

외연적 탄소성 유한요소해석에서의 민감도 해석과 준정적 변형에의 응용

김세호* · 허 훈**

Sensitivity Analysis of the Explicit Elasto-plastic Finite Element Method and Application to the Quasi-static Deformation

Se-Ho Kim and Hoon Huh

Key Words : Explicit Elasto-plastic Finite Element Method (외연적 탄소성 유한요소법), Sensitivity Analysis (민감도 해석), Quasi-static Deformation (준정적 변형)

Abstract

Sensitivity analysis scheme is developed in the elasto-plastic finite element method with explicit time integration using direct differentiation method. The direct differentiation is concerned with the time integration, constitutive relation, shell element with reduced integration and the contact scheme. Sensitivity analysis results are mainly examined with the highly nonlinear and quasi-static problem with the complicated contact condition. The result shows stable sensitivity especially in the sheet metal forming analysis.

기호설명

- M** : Mass matrix
- F_{mr}** : Residual force vector
- F_{ext}** : External force vector
- f_s** : Contact force at the slave node
- p** : Design variable vector

1. 서론

역학문제에서 어떤 시스템에 대한 변수의 영향을 알아보거나 설계 최적화 문제를 해석하기 위하여 설계 민감도해석을 이용하고 있다. 설계 민감도 해석은 현재 기계공학의 여러분야에 광범위하게 활용되고 있으며, 실제 산업현장에서도 유용한 결과를 얻고 있다.

1980년대 중반 이후에 비선형 고체역학 분야에

서 일반적으로 적용될 수 있는 설계 민감도 해석에 관한 연구가 수행되기 시작한 이후에 최근 들어서는 비선형 고체역학 분야에서 광범위하게 연구가 진행되고 있다.

설계 민감도 해석의 방법은 일반적으로 유한차분법, 보조 변수법, 직접 미분법으로 나눌 수 있다. 유한차분법은 매우 근접한 두 값을 가지는 설계변수로 직행문제를 해석하고 구해진 해의 차이로 설계 민감도를 계산하는 방법이다. 유한차분법 사용시에 별다른 이론이 필요하지 않은 장점이 있으나, 직행문제를 많은 횟수로 계산을 하여야 하고 변수의 차이를 잘못 선정할 경우 민감도의 오차가 발생한다. 직접 미분법은 민감도를 계산하기 위하여 직행문제의 지배방정식을 해석적으로 미분하는 방법이다. 보조 변수법은 보조변수와 행렬을 이용하여 목적함수의 민감도를 계산하는 방법이다. 보조 변수법은 대량의 계산이 요구되는 이력의존문제에서 상당한 문제가 발생한다고 알려져 있다.

소성역학 문제에서 민감도 해석이 적용된 예는 다음과 같다. Lee 등⁽¹⁾은 직접 미분법을 사용하여 증분해석에서의 민감도 수식화를 수행하였으며, 구성방정식을 적분하기 위하여 외연적 방법을 사용하였다. Vidal 과 Haber⁽²⁾는 미소변형에 대한 소

* 한국과학기술원 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : hhuh@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3222 FAX : (042)869-3210

성 민감도 해석을 하였다.

1990년대 후반부터 자동차 구조물 등의 충돌에 관한 관심이 커지며 동적 충돌에 대한 민감도 해석에 관한 연구가 시작되고 있다. Cho와 Choi⁽³⁾는 1차원 보요소에 관하여 민감도 수식화를 하였고, 충돌 구조물의 형상 최적화를 수행하였다.

박판성형 분야에서 민감도 해석을 이용한 공정 변수 최적화는 1990년대 중반부터 활발히 연구가 진행되고 있다. Zabarás 등⁽⁴⁾은 연속체적 라그랑지 관점에서 형상 민감도 해석을 수행하였고, 단조시 예비 성형체의 형상을 설계하였다. Ghouati와 Gelin⁽⁵⁾, Kleiber 등⁽⁶⁾은 일반적인 성형공정의 유한 요소해석 시에 민감도를 계산하였다.

