

주어진 고유주파수를 갖는 구조물의 위상최적설계

이 종환 * · 민 승재 **

Topology Design of a Structure with a Specified Eigenfrequency

Jong-Hwan Lee and Seungjae Min

Key Words : Topology Optimization(위상최적설계), Homogenization Design Method(균질화설계법), Optimality Criteria Method(최적화기준법), Eigenfrequency(고유주파수)

Abstract

Topology optimization is applied to determine the layout of a structure whose eigenfrequency coincides with a specified frequency. The topology optimization problem is formulated to minimize the difference between the structural frequency and a given frequency using the homogenization method and the modified optimality criteria method. It turns out that the value of a weighting factor in the updating scheme plays an important role to achieve both a suitable speed and a stable convergence of an algorithm. Unlike a constant weighting factor in previous works, it is suggested that a weight factor is varied during the iteration to control the amount of the frequency change. To substantiate the proposed approach two-dimensional structural design problems are presented and the resulted topology layouts for the specified eigenfrequency are compared to layouts for maximizing the corresponding eigenfrequency.

1. 서론

구조물의 최적설계문제는 설계변수에 따라 치수(size), 형상(shape), 위상(topology)의 세가지 문제로 구분할 수 있다. 구조최적설계의 대부분은 치수문제를 중심으로 최적설계이론이 형성되어 왔다. 골조구조를 형성하는 트러스나 보의 단면형상을 정의하는 치수, 평판이나 셸의 두께 등이 치수문제에서 설계변수로 사용되며, 구조물의 형태 자체는 최적설계과정에서 변하지 않고 역학모델이 그대로 유지된다. 형상문제는 최적화과정에서 구조물의 형상이 변하기 때문에 역학모델을 설정하는 영역이 변수가 되고, 유한요소법 등의 이산화모델의 기하학적 부분이 변수가 된다. 설계경계를 적은 수의 매개변수로 표시하여 유한요소모델 등의 이산화모델의 자동생성이 가능한 자동메쉬생성법이 최적설계이론 속에 포함될 필요가 있다. 위상최적설계(topology optimization)는 1960년대 Rozvany와 Prager⁽¹⁾에 의해 레이아웃(layout) 최적설계라는 이름으로 시작되었다. 이것은 유한요소의 모든

절점을 연결하는 트러스 구조물을 만든 후 각각의 트러스 요소에 대한 단면계수를 조정하는 것이었다. 이후 1988년에 Bendsøe와 Kikuch⁽²⁾가 연속체 구조물에 적용할 수 있는 이론을 발표하면서 주목을 받기 시작했으며 그들의 이론은 복합재료의 강성계수 계산법을 응용한 것이었다. 위상최적설계 방법이 제안되기 이전에는 주로 구조물의 단면계수를 다루는 크기최적설계(sizing optimization)나 외형을 변경시키는 형상최적설계(shape optimization)가 주류였다. 그러나 전자의 경우 주어진 형상 내에서만 최적설계를 수행한다는 단점이 있고, 후자는 최적설계의 과정 중에 유한요소가 찌그러지면 그 상태에서 다시 요소를 생성시켜야만 한다. 이에 반해 위상 최적설계는 이러한 단점들을 보완하고, 초기 설계가 없이도 적용시킬 수 있으므로 제품의 개념설계단계에서 유용하게 쓰인다.⁽²⁻⁵⁾

현재 진동하는 탄성구조체의 위상최적설계에 대한 연구는 치수최적설계와 형상최적설계에 비해 상대적으로 적고 Ma와 Kikuchi⁽⁶⁻⁸⁾ (1995), Xie와 Steven⁽⁹⁾ (1996), Kim과 Kim⁽¹⁰⁾ (1999)에 의해서 연구가 진행되고 있다. 기존의 연구는 고유주파수를 최대화했을 경우의 레이아웃 도출에 있었지만, 본 연구의 목적은 위상최적설계 알고리즘을 사용해서 지정된 구조의 고유주파수와 주어진 주파수와와의 차이를 최소화하여 원하는 진동수를 갖도록 구조

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 회원, 한양대학교 기계공학부

의 레이아웃을 얻는 데 중점을 두고 있다.

