

이점 대각 이차 근사화(TDQA) 기법을 적용한 최적설계

김민수* · 김종립** · 최동훈***

Design Optimization Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation(TDQA)

Min-Soo Kim, Jong-Rip Kim and Dong-Hoon Choi

Key Words : Two-point approximation(이점 근사화), Sequential approximate optimization(순차적 근사 최적화)

Abstract

This paper presents a new two-point approximation method based on the exponential intervening variable. To avoid the lack of definition of the conventional exponential intervening variables due to zero- or negative-valued design variables the shifting level into each exponential intervening variable is introduced. Then a new quadratic approximation, whose Hessian matrix has only diagonal elements of different values, is proposed in terms of these intervening variables. These diagonal elements are computed in a closed form, which correct the typical error in the approximate gradient of the TANA series due to the lack of definition of exponential type intervening variables and their incomplete second-order terms. Also, a correction coefficient is multiplied to the pre-determined quadratic term to match the value of approximate function with that of the original function at the previous point. Finally, the authors developed a sequential approximate optimizer, solved several typical design problems used in the literature and compared these optimization results with those of TANA-3. These comparisons show that the proposed method gives more efficient and reliable results than TANA-3.

1. 서론

최적설계에 있어 근사화의 개념은 지금은 일반화된 개념이며, 유한요소 해석과 같은 과중한 수치적 부담을 덜고 최적화의 효율을 높이기 위해 중요한 부분으로 아직도 활발히 연구되고 있다. 근사화의 개념은 1970년대 중반 Schmit 등(Schmit and Farshi, 1974; Schmit and Miura, 1976; Schmit and Fleury, 1980)에 의해 처음 소개된 이후, 신뢰할 수 있는 양질의 근사화 기법의 개발을 위한 활동은 꾸준히 계속되고 있다. 1980년대 대부분의 근사화는 한 점에서의 함수 값과 도함수 값의 정보를 이용하여 일차 또는 이차 테일러 급수 전개를 기초

로 하였다. 그 중에는 선형(linear), 역(reciprocal), 보수(conservative) 근사화(Schmit and Fleury, 1980) 등이 있다. 대부분의 최적화 알고리즘이 최적화 도중 함수 값과 도함수 값을 필요로 하기 때문에, 근사 함수의 생성을 위한 추가적인 수치적 부담이 없으므로 이러한 근사화 기법들은 널리 사용되고 있다. 그러나 이와 같은 근사화 기법들은 그들이 전개된 점의 근방에서만 유효하므로 국부 근사화 기법이다.

최근, 기존의 알고 있는 설계 정보들을 근사 함수의 생성시 최대한 이용하며 상대적으로 넓은 설계영역에 대하여 유효한 많은 다점(multi-point) 근사화 기법들이 제안되었다(Wang and Grahdi, 1995, 1996a, 1996b; Fadel et al., 1990; Xu and Grandhi, 1998). 이점 근사화 기법은 Fadel(1990) 등에 의해 근사화의 질을 높이기 위하여 처음으로 소개되었으며, 그 사용이 간단하여 널리 쓰이고 있다. 이들은 지수 형태의 매개변수를 정의하여 근사화의 비선형

* 회원, 한양대학교, 최적설계신기술연구센터 연구교수

** 한양대학교, 대학원, 기계설계학과

*** 회원, 한양대학교, 최적설계신기술연구센터

성을 조절하였다. Fadel 의 개념을 일반화하여 Wang 과 Grandhi(1995)는 지수형 매개변수를 기초로 하여 개선된 일련의 이점 근사화 기법인 TPEA-change, TANA, TANA-1 그리고 TANA-2 를 개발하였으며, 최근에 Xu 와 Grandhi(1998)는 TANA-2 에서의 $n+1$ 개의 연립 비선형 방정식을 풀어야 하는 수치적 부담을 피하기 위해 헤시언 행렬의 대각요소 가 변할 수 있는 TANA-3 를 개발하였다

본 논문에서는 새로운 이점 대각 이차 근사화 기법(Two-point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA)을 제안하였다. TDQA 는 다른 이점 근사화 기법과는 달리 근사 도함수의 특이성을 방지하기 위해 이동 수준(shifting level)을 갖는 매개변수의 사용을 제안하였다. 또한, 기존의 이점 근사화 방법이 두 설계점의 도함수 값의 부호가 반대인 경우 가지는 단점을 보완하기 위해 대각성분만을 갖는 새로운 개념의 2 차 항을 제안하였다. 여기에 유일하게 정할 수 있는 수정계수를 곱함으로써 이전 설계점에서 실제 함수 값과 근사 함수 값을 일치 시켰다.