본 논문에서는 외연적 탄소성 유한요소 수식화를 이용한 해석에서 민감도 해석을 수행하였다. 유한요소로는 대변형을 고려한 셸요소를 이용하였고, 마찰을 고려한 접촉에 관한 고려를 하여 수식화하였다. 이상의 이론으로 개발된 민감도 해석 프로그램을 이용하여 박판성형공정에 유사한 준정적 변형 예제들을 해석하여 제안된 민감도 수식화의 타당성과 정확성을 검증하였다.

2. 이론

2.1 외연적 탄소성 유한요소 수식화

본 논문에서는 대변형, 탄소성 구성방정식 및 복잡한 접촉을 고려하기 위한 유한요소수식화로 개량 라그랑지 방식의 수식화를 이용하였다. 또한, 외연적 시간적분을 위하여 중앙 차분법을 이용하였다. 본 연구의 대상은 주로 박판의 변형문제이므로 Belytschko-Tsay 셸요소⁽⁷⁾를 이용하였고, 무에너지 모드를 막기 위하여 Flanagan과 Belytschko⁽⁸⁾가 제안한 인공강성계수법을 사용하였다.

평형방정식을 유한요소 수식화하고 외연적 적분법을 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} , \mathbf{F}_{ext} , \mathbf{F}_{int} 는 각각 질량행렬, 외력벡터, 내력벡터이며, 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (4)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력벡터이며, \mathbf{B} 는 유한요소 수식화에서 변형률-변위 관계를 나타내는 행렬이다. N 은

요소의 형상함수 행렬이며, $\ddot{\mathbf{u}}$, \mathbf{b} , \mathbf{t} 는 각각 절점에서의 가속도 벡터와 표면력 벡터 및 물체력 벡터를 나타낸다.

시간 t^{n+1} 에서의 동적 평형 상태를 찾기 위하여 외연적 시간적분법인 중앙 적분법을 사용하였다. 중앙차분법은 다음과 같은 식으로 표현되며 외연적 시간적분법 중 가장 효율적인 것으로 알려져 있다.

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + (\Delta t^n + \Delta t^{n+1})/2 \times \mathbf{a}^n \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t^{n+1} \mathbf{v}^n \quad (6)$$

여기서 \mathbf{x} , \mathbf{v} , \mathbf{a} 는 각각 절점의 좌표, 속도, 가속도를 의미한다.

본 논문에서는 접촉의 처리를 위하여 벌칙 함수법을 이용하였다. 벌칙 함수법은 접촉면의 수직 방향으로 스프링을 설치하는 것과 같은 효과를 구현한다. 알고리즘이 간단하고 추가적인 변수를 필요로 하지 않기 때문에 내연적/외연적 방법 모두에 널리 사용되고 있다.

접촉면의 한쪽 면을 master 면, 그 상대쪽은 slave 면이라 정의하고, 어느 한쪽의 면에 속한 절점이 그 상대쪽 면에 δ 만큼 침투하였다면 침투된 절점에 가해지는 접촉력은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{f}_s = -\delta \mathbf{k} \mathbf{n} \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_m^i = -N_i(\xi_c, \eta_c) \mathbf{f}_s \quad (8)$$

여기서 (ξ_c, η_c) 는 접촉점의 좌표이고, 아래 첨자 s 와 m 은 각각 slave와 master를 의미하며, \mathbf{n} 은 접촉면의 수직벡터이다. k 는 강성계수로 다음과 같이 계산된다.

$$k = f_{si} K_i A_i / D \quad (9)$$

여기서 K_i 는 체적 강성계수, A_i 는 접촉면의 면적, D 는 master 요소의 최대 대각선 길이를 의미한다. f_{si} 는 상수로 박판성형 문제에서는 0.01을 사용하였다.

2.2 민감도 해석

2.1절에서 기술한 수식을 바탕으로 직접미분법에 의한 행렬식의 해석적 미분을 수행하였다. 식(1)로 표현되는 평형방정식을 설계변수 \mathbf{p} 에 관하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d\ddot{\mathbf{u}}^n}{d\mathbf{p}} = \mathbf{M}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^n}{d\mathbf{p}} - \frac{d\mathbf{F}_{\text{int}}^n}{d\mathbf{p}} - \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{u}}^n \right) \quad (10)$$

여기서 우변 각 항의 민감도는 식(2), (3), (4)를 이용하여 다음과 같이 계산하였다.