위상최적설계방법으로는 균질화설계법^(2,4,8,11) (Homogenization design method)과 최적화기준법^(5,11,12) (Optimality Criteria Method)을 사용하였는데 좀더 빠르고 안정적인 해에 수렴하기 위해서 변형된 최적화 기준법을 제안했으며, 최적화 과정 중 고려되는 설계변수의 구간을 적절히 조절하기 위해 가중치를 자동적으로 선정하여 정확한 해의 수렴을 유도하였다.

2. 균질화설계법

균질화설계법은 구조의 치수, 형상, 위상문제를 포함할 수 있는 일반화된 최적구조설계법을 말하며, 설계영역에 무수히 많은 미세한 구멍을 분포시켜 구조물을 생성하는 방법을 말한다. 즉 최적구조설계문제를 최적재료분포문제로 전환하여 문제를 해결한다.

고정된 설계영역에 무수히 많은 직사각형 미세구조의 다공질체를 형성한 후 그 미세구조의 구멍 크기를 변화시켜서 다공질의 정도를 결정하고, 회전까지 고려하여 자유도가 큰 다공질로 가정한다. 따라서 미세구조를 결정하는 직사각형의 크기 a, b 와 회전각 θ 가 설계변수가 되고, 직사각형 공동을 갖는 미세구조로 이루어진 다공질체를 해석하기 위하여 균질화법이 도입되었다. 단위길이의 기본셀 미세구조에서 직사각형의 구멍 크기 a, b 의 함수인 탄성계수행렬 E^H 을 결정하고 좌표변환 규칙에 따라 변환행렬 $R(\theta)$ 를 이용하여 탄성계수행렬은 다음과 같이 정의한다.

$$E = E(a, b, \theta) = R(\theta)E^H(a, b)R^T(\theta) \quad (1)$$

이 결과를 이용하여 설계영역 내의 밀도와 재료상수의 함수관계를 표현하고, 최적화알고리즘을 이용하여 기본셀 내의 밀도와 회전각을 갱신한다. 종료조건을 만족할 때까지 위의 과정을 반복해서 최종재료분포로부터 구조의 크기, 형상, 위상을 도출한다.^(2,4,11)

3. 토폴로지 최적설계

구조물이 지정된 고유주파수를 갖도록 지정된 고유주파수와 주어진 주파수와의 차이를 최소화하는 최적화 문제를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\text{최소화 : } f = \frac{-1}{(\Lambda - \Lambda_{given})} \quad (2)$$

$$\text{구속조건: } g(X) = \int_{\Omega} \rho_e d\Omega - \Omega_e \leq 0 \quad (3)$$

$$x_i \leq x_j \leq x_u \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

여기서 f 는 목적함수, g 는 총 질량구속조건, x_i 는 유한요소모델의 미세구조크기에 해당하는 i 번째 크기설계변수, Λ 는 구조의 지정된 주파수의 고유치, Λ_{given} 은 주어진 주파수의 고유치, ρ 는 밀도, Ω_e 구조의 총질량, x_j 와 x_u 는 각각 크기설계변수 x_i 의 최소값과 최대값, N 은 유한요소수를 표시한다. 여기서 목적함수를 지정된 고유주파수와 주어진 주파수 차이의 역수 형태를 취한 것은 설계변수의 역수근사(reciprocal approximation)⁽⁷⁾를 통하여 최적화알고리즘을 유도하는데 근거를 두었다. 최적화과정에서 유한요소들은 고정되어 있으나 요소의 물질밀도는 설계변수값에 따라서 변한다. 설계변수 x 에 대한 목적함수의 감도는 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2}{(\Lambda - \Lambda_{given})^3} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \phi_n^T \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \Lambda_n \frac{\partial M}{\partial x} \right) \phi_n = \phi_{n,e}^T \left(\frac{\partial k_e}{\partial x} - \Lambda_n \frac{\partial m_e}{\partial x} \right) \phi_{n,e} \quad (5)$$