2 장에서는 기존의 이점 근사화 방법에 대하여 기술하겠다. 제안한 TDQA 에 대하여 3 장에서 상세히 설명하고, 4 장에서는 제안한 방법을 이용한 최적화 결과 및 효율에 대하여 논할 것이다. 마지막으로 5 장에서 결론을 정리하겠다.

2. 이점 근사 기법의 고찰

이전 설계점 $\mathbf{x}_1(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{n,1})$ 과 현 설계점 $\mathbf{x}_2(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{n,2})$ 에서는 함수 값과 도함수 값을 알고 있다고 하자. 여기서 n 은 설계변수의 개수이다. 또한 함수 $\tilde{g}(\mathbf{x})$ 는 실제 함수 $g(\mathbf{x})$ 의 이점 근사 함수라고 하자.

이점 지수 근사 기법(Two-Point Exponential Approximation, TPEA)은 Fadel(1990) 등이 제안하였으며, 식 (1)의 지수형 매개변수를 사용하였다.

$$y_i = x_i^{p_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

다음으로 \mathbf{x}_2 에서 테일러 급수의 1 차항까지 전개하여 식 (2)와 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \left(\frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i}) \quad (2)$$

여기에서 지수 p_i 는 근사 함수의 이전 설계점의 도함수 값과 실제 도함수 값이 같다는 조건으로부터 식 (3)과 같이 구하여 진다.

$$p_i = 1 + \left\{ \ln \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} / \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \right] / \ln [x_{i,1} / x_{i,2}] \right\} \quad (3)$$

TPEA 에서 p_i 는 $-1 \sim 1$ 로 제한되었으나, Wang 과 Grandhi(1995)는 구조 최적설계 문제에 대하여 이러한 제한을 없앴으로써 더 좋은 결과를 얻을 수 있다고 제안하였다. 이를 수정된 이점 지수 근사화 기법(TPEA-change)이라고 한다.

이점 적응 비선형 근사 기법(Two-point Adaptive Nonlinear Approximation, TANA)은 Wang 과 Grandhi (1995)가 제안하였으며, 적응 매개변수 $y_i = x_i^{r_i}$, $i = 1, \dots, n$ 을 사용하여 \mathbf{x}_2 에서 테일러 급수의 1 차항 까지 전개하여 얻어진다. 여기서 지수 r 은 SAO 의 매 반복단계마다 새로이 계산되나 p_i 와는 달리 모든 변수에 대하여 동일한 값을 취하는 비선형 상수로, \mathbf{x}_1 에서의 실제 함수 값과 근사 함수 값이 같다는 조건으로부터 계산된다.

Wang 과 Grandhi(1995)는 보다 나은 근사화를 위해 TANA 와 TPEA-change 를 조합하여 더 많은 정보를 이용하는 TANA-1 과 TANA-2 를 제안하였다. TANA-1 은 식 (1)과 동일한 지수형 매개변수를 사용하며, 다른 이점 근사화 방법과는 달리 최근의 설계정보를 정확히 표현하기 위하여 이전 설계점인 \mathbf{x}_1 에서 전개되어 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} \left(\frac{x_{i,1}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_{i,1}^{p_i}) + \varepsilon_1 \quad (4)$$

여기서 p_i 는 \mathbf{x}_2 에서의 실제 도함수 값과 근사 도함수 값이 같다는 조건으로부터 계산되어지며, ε_1 은 매개변수 y_i 에 대한 1 차 테일러 급수의 잔차를 나타내는 보정 계수항으로써, 현 설계점 \mathbf{x}_2 에서의 실제 함수 값과 근사 함수 값을 일치시킴으로써 구하여진다.

