

공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터의 교차점 계산

박배용*·안정호**

Finding an Intersection Point between Cutter Swept Surface with a Z-Direction Vector

Park, Pae-Yong · Ahn, Jeong-Ho

Key Words: Cutter Swept Surface, Cutter surface, Z-map, Intersection

Abstract

Finding intersection point between a surface and a line is one of major problem in CAD/CAM. The intersection point could be found in an exact form or with numerical method. In this paper, the exact solution of the intersection point between a ruled surface which is generated by the movement of an endmill and the z-direction vector is presented. The cutter swept surface which is a ruled surface and the Z-direction vector are represented with parametric equations. With the nature of parametric equations, the geometric properties at the intersection point are easily acquired.

* 숭실대학교 대학원

** 숭실대학교

1. 서론

NC절삭과정의 모의 가공은 가공 상태를 검증함으로써 값비싼 공구와 재료의 낭비를 줄이고, 제품의 개발 시간을 단축해 주는 효과가 있다. 공구곡면(Cutter Surface) 및 공구 이동 궤적면(Cutter swept Surface)의 모델링은, 모의 가공을 위한 하나의 과정으로, 가공재와 엔드밀의 교차 계산을 통하여 실제 가공 상태를 검증하려는데

필요하다. Z-map 기반 모의 가공을 위해 Z-direction 벡터와 공구곡면 및 공구 이동 궤적면의 교차점 계산은 필수적이다. Z-map은 1978년 Anderson⁽¹⁾에 의해 개발되었고, 그 후 많은 연구자들에 의해 그 종류 및 적용 범위가 확대되었다. 기존의 모의 가공을 위한 공구 이동 궤적면은 Chung & Choi⁽²⁾의 논문에 여러 가지 경우가 언급되어 있다. Chung & Choi는 공구 이동 궤적면의 비매개 변수형 모델링을 구현하여 공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터의 교차점을 하였다.

본 연구에서는 공구 이동 궤적면의 매개변수형 모델링을 구현하고, 삼각 격자 Z-Map⁽³⁾을 데이터 모델로 하여 공구곡면 및 공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터의 교차점을 구하고자 한다.

2. 공구 이동 궤적면의 매개 변수형 모델링

엔드밀은 형태에 따라 평 엔드밀(Flat endmill), 볼 엔드밀(Ball endmill) 그리고 라운드 엔드밀(Round endmill)로 크게 나눌 수 있다. 각각의 경우에 대한 공구곡면(Cutter Surface)의 매개변수형 모델을 구한다. 이 때, 평 엔드밀 및 볼 엔드밀은 라운드 엔드밀의 특수한 형태들로 정의될 수 있다. 따라서, 먼저 라운드엔드밀에 대한 모델링을 실시하고, 나머지 엔드밀들의 모델링을 구하기로 한다.

2.1 엔드밀의 공구곡면

Fig. 1에서와 같이, 라운드 엔드밀의 형상은 평 엔드밀의 바닥부 가장자리가 라운딩 된 것으로 볼 수 있다. 라운드 엔드밀의 바닥부는 가장자리의 토러스(Torus)부와 중심부 바닥 평면의 합으로 모델링 될 수 있다. 즉, 라운딩 된 부분은 토러스부로, 나머지 가운데 부분은 평면의 형태를 지니게 된다. 데이터 모델로 사용한 Z-Map의 특성상, Z-direction 벡터와 공구곡면의 교차점을 계산하는데 있어서, 평면과 직선의 교차점은 높이 값의 차이로 쉽게 계산될 수 있다. 물론 5축 가공이라 할지라도 직선과 평면의 교차점 계산은 간단하다. 토러스부는 Z-direction 벡터와의 교차점 계산을 실시해야 한다.

라운드 엔드밀의 토러스부 공구곡면 $T(R, r, \theta, \phi)$ 는 다음과 같은 수식으로 표현된다. 단, 본 논문에서의 공구 경로는 Fig. 1과 같이, 토러스부의 중심 O 를 좌표계의 원점으로 한다. 즉, 볼엔드밀에서는 반구의 중심, 평엔드밀에서는 평면의 중심이 된다.

$$T(R, r, \theta, \phi) = \{RC_\theta + rC_\phi C_\theta, RS_\theta + rC_\phi S_\theta, -rS_\phi\} \quad (1)$$