여기서 $\phi_{n,e}$ 는 구조의 e 번째 유한요소에 대한 n 번째 고유벡터를 나타내고, $\frac{\partial k_e}{\partial x}$ 과 $\frac{\partial m_e}{\partial x}$ 은 다음과 같이 계산된다

$$\frac{\partial k_e}{\partial x} = \int_{\Omega_e} B_e^T \frac{\partial E_e}{\partial x} B_e d\Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial m_e}{\partial x} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} N_e^T N_e d\Omega \quad (7)$$

여기서 B_e 와 N_e 는 각각 스트레인 형상함수와 형상함수이다. 2차원 문제의 경우, 설계변수에 대한 구속조건 감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial g}{\partial a_e} = \rho_0 (1 - b_e) \Omega_e \quad (8)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b_e} = \rho_0 (1 - a_e) \Omega_e \quad (9)$$

진동문제에서 항상 양수가 되는 적절한 설계변수를 갱신하기 위해서 라그랑지 승수에 해당하는 이동상수 μ 를 도입하여 다음과 같은 최적화기준식^(6,7,11)을 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

여기서 λ^* ($\lambda^* = \lambda + \mu$)는 이동된 라그랑지 승수를 나타내고, 따라서 기준함수 D_i 는 다음과 같다.

$$D_i = \frac{1}{\lambda^*} \left(\mu - \frac{\partial f}{\partial x_i} / \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = 1 \quad (11)$$

$$x_i \leq x_i \leq x_{i,}$$

여기서 μ 를 다음과 같이 설정하면, 기준함수 D_i 는 항상 양수가 된다.

$$\mu \geq \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} / \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

따라서 최적화기준법에 의한 설계변수 갱신알고리즘은 다음과 같다.

$$x_i^{k+1} = (D_i^k)^\eta x_i^k \quad (13)$$

여기서 η 는 수렴속도를 조절하는 가중치이다. 즉, 그 값이 적을수록 고려되는 설계변수의 구간이 줄어들어 안정적인 수렴이 예상되는 반면, 그만큼 수렴속도가 늦어진다. 구조의 지정된 고유주파수를 주어진 주파수로 수렴하기 위해서 가중치를 크게 설정해 주면 고려되는 설계변수의 구간이 커져서 라그랑지 승수를 찾지 못할 수 있고, 반면에 너무 작게 설정하면 원하는 진동수로 수렴하지만 수렴속도가 너무 늦어짐을 알 수 있었다. 가중치는 경험적으로 설정하는 값이기 때문에 최적화 과정 중 라그랑지 승수를 찾으면서 수렴속도가 늦지 않는 가중치를 설정한다는 것이 쉽지 않다. 이러한 가중치를 찾기 위해서 가중치를 변화시켰을 때 고려되는 설계변수의 구간을 자유롭게 조정해야 한다. 기존의 최적화기준식은 식(13)에서와 같이 가중치가 기준함수의 지수로서 표현되므로 가중치의 변화에 따른 고려되는 설계변수의 구간조정이 용이하지 못하고 진동수 증가량 조정 또한 어렵다. 따라서 가중치 설정이 최적화과정 중에서 중요한 문제가 됨을 알 수 있다. 본 연구에서는 원하는 진동수를 갖는 구조의 위상을 빠르면서도 안정적으로 얻기 위해서 원하는 진동수 근처까지 빠르게 접근 시킨 후 천천히 안정적으로 수렴하는 가중치를 찾아 수렴하는 방법을 제안하였으며 가중치를 사용하여 고려되는 설계변수의 구간을 자유롭게 조정하기 위해서 변형된 갱신방법을 사용하였다. 앞서 언급한 변형된 최적화 기준식 (10)은 다음과