TANA-2 는 TANA-1 에 테일러 급수의 2 차항을 포함하여 확장되어졌으며, 현 설계점 \mathbf{x}_2 에서 식 (5)와 같이 전개되어 진다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \left(\frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i})^2 \quad (5)$$

여기서 ε_2 는 동일한 값을 갖는 헤시언 행렬의 대각요소를 나타낸다. 식 (5)는 $n+1$ 개의 미지수를 가지고 있기 때문에, p_i 와 ε_2 를 결정하기 위하여 $n+1$ 개의 방정식이 필요하다. n 개의 방정식은 이전 설계점 \mathbf{x}_1 에서의 도함수 값을 일치시킴으로써, 마지막 방정식은 함수 값을 일치시킴으로써 얻을 수 있다. 따라서, 근사화 과정에서 $n+1$ 개의 방정식을 풀어야 하는 수치적 부담을 갖고 있다.

최근 Xu 와 Grandhi(1998)은 식 (1)의 지수형 매개변수를 사용하여, 변할 수 있는 대각요소만을

갖는 헤시언 행렬을 사용하여 불완전한 형태의 2차 테일러 급수 전개로 TANA-3 를 제안하였는데, 현 설계점 \mathbf{x}_2 에서 식 (6)과 같이 전개된다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \left(\frac{x_i^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_3(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i})^2 \quad (6)$$

여기서

$$\varepsilon_3(\mathbf{x}) = H \left/ \left[\sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_{i,1}^{p_i})^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i})^2 \right] \right. \quad (7)$$

이다. p_i 와 H 는 이전 설계점 \mathbf{x}_1 에서의 정보로부터 유일해를 가진다. p_i 는 식 (3)과 동일하게 구하여지며, H 는 식 (8)과 같다.

$$H = 2 \left[g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} (x_{i,1}^{p_i} - x_{i,2}^{p_i}) \right] \quad (8)$$

이때 식 (3)의 분자 또는 분모의 로그 속의 비가 음수이거나, 분모가 1 에 가까울 경우를 위한 수치적인 고려가 필요하다. 전자의 경우 Xu 와 Grandhi(1998)은 p_i 를 1 또는 -1 로 두었다. 후자는 최적설계가 수렴영역에 가까울 경우로 생각하여 설계변수의 변화가 적으므로 역시 p_i 를 1 또는 -1 로 두었다. 반면 p_i 가 너무 큰 값을 갖는 경우 근사화가 나빠질 수 있으므로 경계값 $p_{\max} = 5$ 를 두어 $|p_i| \leq p_{\max}$ 로 제한하였다.

TANA-3 는 $n+1$ 개의 비선형 연립방정식을 풀어야 하는 TANA-2 의 부담은 해결하였으나, 가변적 이차항으로 인하여 다음과 같은 3 가지의 문제점을 여전히 안고 있다.

- TANA-3 는 실제 함수가 두 설계점 사이에서 볼록 함수(convex function)일 경우에도, 변곡점을 가질 수 있다.
- Xu 와 Grandhi 의 수치적인 고려가 있으나, 식 (4)의 분자 또는 분모가 음수인 경우에는 근사화의 정확도는 보장되지 않는다.
- TANA-3 는 실제 함수와는 다른 도함수 값을 줄 수도 있다. 즉, 실제 함수 $g(\mathbf{x})$ 의 도함수가 0 인 경우에도, $\varepsilon_3(\mathbf{x}) \neq 0$ 또는 $\partial \varepsilon_3(\mathbf{x}) / \partial x_i \neq 0$ 이면 식 (9)와 같이 근사 도함수 값은 0 이 아니다.

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_3(\mathbf{x})}{\partial x_i} (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i})^2 + \varepsilon_3(\mathbf{x}) (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i}) p_i x_i^{p_i-1} \quad (9)$$

보정 계수 ε_2 를 $\varepsilon_3(\mathbf{x})$ 의 단순화 된 형태로 생각할 수 있으므로, 이러한 문제점들은 TANA-2 에서도 유사한 경향으로 발생할 수 있다.