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \frac{dN^T}{dp} N dV + \int_V \rho N^T \frac{dN}{dp} dV + \int_V \rho N^T N \frac{d(dV)}{dp} \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_{int}}{dp} = \int_V \frac{d\mathbf{B}^T}{dp} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dp} dV + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \frac{d(dV)}{dp} \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_{ext}}{dp} = \int_{\partial V} N^T \frac{dt}{dp} dS + \int_{\partial V} N^T \mathbf{t} \frac{d(dS)}{dp} \quad (13)$$

식(12)에 표시된 내력의 민감도를 계산하기 위하여 쉘 요소에 관련된 변수와 탄소성 구성방정식에 관련된 변수를 모두 해석적으로 미분하였다. 식(10)으로부터 구한 가속도의 민감도로부터 식(5)와 식(6)의 민감도 수식화를 통해 속도와 변위의 민감도를 계산할 수 있다.

접촉수식화는 다음과 위에 기술한 방식과 동일한 방법으로 미분하여 민감도 수식화를 하였다. 접촉력을 정의한 식(7)을 미분하면 다음과 같이 나타내어진다.

$$\frac{df_s}{dp} = -\frac{d\delta}{dp} kn - \delta k \frac{dn}{dp} \quad (14)$$

식(14)의 우변 민감도 항을 계산하기 위하여 접촉점 (ξ_c, η_c) 의 민감도가 필요하며 이는 접촉 탐색과정에서 구할 수 있다.⁽⁹⁾

3. 민감도 해석

민감도 이론에 따라 작성된 프로그램의 정확도를 알아보기 위하여 예제들을 해석하였다. 해석은 주로 박판의 준정적 변형에 관련된 성형공정인 평면변형 펀치 인장, 반구형 펀치인장, 원형컵 디프드로잉 공정에 관하여 민감도 해석을 수행하였고, 유한차분법의 결과와 정확도를 비교하였다. 박판 변형에서 주로 사용되는 변형의 기준은 두께분포와 주변형을 분포이므로 변위의 민감도와 함께 이 변수들의 민감도를 계산하였다.

3.1 평면변형 펀치 인장변형의 민감도 해석

본 예제는 박판의 한쪽 끝을 완전히 고정하고 중심부를 둥근 강체 펀치에 힘을 가하여 압입하는 공정으로서, 외팔보 변형과 비슷한 변형을 하게 되며, 접촉의 영향도 살펴볼 수 있는 예제이다. 초

기 유한요소 격자형상은 Fig. 1에 도시하였으며, 펀치에 가해지는 집중하중은 시간에 비례하여 부과하였고, 실제변수는 식(15)의 p 를 사용하였다. 하중은 운동 에너지가 내부 변형에너지보다 충분히 작도록 하여 준정적상태를 유지하도록 부과하였다.

$$F_1 = -0.05t = pt \quad (\text{kN}) \quad (15)$$

박판의 탄성계수는 200GPa, 푸와송비는 0.3, 초기두께는 1.0 mm로 해석을 수행하였으며, 재료는 등방성 탄소성을 만족한다고 가정하였다. 항복곡선은 $\bar{\sigma} = 600(\bar{\epsilon}^p + 0.000903)^{0.274}$ MPa이며, 밀도는 $9.78 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 이다.