같고

$$\frac{\lambda^*}{\left(\mu - \frac{\partial f}{\partial x_i} / \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)} = \frac{\lambda^*}{C_i} = 1 \quad (14)$$

변형된 최적화기준법에 의한 설계변수의 갱신방법은 다음과 같다.

$$x_i^{new} = x_i \left(\frac{\lambda^*}{C_i} \right)^{1/\eta} \quad (15)$$

식(15)를 이항정리로 전개시킨 후 일차까지 근사하면 다음과 같다.

$$x_i^{new} = x_i + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\lambda^*}{C_i} - 1 \right) x_i = x_i + \Delta x_i \quad (16)$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\lambda^*}{C_i} - 1 \right) x_i \quad (17)$$

식(16)은 각 설계 변수들의 갱신되는 양을 Δx_i 로 표현할 수 있으며, Δx_i 를 가중치로 조절하기 쉬워서 전체적으로 최적화 과정 중 고려되는 설계변수의 구간을 정밀하게 조절할 수 있다. 따라서 진동수 증가량의 조정이 앞선 설계변수 갱신방법보다 용이해졌다. 식(16)에서 라그랑지 승수는 갱신된 설계변수가 구속조건을 활성화시켜야 한다는 조건 하에서 다음과 같이 구한다.

$$g(x_i^{new}) = 0 \quad (18)$$

$$g(x_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Delta x_i = g(x_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\lambda^*}{C_i} - 1 \right) x_i = 0 \quad (19)$$

$$\lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i - \eta g(x_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \left(\frac{1}{C_i} \right) x_i} \quad (20)$$

지금까지 설명한 과정을 순서대로 나타내면 Fig. 2와 같다. 여기서 시작할 때 가중치는 통상 최적화 기준법⁽¹¹⁾에서 사용하는 0.7~0.85을 사용하고, 구조의 지정된 고유주파수와 주어진 주파수의 차이가 일정 수준(ϵ_A) 가까워지면 새로운 가중치를 사용한다. 안정적인 수렴을 유도하는 가중치를 찾기 위해서 일정 구간 안에서 그 값을 조금씩 증가 시키거나 감소시키면서 안정적으로 수렴 가능한 주파수증가량(ϵ_B, ϵ_C)을 만족하는 설계변수 구간을 설정한다.

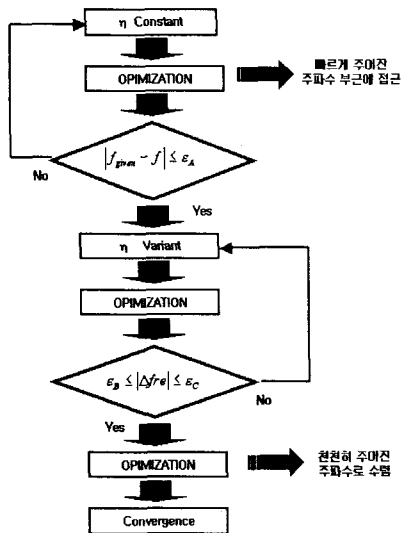


Fig. 2 Flowchart of the optimization procedure

4. 수치 해석 결과 및 고찰

4.1 양쪽 끝단을 고정 한 이차원 설계영역

Fig. 3과 같이 가로 80mm, 세로 20mm인 설계영역을 두께 1mm인 평판으로 가정한다. 이러한 설계영역의 양쪽 끝단을 완전히 고정하고 전체설계영역의 30%에 해당하는 재료를 사용하여 주어진 구속조건을 만족하며 구조의 첫번째 고유주파수 f_1 이 주어진 주파수 123Hz로 수렴하는 과정과 그때의 레이아웃을 알아보았다. 주어진 설계영역을 256(32x8)의 일정한 4절점 유한요소와 297개의 결점으로 나누었다. 분포시킬 재료의 성질은 Young을 100Pa, Poisson비 ν 는 0.3, 질량밀도 ρ_0 는 $2.33 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^2$ 으로 가정했다. 가중치를 일정하게 하고 주어진 주파수로 수렴시킨 경우 Fig. 4에서 보면 가중치를 0.03으로 작은 값을 설정했음에도 불구하고 f_1 이 심하게 진동을 하며 높아지지만 200회의 최적화 과정을 거쳐도 주어진 주파수에 접근하지 못함을 알 수 있다.

