

보조변수법을 이용한 감쇠계 고유치 설계민감도 해석

유정훈* · 이태희**

Adjoint Design Sensitivity Analysis of Damped Systems

Jung Hoon Yoo and Tae Hee Lee

Key Words : Design Sensitivity Analysis(설계민감도 해석), Eigen Problem(고유치 문제), Damped System(감쇠계)

Abstract

There are two methods to calculate design sensitivity such as direct differentiation method and adjoint method. A sort of direct differentiation method for design sensitivity analysis costs too much when number of design variables is much larger than the number of response functions whose design sensitivity analyses are required. Therefore, an adjoint method is suggested for the case that the dimension of design variables is larger than the number of response function. An adjoint method is required to compute adjoint variables from the simultaneous linear system equation, the so-called adjoint equation, requiring only the eigenvalue and its associated eigenvectors for mode being differentiated. This method has been extended to the repeated eigenvalue problem. In this paper, we propose an adjoint method for design sensitivity analysis of damped vibratory systems with distinct eigenvalues.

기호설명

- K** : 전체 강성행렬 (global stiffness matrix)
- M** : 전체 질량행렬 (global mass matrix)
- C** : 전체 감쇄행렬 (global damping matrix)
- u** : 고유벡터 (eigenvector)
- λ : 고유치 (eigenvalue)
- b** : 설계변수 (design variable)

1 서론

고유치 문제는 구조물의 안정성, 잡음 그리고 진동문제를 해석할 때 다루게 된다. 고유치 문제로부터 얻을 수 있는 고유벡터, 고유치에 대한 설계민감도 해석은 구조물의 동적특성을 파악하고 개선하는 정보로 중요하게 사용될 수 있다. 그리고 설계민감도 해석은 구배기반 최적화 기법의 기본 도구로서도 큰 역할을 수행한다. 따라서 효율

적이고 정확한 설계민감도 해석 방법은 설계개선과 최적화를 위해 필수적인 요소이다.

Fox와 Kapoor는 대칭행렬에 대한 고유치 설계민감도 해석기법을 고찰하였으며[1], Husseyin, Rudisill, 그리고 Godoy 등은 고유치에 대한 2차 설계민감도 해석식을 유도하였다[2][3]. Fox와 Kapoor의 modal method[4], Wang의 modified modal method[5], 그리고 Nelson 법[6]은 고유벡터의 민감도 해석방법으로 자주 이용되고 있다. Sutter[7]은 위 방법으로 구한 고유벡터의 설계민감도를 비교 분석하였다. Modal method는 고유벡터의 설계민감도를 고유벡터의 선형조합으로 근사화 하였으며 modified modal method는 설계민감도를 표현하는데 필요한 고유벡터의 수를 줄이는 방법을 고안하였다. 위 두 방법은 고유벡터의 수가 많을 경우 정확한 설계민감도 계산에 많은 계산비용이 든다. Nelson 법은 직접 미분법으로 설계민감도를 얻고자 하는 고유치와 고유벡터만을 계산상 필요로 한다. Lee와 Jung은 방정식의 특이성을 제거하기 위해 정규 직교성을 설계민감도 해석에 포함시켰으며 Lee와 Kim은 이를 감쇠계와 중복 고유치 문제로 확장 시켰다[8][9]. 하지만 위

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 한양대학교 기계공학부

의 방법들은 직접미분법의 일종으로 설계변수가 설계민감도 해석의 응답함수보다 많을 경우 계산 비용이 커지게 된다. 최근 위상최적설계와 같은 많은 설계변수를 다루는 문제에 보조 변수법의 사용이 제안되었다[10]. 보조 변수법은 계산과정에서 고유치와 그와 연계된 고유벡터만을 필요로 한다. 그리고 이 방법은 중복고유치 문제에까지 확장 되어 적용되었다[11].

본 논문에서는 보조 변수법을 이용한 감쇠계의 고유치 설계민감도 해석에 대하여 고찰하고자 한다. 우선 고유치 문제와 정규 직교성으로 라그랑지 함수를 정의하고 라그랑지 함수의 설계변수에 대한 변분의 양함수부분으로 설계민감도를 나타낸다. 보조변수값을 구하는 보조방정식은 변분의 음함수부분을 영(0)으로 놓음으로써 구할 수 있다. 이 보조 방정식을 통해 보조변수값을 구하면 변분의 양함수부분을 계산함으로써 설계민감도를 직접 구할 수 있다.

본 연구의 설계민감도 해석방법을 검증하기 위하여 2 자유도 스프링-질량-감쇠 시스템의 설계민감도 해석을 수행한다.