여기서,

R : 토러스 중심까지의 반경, r : 라운드 반경

$R+r$: 공구 반경

$C_\theta : \cos(\theta), S_\theta : \sin(\theta)$

$C_\phi : \cos(\phi), S_\phi : \sin(\phi)$

θ : 원주방향회전각, ϕ : 축방향회전각

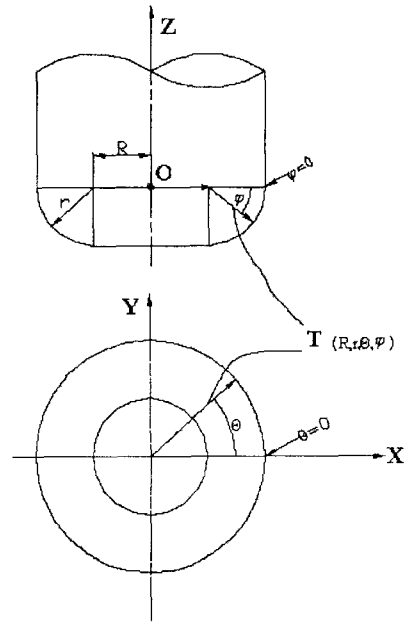


Fig. 1 Cutter surface of the round endmill

볼 엔드밀은 라운드 엔드밀의 공구곡면 수식에서, 토러스 중심까지의 반경 R 이 0이 되고, 라운드 반경 r 이 공구반경이 된다. 따라서, 다음과 같은 수식으로 유도될 수 있다.

$$T(0, r, \theta, \phi) = \{rC_\phi C_\theta, rC_\phi S_\theta, -rS_\phi\} \quad (2)$$

평 엔드밀은 라운드 엔드밀의 수식에서 R 이 공구 반경이 되고, 라운드 반경 r 이 0이 되는 경우이다.

$$T(R, 0, \theta, \phi) = \{RC_\theta, RS_\theta, 0\} \quad (3)$$

2.2 엔드밀의 공구 이동 궤적면

공구 이동 궤적면은, 단일 직선 공구 경로를 대상으로 할 때, 공구 진행방향의 앞쪽에서 공구를 바라보았을 때 공구곡면상에 나타나는 실루엣 곡선(Silhouette Curve)⁽⁴⁾에 의해 결정된다. 즉, 공구 이동 경로와 실루엣 곡선의 보간에 의해 생기는 룰드 곡면(Ruled Surface)이다.

Fig. 2에서 라운드 엔드밀의 공구 진행 벡터를 \mathbf{a} 라 하면, 이는 단일 공구 경로의 시점 $\mathbf{P}_s(w)$ 과 끝점 $\mathbf{P}_e(w)$ 에 의해 형성되는 벡터이다. Fig. 2의 빗금친 부분이 공구 이동 궤적면을 나타낸다. 라운드 엔드밀의 공구곡면 $\mathbf{T}(R, r, \theta, \phi)$ 와 \mathbf{a} 의 내적이 0이 되는 경우의 공구곡면상의 점들이 실루엣 곡선($\mathbf{C}(r, r, \theta)$)을 형성하게 된다.

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_e(w) - \mathbf{P}_s(w) = \{a_x, a_y, a_z\}$$

$$\mathbf{C}(R, r, \theta) = \left\{ \begin{aligned} &RC_\theta + \frac{ra_z C_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}}, \\ &RS_\theta + \frac{ra_z S_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}}, \\ &-\frac{r\{a_x C_\theta + a_y S_\theta\}}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

공구 경로 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{P}(w) = (P_{sx} + wa_x, P_{sy} + wa_y, P_{sz} + wa_z) \quad (5)$$

구해진 실루엣 곡선($\mathbf{C}(R, r, \theta)$)과 공구 경로 벡터($\mathbf{P}(w)$)의 보간에 의해 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{S}(R, r, \theta, w) = \left\{ \begin{aligned} &RC_\theta + \frac{ra_z C_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sx} + wa_x, \\ &RS_\theta + \frac{ra_z S_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sy} + wa_y, \\ &-\frac{r\{a_x C_\theta + a_y S_\theta\}}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sz} + wa_z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

단, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq w \leq 1$ 이다.