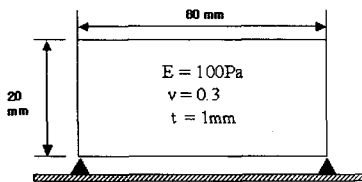


Fig. 3 Design domain for the first problem

f_1 과 주어진 주파수 차이가 주어진 주파수의 3% 안에 들어왔을 때 가중치를 변화시킨 경우, f_1 증가량이 10^{-2} 정도를 나타내는 가중치로 6.75가 설정되어 76회의 최적화 과정을 거쳐 안정되게 수렴함을 볼 수가 있다. 기존의 알고리즘에서도 가중치를 더 작은 값으로 설정하여 고려되는 설계구간을 더 작게 설정하면 안정적인 수렴이 예상되지만 수렴시간이 너무 길어져서 가중치를 변화시키는 것과 비교함에 있어 비효율적임을 알 수 있다. Fig. 5(a)는 가중치를 변화시킨 경우, 구조물의 첫번째 고유주파수가 지정한 123Hz로 수렴된 레이아웃이다. 첫번째 고유주파수를 최대화한 문제에서 얻은 구조(Fig. 5(b))와 비교해보면 거의 일치함을 알 수 있다.

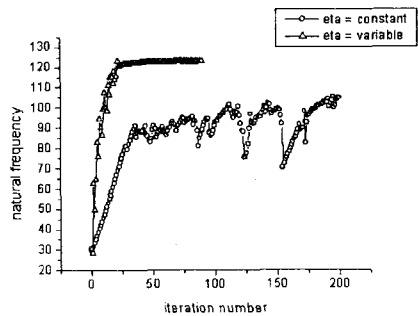
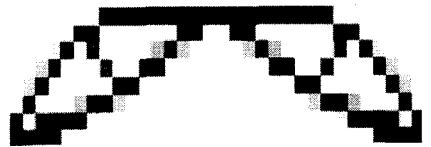


Fig. 4 A comparison of 1st frequency optimization histories for constant η and variant η



(a) Optimal topology for the specified eigenfrequency as 1st frequency 123Hz



(b) Optimal topology for the 1st frequency maximization resulted in 123Hz

Fig. 5 Comparison of optimal topologies for the 1st eigenfrequency of a structure

4.2 양쪽면 중간지점을 고정한 이차원 설계영역

Fig. 6과 같이 가로 7m, 세로 1m인 설계영역을 두께 1m 평판으로 가정한다. 이러한 설계영역 양쪽면의 중간지점을 고정하고 전체설계영역의 40%에 해당하는 재료를 사용하여 구조의 첫번째 고유주파수 f_1 는 주어진 주파수 56Hz와 일치하고, 60%를 사용하여 두번째 고유주파수 f_2 가 200Hz와 일치하는 구조물의 형태를 각각 구해보았다. 설계영역을 700(70x10)의 일정한 4절점 유한요소와 781개의 절점으로 나누었다. 분포 시킬 재료의 성질은 Young율 207GPa, Poisson비 ν 는 0.3, 질량밀도 ρ_0 는 770 kg/m³으로 가정했다. 여기서 주어진 주파수는 Lim과 Lee의 논문⁽¹³⁾을 참고로 하여 각각의 고유주파수를 최대화했을 때의 값으로 설정하여 동일한 레이아웃이 생성되는지 확인하고자 한다. f_1 은 Fig. 7와 같이 가중치가 0.47로 설정되어 249회의 반복과정을 거쳐 55.9Hz로 f_2 는 Fig. 8과 같이 가중치가 0.375로 설정되어 196회의 반복과정을 거쳐 196Hz로 수렴하였다. 그때의 레이아웃은 각각 Fig. 9(a)와 Fig. 10(a)이며, Lim과 Lee의 논문⁽¹⁰⁾과 비교하였다. 이때 f_1 , f_2 , f_3 는 각각 구조의 첫번째, 두번째, 세번째 고유주파수를 나타낸다. Fig. 7에서 보면 f_1 이 처음에는 급하게 상승하여 주어진 주파수 근처로 접근한 후 변형된 최적화기준법을 사용하여 천천히 안정적으로 수렴하고 있다. f_1 이 55.9Hz로 수렴하는 과정에서 f_2 는 이보다 조금 높은 58.46Hz로 수렴함을 볼 수 있었다.