2 설계민감도 해석

2.1 문제 정의

구조 모드 해석과 선형 좌굴 해석의 고유치 문제는 식(1) 같이 정의 된다.

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

이 식에서 강성과 질량행렬은 양정 또는 적어도 준양정이어야 한다. 고유벡터는 각 고유치와 연계된 값이다.

보조 방정식의 특이성을 제거하기 위한 정규 직교조건식은 식(2)와 같다.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = 1 \quad (2)$$

설계민감도에 대한 응답함수는 식(3)과 같이 고유치, 고유벡터 그리고 설계변수의 함수로 나타낼 수 있다.

$$g = g(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{b}) \quad (3)$$

2.2 보조 변수 설계민감도 해석기법

보조 변수법에서는 우선 식(1), 식(2) 그리고 식(3)으로 이루어진 라그랑지 함수를 정의 해야된

다. 라그랑지 함수의 정의는 식(4)와 같다[10].

$$L = g(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{b}) + \mathbf{z}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{u} + y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \right) \quad (4)$$

여기서 \mathbf{z} 와 y 는 라그랑지 승수이고, 설계민감도 해석시 구해지는 보조변수값이다. 위 라그랑지 함수의 설계변수에 대한 총 변분을 구하면 식(5)와 같고 이 식은 설계변수에 대한 응답함수의 설계민감도를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\mathbf{b}} &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{b}} + \mathbf{z}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \right) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{y} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{u} \\ &+ \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} + \mathbf{z}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} \\ &- \mathbf{y} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \frac{d\lambda}{d\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (5)$$

설계민감도는 식(5)중 양함수 부분으로 나타내고 음함수 부분을 0 으로 제거함으로써 보조방정식을 도출해 낸다. 따라서 설계민감도는 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\mathbf{b}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{b}} + \mathbf{z}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \right) \mathbf{u} \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{y} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (6)$$

음함수 부분은 식(7)과 같이 0 으로 제거 시킨다.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \right) \frac{d\lambda}{d\mathbf{b}} \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{z}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) - \mathbf{y} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \right] \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} = 0 \quad (7) \\ &\text{for } \forall \frac{d\lambda}{d\mathbf{b}}, \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} \end{aligned}$$

식(7)을 다음과 행렬식으로 정리하면 식(8)과 같은 보조방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} & -\mathbf{M} \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial g}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \\ -\frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식(8)에서 계수행렬은 비특이성이고 우변은 고유치와 고유벡터에 대해서 양함수로 나타나므로 보조 변수값을 구할 수가 있다. 식(8)을 푸는 회수는 설계변수의 개수 관계가 없기 때문에 설계변수의 개수가 많은 설계민감도 해석에서는 위의 보

조 변수법이 효율적임을 알 수 있다.

2.3 감쇠계의 설계민감도 해석

감쇠계의 고유치 문제와 정규 직교조건식은 식(9)와 식(10)과 같이 정의 된다.

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^T (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u} = 1 \quad (10)$$

따라서 라그랑지 함수는 식(11)과 같이 정의 된다.

$$L = g(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{b}) + \mathbf{z}^T (\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u} - y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u} \right) \quad (11)$$

라그랑지 함수의 설계변수대한 총 변분중 양함수로서 설계민감도를 나타내면 식(12)와 같다.

$$\frac{dg}{db} = \frac{\partial g}{\partial b} + \mathbf{z}^T \left(\lambda^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} + \lambda \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \right) \mathbf{u} - \frac{1}{2} y \mathbf{u}^T \left(2\lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b} \right) \mathbf{u} \quad (12)$$

음함수를 제거하면서 구해지는 보조방정식은 식(13)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(13)으로부터 구한 보조 변수값을 식(12)에 대입하고 계산함으로써 설계민감도를 계산할 수 있다.

3 예 제

보조변수 설계민감도 해석법을 사용하여 2 자유도 스프링-질량-감쇠 시스템의 고유치 및 고유벡터 설계민감도 해석을 수행해 보도록 하겠다.

Fig.1의 고유치 문제는 식(14)와 같이 정의된다.

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (14)$$

여기서,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m_1 = 3 & m_2 = 5 \\ k_1 = 5 & k_2 = 7 & k_3 = 8 \\ c_1 = 0.1 & c_3 = 0.2 \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad \dot{u}_1 \quad \dot{u}_2] \quad (17)$$

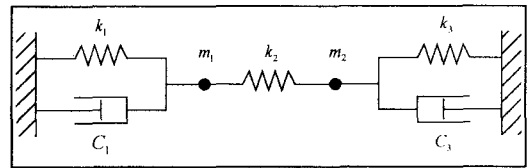


Fig. 1 2 DOF spring-mass-damped system

3.1 설계민감도 해석

우선 고유치 문제를 풀어서 고유치와 고유벡터를 구해낸다. 다음으로 식(13)을 이용하여 보조 변수 값을 구하고 식(12)에 대입해서 설계민감도를 계산한다.