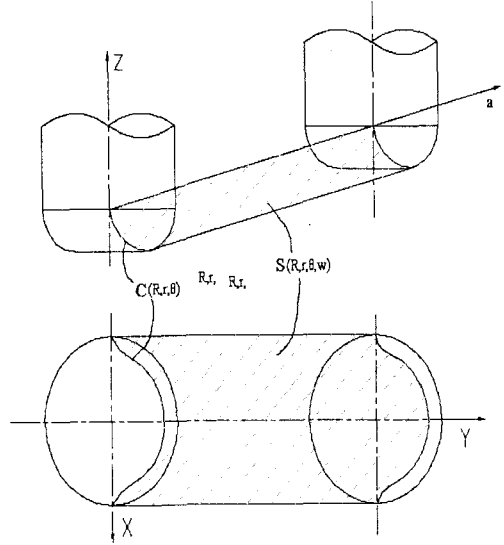


Fig. 2 Cutter swept surface of round endmill.

볼 엔드밀은 공구곡면을 구할 때와 마찬가지로, 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면의 수식에 $R=0$ 를 대입함으로써 얻어질 수 있으며, 다음과 같은 수식으로 유도된다. 즉, r 이 공구반경이 된다.

$$\mathbf{S}(0, r, \theta, w) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{ra_z C_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sx} + wa_x, \\ &\frac{ra_z S_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sy} + wa_y, \\ &-\frac{r\{a_x C_\theta + a_y S_\theta\}}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sz} + wa_z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

평 엔드밀은 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면의 수식에 $r=0$ 를 대입함으로써 얻어진다. 즉, R 이 공구반경이 된다.

$$\mathbf{S}(R, 0, \theta, w) = \begin{pmatrix} RC_\theta + P_{sx} + wa_x \\ RS_\theta + P_{sy} + wa_y \\ P_{sz} + wa_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

3. 공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터의 교차점 계산

볼 및 평 엔드밀의 공구 이동 궤적면은 라운드 엔드밀의 특수한 경우이므로, 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터와의 교차점을 찾으면, 볼 및 평 엔드밀의 경우도 쉽게 적용할 수 있다. 따라서, 라운드 엔드밀의 경우를 기준으로 교차점 계산 과정을 보인다.

Z-direction 벡터는

$$\mathbf{z}(t) = \{z_{sx}, z_{sy}, z_{sz} + t(z_{oz} - z_{sz})\} \quad (9)$$

이다. 여기서, $z_{sz} = 0$ 이다.

식(6)과 식(9)를 등식으로 놓고 계산하여 Z-direction 벡터의 파라미터 t 를 구하면 공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터의 교차점을 찾게된다.

공구이동 궤적면과 Z-direction 벡터의 교차 계산은, X-Y-Z 각 축의 성분들의 등식에 의한 연립방정식으로 유도된다.

얻어진 연립방정식은 Ferrari의 4차 방정식 해법과 Cardano의 3차 방정식 해법을 이용하면 해를 구할 수 있다.

4. 적용 및 가시화

본 연구에서는 삼각 격자 Z-map 데이터 모델을 사용하여 공구 곡면 및 공구 이동 궤적면과의 교차점 계산을 하였다. Fig. 3은 X-Y평면과 Z-map 데이터 및 공구 이동 경로를 보여준다. Fig. 4는 라운드 엔드밀로 절삭하였을 때의 절삭흔을 보여준다. Fig. 5 - Fig.7 은 OpenGL을 이용하여 렌더링한 그림들이다.

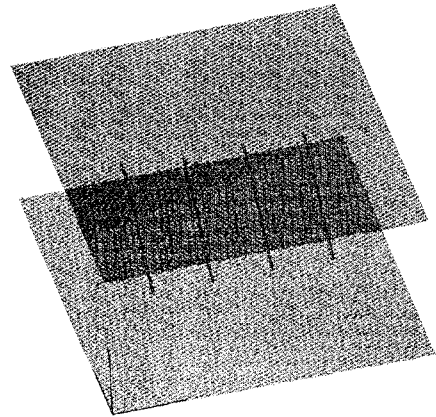


Fig. 3 Z-map data and tool path.

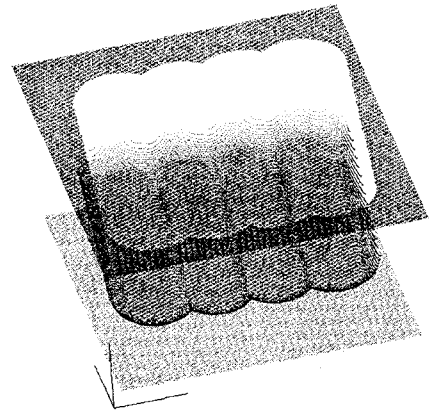


Fig. 4 Z-map data after milling operation.