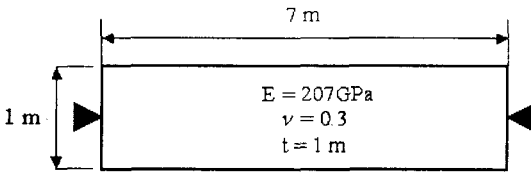


Fig. 6 Short beam with both ends point supported

Fig. 9에서 f_1 이 56Hz를 갖는 변형된 최적화기준법을 사용해서 얻은 레이아웃과 첫번째 고유진동수를 최대화해서 얻은 레이아웃을 비교하였다. Fig. 9(a)는 양쪽 끝으로 질량이 모이면서 바둑판무늬(checkerboard pattern)를 띄고 있지만 Fig. 9(b)는 바둑판무늬현상을 방지한 레이아웃으로 전체적으로 유사한 형상을 볼 수 있었다. f_2 가 196Hz로 수렴할 때 f_3 는 204.63Hz가 되며 f_2 와 f_3 가 일치하는 현상은 보이지 않았다. Fig. 10에서도 바둑판무늬를 방지하면서 f_2 를 최대화한 레이아웃 Fig. 10(b)보다 Fig. 10(a)가 빈 공간이 많이 나타나지만 바둑판무

늬의 방지를 고려하지않은 레이아웃임을 감안하면 전체적인 형상은 일치함을 알 수 있다.

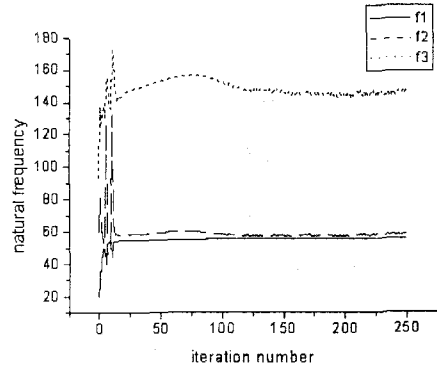


Fig. 7 The convergence history of the 1st eigenfrequency

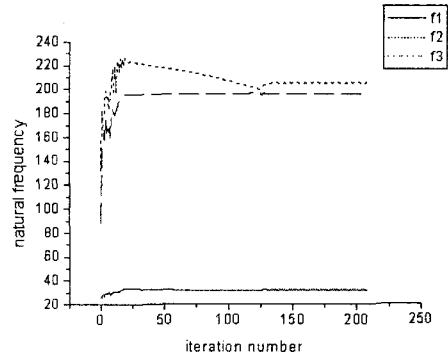
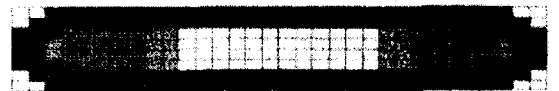