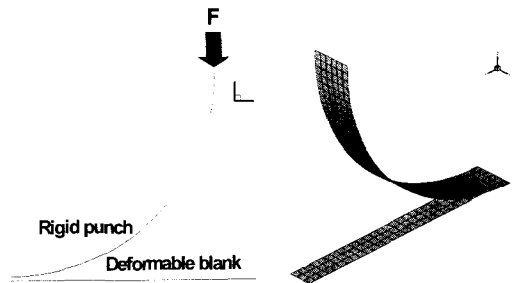
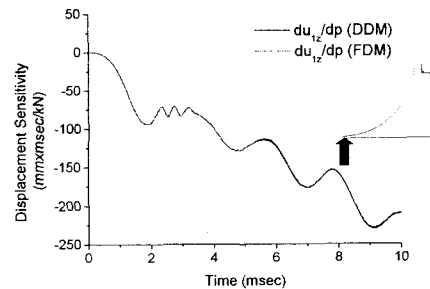
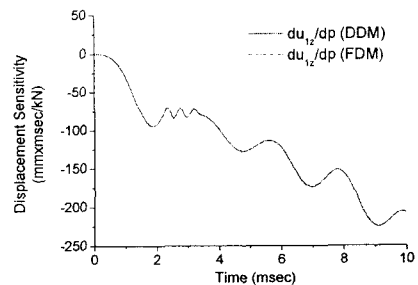


Fig. 1 Initial finite element mesh system for the analysis of the plane strain punch stretching problem.

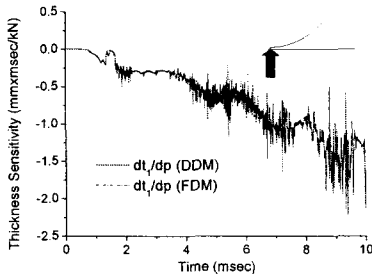


(a)

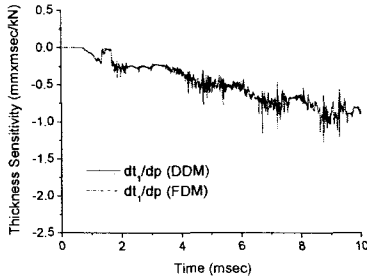


(b)

Fig. 2 Sensitivity of the z-displacement at the node 1 in the plane strain punch stretching problem: (a) non-frictional case; (b) frictional case.



(a)



(b)

Fig. 3 Sensitivity of the thickness at the element 1 in the plane strain punch stretching problem: (a) non-frictional case; (b) frictional case.

해석에서 시간증분은 해의 오차를 줄이기 위하여⁽³⁾ 전해석 구간에서 일정한 값인 1.44×10^{-4} ms 을 사용하였고, 10 ms 까지 해석을 수행하였다. 마찰의 영향을 알아보기 위하여 쿨롱 마찰계수를 0 과 0.1 로 하여 해석을 수행하였다.

Fig. 2 에 박판 중심의 대칭 절점에서의 z 방향의 변위민감도를 유한차분법과 함께 도시하였다. 직접 미분법을 이용한 민감도 해석의 결과가 유한차분법의 결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 마찰이 부과된 경우에도 무마찰의 경우와 마찬가지로 해가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 3 에는 중심부 요소의 두께 민감도를 도시하였다. 유한차분법이 좀 더 진동하는 경향을 보이고 있다. 이러한 오차는 외연적 해석에서 볼 수 있는 해의 미소한 진동과 접촉의 처리 부분에서 발생된다. 마찰이 부과된 경우가 무마찰의 경우보다 작은 절대값을 가지게 되는데, 이는 중심부에서 펀치와 접촉한 이후에 마찰에 의하여 해당 요소의 움직임이 제약되게 되므로 압입력에 대한 민감도가 감소함을 의미하며 실제 물리적 경향과도 일치한다.

3.2 반구형 펀치 인장해석의 민감도 해석

본 예제는 원형의 박판을 반구형 강체펀치로 압입하는 문제로서 실제로 박판성형공정에서 많이 사용하는 공정이다. 초기 유한요소 격자형상은 Fig. 4 에 도시하였으며, 펀치에 가해지는 집중하중