3. 이점 대각 이차 근사 기법

3.1 기본 개념

새로이 제안하는 이점 대각 이차 근사 기법(Two-point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA)은 식 (1)과 같은 지수형 매개변수를 사용하나, 새로이 이동 수준(shifting level)을 도입하여 식 (10)과 같은 형태의 지수형 매개변수를 사용한다.

$$y_i = (x_i + c_i)^{p_i}, \quad i=1, \dots, n \quad (10)$$

여기에서 c_i 는 설계변수 x_i 에 대한 이동 수준이다. 미지 지수 p_i 는 TPEA 또는 TANA-3 와 같이 식 (3)과 같은 형태로 이전 설계점 \mathbf{x}_1 에서의 도함수를 일치시킴으로써 구하여지며, 식 (11)과 같다.

$$p_i = 1 + \left\{ \ln \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}_1) / \partial x_i}{\partial g(\mathbf{x}_2) / \partial x_i} \right] / \ln \left[\frac{(x_{i,1} + c_i)}{(x_{i,2} + c_i)} \right] \right\} \quad (11)$$

제안한 새로운 이차 근사 기법의 현 설계점 \mathbf{x}_2 에서의 전개식은 식 (12)와 같다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_i - y_{i,2}) + \sum_{i=1}^n G_i (y_i - y_{i,2})^2 \quad (12)$$

헤시언 행렬의 대각 요소 G_i 는 이전 설계점에서의 근사 도함수의 오차를 수정하기 위하여 식 (13)과 같이 정의한다.

$$G_i = \frac{1}{2(y_{i,1} - y_{i,2})} \left(\frac{\partial g(y_1)}{\partial y_i} - \frac{\partial g(y_2)}{\partial y_i} \right) \quad (13)$$

따라서, $\partial g(y_1) / \partial y_i = \partial g(y_2) / \partial y_i$ 를 만족시키기 위하여 결정된 p_i 는 $G_i=0$ 을 만족한다. 마지막으로 이전 설계점에서의 함수 값의 일치 $\tilde{g}(\mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_1)$ 를 위하여 수정 계수 η 를 식 (14)와 같이 결정할 수 있다.

$$\eta = \frac{g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_{i,1} - y_{i,2})}{\sum_{i=1}^n G_i (y_{i,1} - y_{i,2})^2} \quad (14)$$

결과적으로 제안하고자 하는 방법인 TDQA 의 최종 근사식은 식 (15)와 같다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_i - y_{i,2}) + \eta \sum_{i=1}^n G_i (y_i - y_{i,2})^2 \quad (15)$$

3.2 TDQA 의 수치적 고려 사항

본 절에서는 TDQA 를 위한 c_i, p_i, G_i, η 의 4 가지

인자를 결정하기 위한 수치적인 고려 사항들을 살펴보겠다

이동 수준 c_i 는 설계변수 x_i 가 임의의 작은 양수 값 ζ 보다 작을 경우에만 $c_i = |x_i^l| + 1$ 을 사용하며, 그 외 경우에는 $c_i = 0$ 으로 한다. 여기서 x_i^l 은 설계변수 x_i 의 하한 경계치를 의미한다. 이동 수준은 $x_i = 0$ 근방에서의 근사 도함수의 특이성 (singularity)과 $x_i < 0$ 에 대한 다른 이점 근사 기법들의 근본적인 문제점을 극복하기 위하여 제안되었으며, $\zeta = 1 \times 10^{-3}$ 을 추천한다.

식 (11)의 분자 또는 분모의 로그 속의 비가 음의 값이나, 또는 $p_i = 0$ 일 경우 수치적인 고려가 필요하다. 분자의 경우 $p_i = 1$ 로 설정하였다. 이것은 G_i 의 정의로부터 x_i 에 대한 이차 근사화를 표현한다. 또한 분모가 $\left| \frac{(x_{i,1} + c_i)}{(x_{i,2} - c_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon$ 과 같이 0 근방일 경우 $p_i^k = p_i^{k-1}$ 로 설정하였으며, $p_i^0 = 1$ 로 하였다. 여기서 상첨자 k 는 SAO 의 반복 단계를 나타내며, $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ 을 추천한다. p_i 의 값이 너무 크면 근사화가 나빠질 수 있으므로, $p_{\max} = 5$ 를 사용하여 $|p_i| \leq p_{\max}$ 로 설정하였다.