본 예제에서 설계변수는 k_1 으로 선정하였다.

3.2 해석 결과 비교

보조 변수법으로 구한 설계민감도의 정확성을 판단하기 위해서 직접 미분법으로 구한 설계민감도와 결과를 비교해 보겠다. 직접 미분법은 식(18)을 통해서 구한다.

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u} & \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} + \lambda \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b}) \mathbf{u} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T (2\lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b}) \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Table. 1 Comparison of result

EIGENVALUE	AVM	DDM
1	-0.0001375 - 0.0479492i	-0.0001375 - 0.0479492i
2	0.0001375 - 0.0455293i	0.0001375 - 0.0455293i
3	-0.0001375 + 0.0479492i	-0.0001375 + 0.0479492i
4	0.0001375 + 0.0455293i	0.0001375 + 0.0455293i

EIGENVECTOR	AVM	DDM
1	-0.0001917 - 0.0324829i 0.0000673 + 0.0060662i	-0.0001917 - 0.0324829i 0.0000673 + 0.0060662i
2	-0.0077660 - 0.0002099i -0.0132866 - 0.0004393i	-0.0077660 - 0.0002099i -0.0132866 - 0.0004393i
3	0.0011020 + 0.0324646i -0.0001743 - 0.0060641i	0.0011020 + 0.0324646i -0.0001743 - 0.0060641i
4	0.0077682 + 0.0000995i 0.0132935 + 0.0000901i	0.0077682 + 0.0000995i 0.0132935 + 0.0000901i

위 비교에서 알 수 있듯이 보조 변수법에 의한 설계민감도 해석의 정확성을 신뢰할 수 있다. 설계변수와 응답함수의 개수를 비교해서 방법을 선택하면 동일한 설계민감도를 효율적으로 구할 수 있다.

4 결론

설계변수가 설계민감도 해석의 응답함수 개수보다 많은 경우 직접 민분법은 각 설계변수에 대한 해석과정이 필요하기 때문에 비효율적이다. 하지만 보조 변수법은 보조변수를 구하는 해석과정의 개수가 응답함수의 개수만큼 필요하고 설계변수 개수와 상관이 없기 때문에 보다 효율적인 설계민감도 해석을 수행할 수 있다.

본 논문에서는 보조 변수법을 이용하여 감쇠계의 고유치 및 고유벡터 설계민감도 해석을 수행하였으며 2 자유도 스프링-질량-감쇠 시스템 예제를 통해서 그 효율성과 정확성을 검증하였다.

보조 변수법을 이용한 설계민감도 해석은 감쇠계의 중복고유치문제에도 적용될 수 있고 상용해석프로그램을 이용한 설계민감도 모듈개발에도 쉽게 도입될 수 있다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Fox, R.L. and Kapoor M.P., 1968, "Rates of Changes of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, vol. 6, pp. 2426-2429.

(2) Plaut, R.H. and Husseyin, K., 1973, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors in Non-self-adjoint System," *AIAA Journal*, Vol. 11, pp. 250-251.

(3) Rudisill, C.S., 1974, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Matrix," *AIAA Journal*, Vol. 12, pp. 721-722.

(4) Rogers, L.C., 1970, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 943-944.

(5) Wang, B.P., 1991, "Improved Approximate Method for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 29, pp. 1018-1020.

(6) Nelson, R.B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14, pp. 1201-1205.

(7) Sutter, T.R., Camarda C.J., Walsh J.L. and Adelman H.M., 1988, "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 26, pp. 1506-1511.

(8) Lee, I.-W. and Kim., D.O., 1999, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped System-Part I. Distinct Natural Frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, pp. 399-412.

(9) Lee, I.-W. and Kim., D.O., 1999, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped System-Part II. Multiple Natural Frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, pp. 413-424.

(10) Lee, T.H., 1999, "An Adjoint Variable Method for Structural Design Sensitivity Analysis of a Distinct Eigenvalue problem," *KSME International Journal*, Vol. 13, pp. 470-496.

(11) Lee, T.H., 2000, "Adjoint Design Sensitivity Analysis of Repeated Eigenvalues and Their Associated Eigenvectors Structure," *Engineering Design Optimization Proceedings of the 2nd ASMO UK/ISSMO Conference*, pp. 125-131.