Fig. 8 The convergence history of the 2nd eigenfrequency



(a) Optimal topology for the specified eigenfrequency as 1st frequency 56Hz



(b) Optimal topology for the 1st frequency maximization resulted in 56Hz⁽¹³⁾

Fig. Comparison of optimal topologies for the 1st eigenfrequency of a structure



(a) Optimal topology for the specified eigenfrequency as 1st frequency 200Hz



(b) Optimal topology for the 1st frequency maximization resulted in 200Hz⁽¹³⁾

Fig. 10 Comparison of optimal topologies for the 2nd eigenfrequency of a structure

5. 결론

구조물의 고유주파수가 주어진 주파수를 갖도록 구조의 위상최적설계를 수행하였다. 주어진 주파수와 구조의 지정된 주파수의 차이를 최소화하는 방법으로 최적화문제를 구성하였고, 설계영역에 무수히 많은 미세한 구멍을 분포시켜 최적구조설계문제를 최적재료분포문제로 전환하였다. 기존의 최적화기준법으로 주어진 주파수로 수렴하기 위해서는 가중치의 설정이 중요한 문제로 대두되었다. 가중치를 작게 설정하면 주어진 주파수로 수렴하지만 수렴속도가 너무 느리고, 크게 설정하면 수렴속도는 빠르지만 라그랑지 승수를 못 찾는 경우가 발생하였다. 이러한 문제를 해결하고 빠르고 안정적인 수렴을 하기 위해서 최적화기준법으로 주어진 주파수까지 빠르게 접근시킨 후 이항정리를 사용한 변형된 최적화기준법을 사용하였다. 이때 고려되는 설계변수의 구간을 조정하여 적절한 가중치를 자동으로 찾아 안정적으로 수렴시켰으며, 수렴된 결과를 검증하기 위하여 구조의 고유주파수를 최대화하는 문제에서 얻은 레이아웃과 비교하였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Prager, W. and Taylor, J.E., 1968, "Problems of optimal structural design," J. f Applied Mechanics, Vol. 35, No1, 102-106

(2) Bendsoe, M.P., and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies for Structural Design Using a Homogenization Method," Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, Vol. 71, pp197-224.

(3) 고병천, 1995, "개념설계를 위한 토폴로지 최적화 기법," 대한기계학회지, 제 35 권, 제 8 호, pp. 716~724.

(4) 박상훈, 윤성기, 1997, "구조물의 토폴로지 최적화에 관한 연구," 대한기계학회논문 A 집, 제 21 권, 제 8 호, pp. 1241~1249.

(5) 김병수, 서명원, 1999, "최적조건법에 의한 위상 최적화 연구," 한국자동차공학회논문집, 제 7 권, 제 8 호, pp. 224~232.

(6) Ma, Z. -D., Kikuchi, N., and Hagiwara, I., 1993, "Structural topology and shape optimization for a frequency response problem," Computational Mechanics, Vol. 13, pp157-174

(7) Ma, Z. -D., Kikuchi, N., Cheng, H. -C., and Hagiwara, I., 1995, "Topology optimization technique for free vibration problems", J. Appl. Mech., Vol. 62, pp 200-207

(8) Ma, Z. -D., Kikuchi, N., Cheng, H. -C., and Hagiwara, I., 1995, "Topological design for vibrating structures," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 121, pp259-280.

(9) Xie, Y.M. and Steven, G. P., 1996. "Evolutionary Structural Optimization for Dynamic Problem," Computers & Structures, Vol. 53, No.6, pp 1067-1073.

(10) Kim, T.S. and Kim, Y.Y., 1999. "MAC-Based Mode Tracking in Structural Topology Optimization," Computers & Structures, Vol. 74, No.3, pp 375-383.

(11) 송영준, 민승재, N. Kikuchi, 1999, "유한요소법과 최적구조설계 CAE," 성안당.

(12) Haftka, R. T. and Gurdal, 1992, "Elements of structural optimization (3rd Ed.)," Kluwer, Dordrecht.

(13) Lim, O.K. and Lee, J.S., 2000, "Structural Topology Optimization for the Natural Frequency of a Designated Mode," KSME International Journal, Vol.14 , No. 3, pp 306-313.