식 (13)의 분모가 0 에 가까울 경우 G_i 의 값은 수치적으로 무한대가 될 수 있으며, 이것은 근사화의 질을 나쁘게 한다. 따라서, $|y_{i,1} - y_{i,2}| \leq \varepsilon |y_{i,2}|$ 이면 $G_i = 0$ 으로 설정하였으며, $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ 을 추천한다.

식 (14)의 분모가 작은 값일 경우 수정 계수 η 는 매우 큰 값이 될 수 있는데, 이것은 근사 함수의 질은 향상시킬지라도 근사 도함수의 질은 나쁘게 한다. 따라서 식 (16)과 같은 조건을 판단하여 η 값을 결정한다.

$$\left| \sum_{i=1}^n G_i (y_{i,1} - y_{i,2})^2 \right| > \varepsilon \left| g(\mathbf{x}_1) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_{i,1} - y_{i,2}) \right| \quad (16)$$

여기서 $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ 을 추천한다. 만약 식 (16)의 조건을 만족한다면 식 (14)로 구한 값을 사용하며, 그렇지 않을 경우에는 $\eta = 1$ 로 설정하였다. 즉, 식 (14)의 분모(근사 함수의 이차 항)가 분자(근사 함수의 선형 항)의 1%보다 클 경우에는 구하여진 η 값을 사용하며, 작을 경우에는 오차가 1% 미만이므로 이전 설계점에서의 함수 값의 일치치를 고려하지 않았다.

4. 수치적 예제

4.1 기계 시스템 설계

[예제 1] 코일 스프링 설계

코일 스프링의 중량을 최소화하는 문제이며, 구

속 조건으로는 최소 변위, 전단 응력, 서지(surge) 진동수와 스프링의 외경 제한이 있다. 설계변수는 와이어의 직경 x_1 , 평균 코일 직경 x_2 와 코일의 유효 감긴 회수 x_3 이다.

초기 설계점과 설계 상·하한치는 $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{x}^l = (0.05, 0.05, 1)^T$ 및 $\mathbf{x}^u = (5, 5, 15)^T$ 이다. 최적해는 $f(\mathbf{x}^*) = 0.01268$ 로 주어져 있으며, 보다 상세한 내용은 Arora, 1989: pp. 451-453 을 참고하기 바란다.

최적화 결과는 Table 1 에 나타냈으며, TANA-3 에 비해 TDQA 가 더 좋은 결과를 주었다. TANA-3 의 수렴과정 중 7 번째 반복과정을 살펴보자. 6 번째와 7 번째 과정, 즉, $\mathbf{x}_6 = (0.1693, 1.0183, 1.5922)^T$ 와 $\mathbf{x}_7 = (0.0931, 1.5673, 1.8075)^T$, 사이에서 구속 조건 g_1 만이 TANA-3 에서 활성 구속조건이므로 두 근사 기법의 \tilde{g}_1 과 $\nabla \tilde{g}_1$ 의 정확도를 살펴보자. TANA-3 의 지수 p_i 는 식 (3)에 의한 값이 p_{\max} 값보다 크므로 $(-5, 5, 5)$ 를 가진다. 또한, H 는 -1.04726 로 계산된다. 한편, TDQA 에서는 $c_i = 0$ 이므로, TANA-3 와 같은 지수 p_i 를 가진다. 또한 G_i 와 η 는 각각 $(0, -0.00396, -0.0071)$ 과 0.85968 로 계산된다.