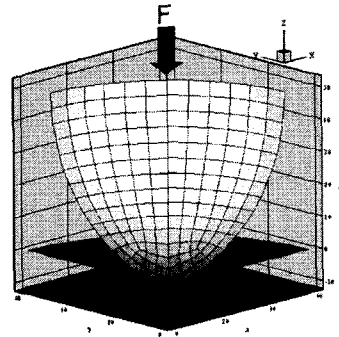
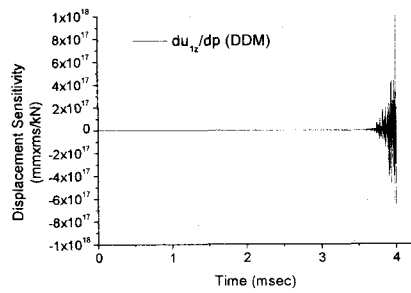
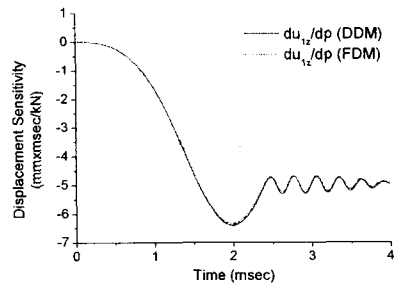


Fig. 4 Initial finite element mesh system for the analysis of the hemi-spherical punch stretching problem.



(a)



(b)

Fig. 5 Comparison of the sensitivity of the z-displacement at the center node in the hemi-spherical punch stretching problem: (a) single precision; (b) double precision.

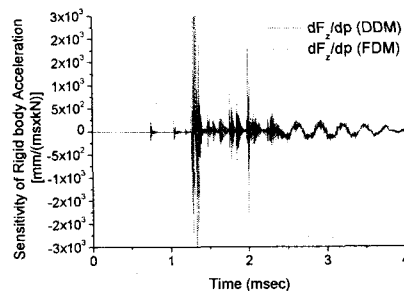


Fig. 6 Sensitivity of the rigid punch acceleration in the hemi-spherical punch stretching problem.

은 시간에 비례하여 부과하였고, 설계변수는 식 (16)의 p 를 사용하였다. 하중은 운동 에너지가 내부 변형에너지보다 충분히 작도록 하여 준 정적상태를 유지하도록 부과하였다.

$$F_2 = -2.5t = pt \quad (\text{kN}) \quad (16)$$

해석에 사용된 박판의 물성치는 3.1 절의 경우와 동일하다. 해석에서 시간증분은 전해석 구간에서 일정한 값인 2×10^{-4} ms 를 사용하였고, 4.0 ms 까지 해석을 수행하였다. 쿨롱 마찰계수는 0.1 로 하였다.

박판성형 공정 등의 준정적 문제에서는 펀치의 속도가 매우 작기 때문에 시간증분을 크게 할 수 없는 경우가 대부분이다. 따라서, 한 시간증분당의 변형률 증분 등의 절대값이 매우 작으므로 민감도 역시 매우 작은 값을 가지게 되며 수치오차도 매우 커지게 될 위험이 있다. Fig. 5 에는 단순정밀도(single precision)와 배정밀도(double precision)의 변수를 사용하여 프로그램을 작성하고 중심점 1 번 절점의 z 방향의 민감도를 계산하여 비교하였다. 단순정밀도의 경우에는 해석이 진행됨에 따라 매우 큰 값으로 발산함을 알 수 있다. 일반적으로 접촉이 수반되지 않는 경우에는 이러한 현상이 잘 발생하지는 않지만, 접촉의 해석과정에서 접촉점의 탐색등의 비선형 탐색과정에 의하여 오차가 누적되어 단순정밀도에서의 오차가 민감도의 크기보다 크게 되어 이러한 문제점이 발생한다. 그림에서 알 수 있듯이 배정밀도를 사용할 경우 유한차분법과 직접미분법의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 6 에는 강제펀치의 가속도의 민감도를 도시하였으며, 대체적인 경향은 잘 일치하고 있으며, 유한차분법의 경우가 수치 오차로 인해 일부구간에서 심하게 진동하고 있음을 알 수 있다. 이 결과를 고려한다면 직접 미분법의 경우가 좀더 정확한 결과를 보이고 있다고 판단할 수 있었다.