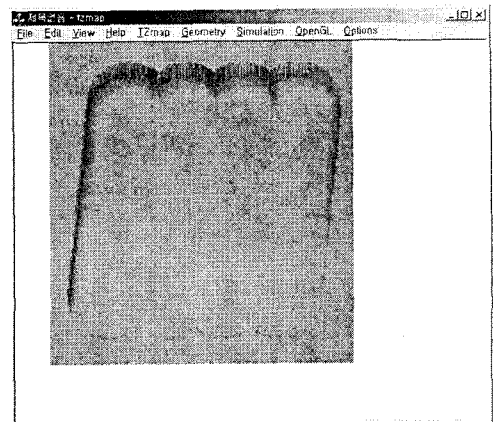


Fig. 5 Rendered image of cutter swept surface.

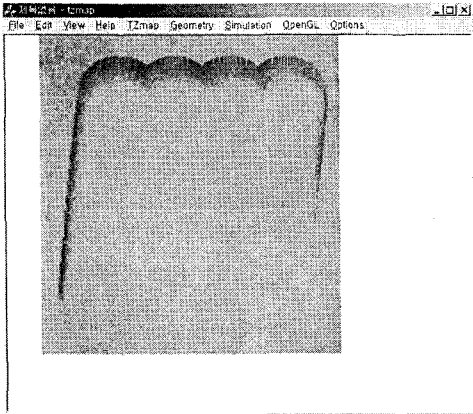


Fig. 6 Rendered image with smoothing.

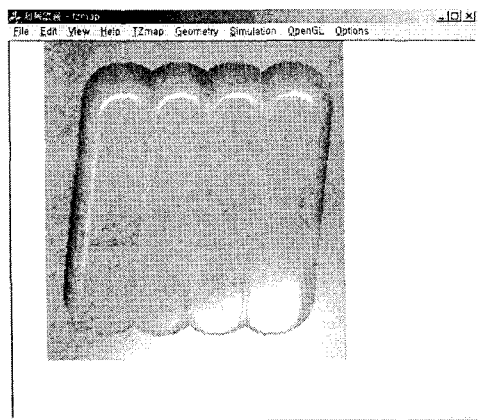


Fig. 7 Rendered image with specular light source.

6. 결론

본 연구에서는, 모의 절삭 가공에 있어서 필요한 공구 곡면 및 공구 이동 궤적면의 매개변수형 모델링을 구현하였다. 공구 이동 궤적면은 공구 곡면과 공구 경로 벡터에 의해 생성된 월드곡면으로 볼 수 있으며, 공구 이동 궤적면과 Z-direction 벡터와의 교차점을 계산하였다. 향후, direction 벡터와 공구 이동 궤적면과의 교차점을 계산하고자 한다.

1. Anderson, R.O., 1978, "Detecting and eliminating collisions in NC machining", *Computer-Aided Design*, 10(4), pp. 231-7
2. 정연찬, 최병규, 1996, "모의가공을 위한 공구 이동 궤적면의 비매개변수형 모델링", 한국 CAD/CAM 학회 논문집 1권, pp. 45-55
3. 박배용, 안정호, 2000, "삼각격자를 이용한 Z-map 모델", 대한기계학회 추계학술대회 논문집, pp. 824-828
4. 박배용, 안정호, 1996, "커스프 하이트의 기하학적 해석", 한국 CAD/CAM 학회 학술발표회 논문집 pp. 59-64
5. Jerard, R.B., Drysdale, R.L. and Hauck, K. Schaudt, B. and Magewick, J. 1989, "Methods for detecting errors in sculptured surface machining", *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(1), 26-39
6. B.K. Choi, R.B. Jerard, 1998, *Sculptured Surface Machining Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, pp. 110-112
7. Wang, W.P. and Wang, K.K., 1986, "Geometric modeling for swept volume of moving solids", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Dec., 6(12), pp. 8-17
8. I.T. Chappel, 1983, "The Use of Vectors to Simulate Material Removed by Numerically Controlled Milling", *Computer-Aided Design*, Vol. 15, No. 3, pp. 156-158
9. Van Hook, T., 1986, "Real-time shaded NC milling display", *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH)*, Aug., 20(4), pp. 15-20