방향 벡터 $\mathbf{s} = \mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_7$ 이라고 하고, $\alpha = (0, 1)$ 에서의 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_7 + \alpha \mathbf{s}$ 에 대한 실제 및 근사 함수 값을 구할 수 있다. 이에 대하여 Fig. 1 에 도시했다. 두 근사 기법에 의한 함수 값이 양 끝점에서 잘 일치하나, TANA-3 는 구간 $(0, 1)$ 에서 여러 굴곡이 있음을 알 수 있다. 반면, TDQA 는 전구간에서 잘 일치하고 있다. 두 근사 기법은 같은 지수 p_i 를 사용하였으므로, 이러한 차이는 이차 항에 의한 것임을 알 수 있다.

보다 정확한 비교를 위하여, 방향 도함수를 Fig. 2 에 도시하였으며, $dg_1/d\alpha = \nabla g_1 \cdot \mathbf{s}$ 로 정의된다. 현 설계점($\alpha = 0$)에서는 정확히 일치하고 있으나, 심한 근사 오차가 존재함을 Fig. 2 에서 볼 수 있다. $\alpha = 0.17$ 에서의 비교값을 Table 2 에 나열하였다. 이를 통하여 TANA-3 의 오차는 $\partial g_1/\partial x_1$ 의 부호가

Table 1 Comparisons of optimization results for the coil spring design (*prematurely converged).

	Initial design	TDQA	TANA-3
x_1	1.0	0.0529	0.0584
x_2	2.0	0.3863	0.5417
x_3	3.0	9.7938	5.2745
f	10.0	0.0127	0.0134*
g_{\max}	1.0	0.0000	0.0006
Iterations	-	11	7

Table 2 Comparisons of approximate derivatives at $\alpha = 0.17$

	$\partial g_1/\partial x_1$	$\partial g_1/\partial x_2$	$\partial g_1/\partial x_3$	$\partial g_1/\partial \alpha$
Exact value	23.52	-1.27	-0.35	4.31
TDQA	19.18	-1.53	-0.54	4.07
TANA-3	-1.75	-1.92	-0.65	1.79

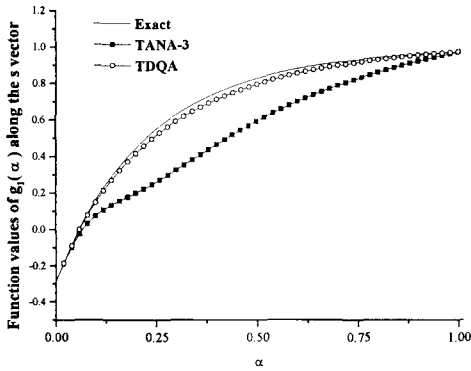


Fig. 1 Comparison of the approximate function values along the s vector.

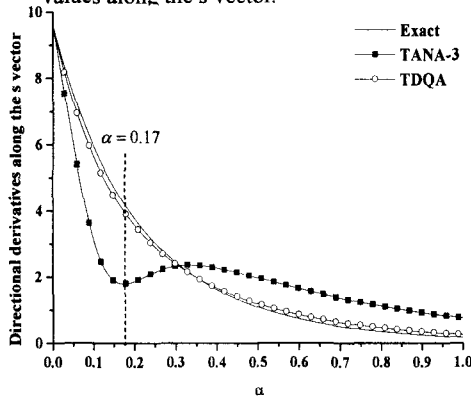


Fig. 2 Comparison of the approximate gradient values along the s vector.

실제와 다름에 기인한 것임을 알 수 있다. 이러한 현상의 이유는 2.2 절에서 설명을 하였으며, H 와 G_i 의 차이에서 오는 것이라 저자는 생각한다. 따라서, 수치적 최적화 과정에서 TANA-3 는 잘못된 방향 벡터를 제공할 수 있다.

[예제 2] 피스톤 설계

상용 최적설계 프로그램인 DOT (Vanderplaats, 1995)에 수록 되어있는 문제로서, 목적 함수는 0° 에서 45° 까지 들어올리는데 필요한 기름의 부피를 최소화하는 것이다. 구속조건은 힘의 평형 상태, 보의 최대 굽힘 응력, 최소의 피스톤 스트로크 (stroke) 등 이다. X_3 는 $L/2$ 의 위치를 넘어서는 안 되며, 지지 위치는 적어도 피스톤 직경의 1/2 이상 이어야 한다. 설계변수는 거리 X_1, X_2, X_3 그리고, D

Table 3 Comparisons of optimization results for the piston design (*: prematurely converged).

