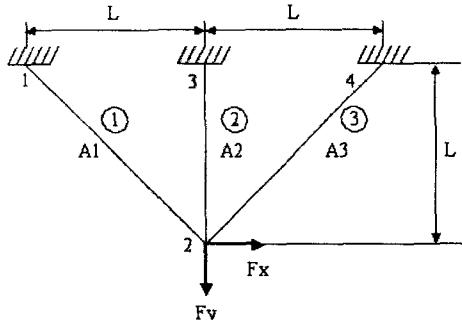


Fig. 2 Three bars structure

4.1 재료비선형 정적설계민감도해석

재료비선형인 경우는 응력과 변형률의 관계가 비선형으로 나타나는 것이다. 다음은 모델의 응력-변형률 관계를 나타낸 것이다.

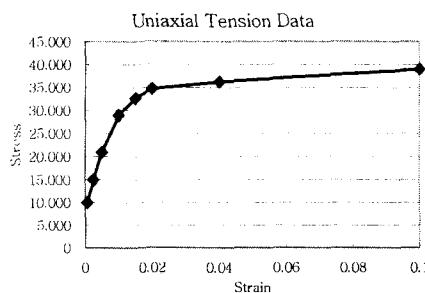


Fig. 3 Stress-strain relation curve

4.1.1 접선강성행렬의 계산

먼저 ANSYS에서 비선형 정적해석을 수행하여 접선강성행렬을 구한다.

$$\mathbf{K}_t = 10^4 \begin{bmatrix} 3.448913325242 & 3.339311774158 \\ 3.339311774158 & 4.708913325242 \end{bmatrix} \quad (13)$$

4.1.2 가상하중의 계산

- 설계변수 변화량 (step-size) : 10E-7

- 원 모델의 요소절점력 (2 번 노드)
Ux=4925.45742651 Uy=-4925.45742651

- 설계변수가 변화된 모델의 요소절점력
Ux=4925.45988924 Uy=-4925.45988924

4.1.3 설계민감도

식(12)에 의해 설계민감도를 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{d\mathbf{U}}{db} = \begin{bmatrix} -3.89431104476364 \\ 3.28463228257693 \end{bmatrix} \quad (15)$$

위 결과를 FDM으로 계산한 설계민감도값과 비교해 보면 다음과 같다.

Table 1. DDM vs FDM results in material nonlinearity

구분	DDM	FDM	Error (%)
$\frac{dU_x}{db}$	-3.894311	-3.894300	0.000283
$\frac{dU_y}{db}$	3.284632	3.284629	0.000694

4.2 재료기하비선형 정적설계민감도해석

재료기하비선형인 경우에는 응력-변형률 관계뿐만 아니라 변형률과 변위와의 관계도 비선형인 경우이다. 예제에선 변형률과 변위와의 값을 입력하지 않고 ANSYS 해석옵션에서 기하비선형을 추가하였다.

4.2.1 접선강성행렬의 계산

$$\mathbf{K}_t = 10^4 \begin{bmatrix} 3.405972304510 & 3.35711874570530 \\ 3.35711874570530 & 4.8531018523450 \end{bmatrix} \quad (16)$$

4.2.2 가상하중의 계산

- 원모델의 요소절점력 (2 번 노드)
Ux=4937.92051131 Uy=-4902.05491653

- 설계변수를 변화시킨 모델의 요소절점력
Ux=4937.92298027 Uy=-4902.05736756

참고문헌

- 가상하중

$$\frac{\partial F_c}{\partial b} = 1.0e4 \begin{bmatrix} 2.46896000044217 \\ -2.45102999997471 \end{bmatrix} \quad (17)$$

4.2.3 설계민감도

$$\frac{dU}{db} = \begin{bmatrix} -3.84282574156690 \\ 3.16330726199209 \end{bmatrix} \quad (18)$$

위 결과를 FDM 으로 계산한 설계민감도값과 비교해 보면 다음과 같다.

Table 2. DDM vs FDM results in material & geometric Nonlinearity

구분	DDM	FDM	Error (%)
dU/db	-3.842825	-3.848010	0.134725
dU/db	3.163307	3.170210	0.217737

5. 결 론

먼저 뉴톤-랩슨법을 이용하여 비선형 정적설계민감도식을 정형화 하였고, ANSYS 비선형 정적설계민감도해석 외부모듈을 개발하였다. 또한 위의 두 가지 예제로 ANSYS 비선형 정적설계민감도해석 외부모듈을 이용하여 비선형 정적설계민감도해석을 수행하였고, 그 결과를 FDM 과 비교하였다. 현재까지의 설계민감도 외부모듈은 선형시스템에서의 정적, 고유치 설계민감도를 강성행렬, 질량행렬의 정보를 가지고 가상하중을 준해석법으로 구하였다.

이번에 개발된 ANSYS 비선형 정적설계민감도해석 외부모듈에서는 접선강성행렬과 설계변수에 대한 요소점점력의 편미분값을 준해석법으로 구하여 이를 가상하중으로 취하여 비선형 정적설계민감도해석을 수행할 수 있게 되었다.

그룹화 된 요소들의 설계민감도해석 뿐만 아니라 두개이상의 유한요소((multi-element)로 결합된 유한요소모델의 설계민감도해석도 수행함으로써 기존 모듈의 단점을 보완하였다.

후기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

- (1) Bendsoe M. P. and Sokolowski J., 1988, "Design Sensitivity Analysis of Elasto-Plastic Analysis Problems", *Mech. Struct. Machines*, Vol.16, pp. 81~102.
- (2) Osaki and Arora J. S., 1994, "Design Sensitivity Analysis of Elasto-Plastic Strucuture", *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, Vol. 37, pp.737~762.
- (3) Wu C.C. and Arora J. S., 1987, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure", *AIAA Journal*, Vol.25, No. 8, pp.1118~1125.
- (4) Ryu, Y. S., M. Harrian, Wu C. C. and Arora J. S., 1985, "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Computers & Structures*, Vol.21, No.1/2, pp.245~255.
- (5) Cardoso J. B. and Arora J. S., 1988, "Variational Method for Design Sensitivity Analysis in Nonlinear Structural Mechanics", *AIAA Journal*, Vol.26, No.5, pp.595~603.
- (6) Arora J. S., Lee, T. H. and Cardoso J. B., 1992, "Structural Shape Sensitivity Analysis: Relationship Between Material Derivatives and Control Volume Approached", *AIAA Journal*, Vol. 30, pp. 1638~1648.
- (7) Lee, T. H. and Arora J. S., 1995, "A Computational Method for Design Sensitivity Analysis of Elastoplastic Structures", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 122, pp.27~50.
- (8) Tsay J. J. and Arora J. S., 1990, "Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems.", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 81, pp.183~208.
- (9) Vidal C. A., Lee, H. S. and Haber R. B., 1991, "The Consistent Tangent Operator for Design Sensitivity Analysis of History-Dependent Response", *Comput. Syst. Engrg*, pp.509~523.
- (10) 유정훈, 2000, "그룹설계변수의 설계민감도해석을 위한 ANSYS 외부모듈 개발", *한양대학교 대학원 석사학위논문*.
- (11) ANSYS 5.6 Manual , 1999