3.3 디프 드로잉 공정의 민감도 해석

원형컵 드프 드로잉 공정에 관하여 여러가지 변수에 대해 블랭크 홀딩력에 대한 민감도를 계산하고 유한차분법의 결과와 비교하여 보았다.

해석에 사용된 박판의 탄성계수는 210 GPa, 푸와송비는 0.3, 초기두께는 0.5 mm 로 해석을 수행하였으며, 항복곡선은 $\sigma = 522(\epsilon^p + 0.0148)^{0.234}$ MPa 이었으며, 밀도는 9.78×10^{-6} kg/mm³ 였다. 해석에 사용된 박판 블랭크의 유한요소 격자와 펀치, 블랭크

크 홀더, 다이와의 초기형상을 Fig. 7 에 도시하였다. 초기 블랭크의 반경은 26.75 mm 이고, 펀치의 외경, 펀치 어깨부 반경, 다이의 내경, 다이 어깨부 반경은 각각 29.88 mm, 3 mm, 30.37 mm, 3 mm 이다. 마찰계수는 0.15 로 하였다. 해석은 펀치행정 20mm 까지 수행하였고, 펀치의 속도는 1m/s 로 하여 준정적 변형을 만족하도록 하였다. 해석에서 블랭크 홀딩력은 식(17)과 같이 부과하였고, 설계변수는 p 로 하여 민감도 해석을 수행하였다.

$$F_b = 5/0.1667t = pt \quad (\text{kN}) \quad t \leq 0.667 \text{ sec} \quad (17)$$

$$F_b = 5 \quad (\text{kN}) \quad t > 0.667 \text{ sec}$$

박판성형공정에서 변형 및 파단의 판단기준으로 주로 주변형률 분포를 사용하고 있다. 따라서, 이들 변수를 목적함수로 하는 최적화를 수행하려면 민감도를 정확하게 구해야 한다. 본 예제에서는 주변형률의 민감도를 구하고, 결과를 고찰하였다.

Fig. 8 에 292 번 요소에서 주변형률의 민감도를 유한차분법의 결과와 함께 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 펀치행정이 12 mm 일 때까지는 잘 일치하고 있음을 알 수 있으나, 그 이후에는 오차가 발생하고 있음을 알 수 있다. 오차가 발생하는 시점은 해당 요소가 거의 변형이 끝난 상태이므로, 접촉과 셀요소의 민감도에서 오차가 발생함을 알 수 있으며 좀더 정확한 민감도 해석이 요구된다.

Fig. 9 에는 유한차분법에서 섭동량 (perturbation size)을 달리하며 해석한 결과로서 섭동량이 0.001 kN 이 될 경우 실제와 매우 다른 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 일반적으로 접촉을 고려하여야 하는 준정적 변형에서 유한차분법으로 민감도를 구하는 것이 매우 어렵다고 알려져 있으며⁽⁶⁾, 본 예제에서도 그 사실을 확인할 수 있었다.

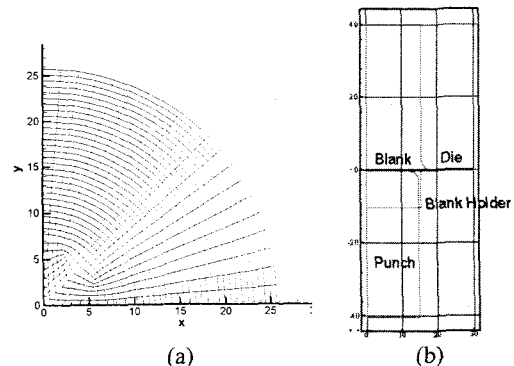


Fig. 7 Initial finite element mesh system for the analysis of the cylindrical cup deep drawing process: (a) shape of the blank; (b) tool setup.

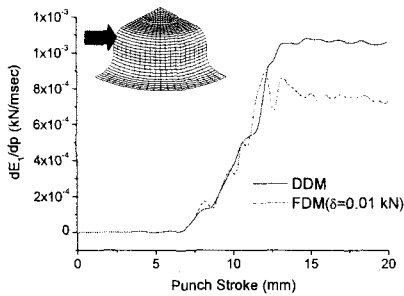


Fig. 8 Sensitivity of the principal major strain at the element 292 in the analysis of the cylindrical cup deep drawing process.