	Initial Design	TDQA	TANA-3
X_1	84.0	60.3341	795.7932
X_2	60.0	8.8525	42.2144
X_3	84.0	120.0	60.0043
D	6.0	5.9655	5.8274
f	1584.4066	1045.5668	1126.3162
Iterations	-	10	13

이다. 초기 설계점은 $x_0 = (84.0, 60.0, 84.0, 6.0)$ 이고, 설계변수의 하한치는 모두 0.05 이고, 상·한치는 설계변수 X_3 만 120 이며, 나머지는 모두 1000 이다. 최적해는 $x^* = (50.90, 3.27, 120.0, 6.52)$ 로 알려져 있다.

최적화 결과는 Table 3 에 나타냈으며, TANA-3 는 다른 국부 최적해에 수렴한 것을 알 수 있다. 반면 TDQA 는 DOT 에서 제안한 최적해에 근사한 최적해가 수렴한 것을 알 수 있다. 이 이유는 앞서의 스프링 설계 문제에서와 같이 최적설계 과정에서 TANA3 의 도함수 값이 부정확하여 다른 방향의 최적해에 수렴한 결과라고 할 수 있다.

4.2 10 부재 트러스 설계

이 문제는 Haug 와 Arora(1979) 등 많은 문헌에서 다루어졌던 문제이며, 전체 부재의 체적을 최소화하는 문제이다. 설계변수는 각 부재의 단면적 이고, 상·하한치는 매개변수의 이동 상수 효과를 알아보기 위해 0.0001 in^2 과 50 in^2 로 하였으며, 초기점은 각 부재 모두 1.0 in^2 이다.

[조건 1]

하중은 절점 2 와 4 에서 음의 y -방향으로 100 kips 이 작용한다. 이때의 각 부재의 허용 응력은 인장, 압축을 고려한 $\sigma_a = 25 \text{ kpsi}$ 이다.

Table 4 에 최적설계의 결과를 나타내었다. 결과에서 제안한 TDQA 의 경우 부재 2, 5, 6, 10 의 단면적이 하한치까지 닿은 것을 확인할 수 있다. 그러나 TANA-3 의 경우는 그렇지 못한 것을 알 수 있다. 즉, 제안한 이동 상수의 사용이 해의 수렴에 좋은 영향을 준 것으로 생각 할 수 있다.

[조건 2]

[조건 1]과 모든 조건은 동일하며, 절점 1, 2, 3, 4 의 상하 방향 변위 구속조건이 추가된 문제이다. 변위의 구속조건은 $\delta_a = \pm 2.0 \text{ in}$ 이다. 두 경우 모두 정확한 최적해에 수렴하였다.

[조건 3]

하중 조건을 제외한 모든 조건은 [조건 1]과 동일하다. 이 문제에서는 절점 2, 4 에서 하중이 음의 y -방향으로 150 kips 작용하고 있으며, 절점 1, 3 에서는 양의 y -방향으로 50 kips 작용한다. 결과에서 두 경우 비슷한 결과를 나타냈다.

[조건 4]

각 절점의 변위 구속조건 $\delta_a = \pm 2.0 \text{ in}$ 가 추가적으로 있는 것을 제외하고는 [조건 3] 문제와 동일하다. Table 5 의 결과에서 보듯 이 문제 역시 제한한 매개변수로 인해 설계변수 x_2 가 TDQA 의 경우 정확히 최적해인 설계변수의 하한치에 수렴한 반면에 TANA-3 는 그렇지 못한 것을 알 수 있다.

Table 4 Comparisons of optimization results for ten-member truss design: case-1

	Initial design	TDQA	TANA-3
x_1	1.0	7.9998	7.9545
x_2	1.0	0.0004	0.0624
x_3	1.0	8.0001	8.0427
x_4	1.0	3.9998	3.9523
x_5	1.0	0.0001	0.0001
x_6	1.0	0.0004	0.0624
x_7	1.0	5.6564	5.7204
x_8	1.0	5.6565	5.5934
x_9	1.0	5.6565	5.5933
x_{10}	1.0	0.0003	0.0925
f	419.64	1583.97	1588.15
g_{max}	7.19	0.0001	0.0007
Iterations	-	10	14

Table 5 Comparisons of optimization results for ten-member truss design: case-4

	Initial design	TDQA	TANA-3
x_1	1.0	22.9287	23.0235
x_2	1.0	0.0001	0.9974
x_3	1.0	25.3236	25.2012
x_4	1.0	14.2363	14.2246
x_5	1.0	0.0001	0.0001
x_6	1.0	2.0003	2.0002
x_7	1.0	12.7557	12.7519
x_8	1.0	12.1823	12.1201
x_9	1.0	20.1744	20.3548
x_{10}	1.0	0.0001	0.0001
f	419.64	4619.15	4658.67
g_{max}	19.06	0.0010	0.0002
Iterations	-	8	8

5. 결론

본 논문에서는 지수형 매개변수를 갖는 새로운 이점 대각 이차 근사 기법 TDQA 를 제안하였다. 본 방법에서는 이동 수준을 제안하여 기존의 이점 근사 기법들이 안고 있는 설계변수가 0 근방 또는 음수일 때의 수치적인 어려움을 극복하였다. 또한 제안한 방법은 기존의 근사 기법들이 불완전한 매개변수의 정의에 기인한 불록 함수의 근사화가 힘든 경우와 불완전한 이차 항에 기인한 설계변수들이 서로 다른 방향의 기울기를 갖는 경우를 표현하지 못하는 단점을 극복하였다.

TDQA 와 TANA-3 의 근사 기법을 사용하여, 2 가지 기계 시스템 설계 문제와 10 부재 트러스 설계 문제의 4 가지 경우에 대하여 순차적 근사 최적설계를 수행하였다. 이러한 예제를 통하여 2 장에서 설명한 TANA-3 의 단점과 제안한 이동 수준의 성능을 보였다. 또한 TDQA 와 TANA-3 의 성능을 비교하였으며, 제안한 근사 기법의 우수성을 보였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 연구비 지원과 교육부 지원 BK21 사업 연구비 지원으로 수행되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, New York, pp. 489-493.
- (2) Fadel, G.M., Riley, M.F. and Barthelemy, J.F.M., 1990, "Two Point Exponential Approximation Method for Structural optimization", *Structural Optimization*, Vol.2, pp. 117-124.
- (3) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, *Applied optimal Design Mechanical and Structural Systems*, John Wiley & Sons, New York, pp. 242-245.
- (4) Reklaitis, G.V., Ravindran, A. and Ragsdell, K.M., 1983, *Engineering Optimization Methods and Applications*, John Wiley & Sons, New York, pp. 11-15.
- (5) Schmit, L.A. and Farshi, B., 1974, "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", *AIAA Journal*, Vol.12, pp. 692-699.
- (6) Schmit, L.A. and Miura, H., 1976, "A New Structural Analysis/Synthesis Capability -ACCESS I", *AIAA Journal*, Vol. 14, pp. 661-671.
- (7) Schmit, L.A. and Fleury, C., 1980, "Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods", *AIAA Journal*, Vol, 18, pp.1252-1260.
- (8) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering with Applications*, McGraw-Hill, New York, pp. 195-199.
- (9) Vanderplaats, G.N., 1995, *DOT Users Manual: version 4.20*, Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs.
- (10) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1995, "Improved Two-Point Function Approximation for Design Optimization", *AIAA Journal*, Vol.33, No.9, pp.1720-1727.
- (11) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1996a, "Multipoint Approximations: Comparisons Using Structural Size, Configuration and Shape Design", *Structural Optimization*, Vol. 12, pp.177-185.
- (12) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1996b, "Multivariate Hermite Approximation for Design Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 787-803.
- (13) Xu, S. and Grandhi, R.V., 1998, "An Effective Two-Point Function Approximation for Design Optimization", *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 39th Structural, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long beach CA, April 20-23*, pp. 2181-2191.