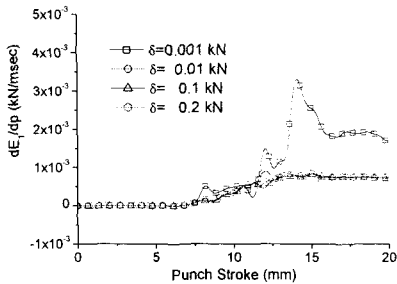


Fig. 9 Comparison of the principal strain sensitivity with respect to the perturbation size.

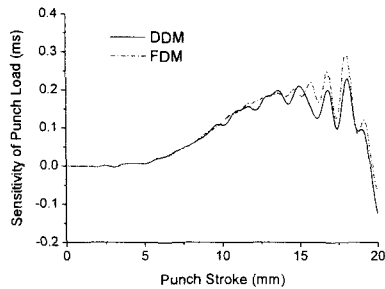


Fig. 10 Sensitivity of the reaction force of the rigid punch in the analysis of the cylindrical cup deep drawing process.

Fig. 10 에는 펀치에서의 반력의 민감도를 도시 하였으며, 펀치행정 15 mm 까지 매우 잘 일치하는 경향을 보이고 있다. 이후의 오차는 블랭크가 홀더와 다이 사이를 완전히 빠져나가면서 생긴 동역학적 효과 및 수치적 오차로 판단된다.

4. 결론

본 논문에서는 외연적 탄소성 유한요소수식의 민감도 해석을 수행하였다. 민감도 해석을 위해 셀요소를 이용한 기본 지배 방정식 및 접촉의 민

감도 수식화를 수행하였고, 이를 바탕으로 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램으로 일반적인 준정적 변형을 하는 예제를 해석하여 민감도 해석의 정확성과 타당성을 입증하였다. 해석에 사용된 예제는 박판성형공정에 관련된 예제로서, 해석에서 나타나는 문제점을 고찰 하기 위해 변수의 정밀도, 유한차분법 등의 오차 문제를 고찰하였으며 직접 미분법에서 얻어진 해가 유한차분법과 잘 일치함을 보였다.

향후과제로 설계변수를 형상변수로 확장하는 것이 필요하며, 얻어진 결과로부터 설계변수 최적화를 수행할 예정이다.

참고문헌

- (1) Lee, T. H. and Arora, J. S., 1995, "A Computational Method for Design Sensitivity Analysis of Elastoplastic Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 122, pp. 27 ~ 50.
- (2) Vidal, C. A. and Haber, R. B., 1993, "Design Sensitivity Analysis for Rate-independent Elastoplasticity," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 107, pp. 393 ~ 431.
- (3) Cho, S. and Choi, K. K., 2000, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Non-linear Transient Dynamics. Part II-Configuration Design," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 48, pp. 375 ~ 399.
- (4) Zabaraz, N., Bao, Y., Srikanth, A. and Frazier, W. G., 2000, "A Continuum Lagrangian Sensitivity Analysis for Metal Forming Processes with Application to Die Design Problems," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 48, pp. 679 ~ 720.
- (5) Ghouati, O. and Gelin, J. C., 1998, "Sensitivity Analysis in Forming Processes," *Int. J. Forming Processes*, Vol. 1, pp. 297 ~ 322.
- (6) Kleiber, M., Antunez, H., Hien, T. D. and Kowalczyk, P., 1997, *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics - Theory and Finite Element Computations*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- (7) Belytschko, T., Lin, J. I. and Tsay, C., 1984, "Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 42, pp. 225 ~ 251.
- (8) Flanagan, D. and Belytschko, T., 1981, "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 17, pp. 679 ~ 706.
- (9) Chen, X., 1994, *Nonlinear Finite Element Sensitivity Analysis for Large Deformation Elasto-plastic and Contact Problems*, Ph. D. Dissertation, University of Tokyo.
- (10) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Inc.