

후향단유동내 경계층의 재발달에 미치는 경계조건의 영향

김동일*, 이문주**, 전중환**

Effects of Boundary Conditions on Redevelopment of the Boundary Layer in a Backward-Facing Step Flow

Dong-Il Kim*, Moon J. Lee** and Chung-Hwan Chun**

Key Words : Backward-Facing Step Flow (후향단 유동), Shear-Free Boundary Condition (무전단경계 조건), Dirichlet Boundary Condition (Dirichlet 경계조건), Convective Boundary Condition (대류경계조건), Fully-Developed Condition (완전발달경계조건)

Abstract

This paper presents how redevelopment of the boundary layer in a backward-facing step flow is affected by boundary conditions imposed on velocity at the inlet, top and exit of the flow. A two-dimensional, laminar, incompressible flow over a backward-facing step with an open top boundary has been computed by using numerical methods of second-order time and spatial accuracy and a fractional-step method that guarantees a divergence-free velocity field at all time. The inlet velocity profile above the step is of Blasius type. Along the top boundary, shear-free and Dirichlet conditions on the streamwise velocity were considered and at the exit fully-developed and convective boundary conditions were examined. (The vertical velocity at all boundaries were assumed to be zero explicitly or implicitly.) From the computed flow fields, the reattachment on the bottom side of shear layer separated from the tip of the step and succeeding redevelopment of the boundary layer were investigated.

1. 서론

후향단유동의 바닥면 유동박리현상과 재부착거리, 경계층의 재발달과정 등은 윗쪽 경계의 개폐 여부에 따라 현격한 차이를 보인다. 닫힌 형태의 후향단유동에서 윗벽에 의한 유동지연, 수직유선 억제, 윗쪽 재순환영역 발생 등의 물리적 영향이 나타난다.^(1,2) 그러나 외기 중에 움직이는 지상운송체의 후면부 주위와 같은 열린 후향단유동에서는 이와 같은 윗벽의 영향이 나타나지 않는다. 또한 후향단유동은 바닥면 유동박리와 재부착을 거친 후, 닫힌 후향단에서는 내부관유동의 형태로 발달하게 되나 열린 후향단에서는 외부평판유동의 형태로 발달하게 된다.

Barton⁽³⁾은 열린 후향단에서 단지 윗벽에 의한 점성저항력이 없어지는 효과만을 관찰하기 위하여 top boundary(TB)의 경계조건을 입구상단에서의 속도로 채택하였다. 윗벽이 없는 후향단은 상단의 경계조건에 따라 매우 크게 다른 유동형태를 표현하게 된다. 열린 후향단유동의 경계조건을 실험적으로 결정하는데 어려움이 많으므로 수치해석적 방법이 유용하다.

본 연구에서는 top boundary 에서 무전단조건 (shear-free boundary condition, SFC)과 $u/U_0 = 1$ 인 Dirichlet 조건(Dirichlet boundary condition, DBC)이 재부착거리 X_R 와 높이가 $2h$ 인 지점에서의 속도 분포 및 출구에서의 속도분포 $u_{RB}(y)$ 에 미치는 영향을 조사하였다. 출구에서는 재발달유동에 적합한 대류경계조건(convective boundary condition, CBC)을 주어 재발달경계층을 관찰하였고 완전발달 경계조건(fully-developed condition, FDC)을 적용시킬 수 있는가를 살펴보았다.

* 포항공과대학교 대학원

** 정희원, 포항공과대학교 기계공학과, 첨단유체공학 연구센터

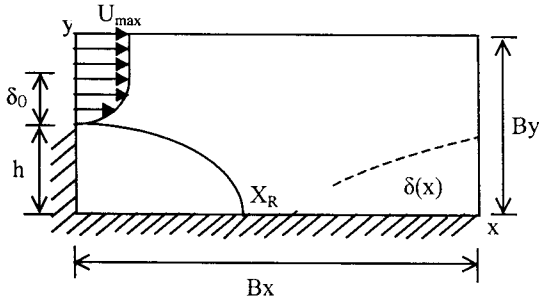


Fig. 1. Schematic of the flow configuration and computational domain: h , height of the backward-facing step; X_R : reattachment length; δ_0 , thickness of the inlet velocity non-uniformity; $\delta(x)$, thickness of the redeveloping boundary layer; (B_x, B_y) , size of the computational domain.

2. 수치해석방법 및 경계조건

2.1 계산영역 및 지배방정식

본 연구에서는 Fig. 1 에서 보이는 바와 같이 top boundary 가 열린 후향단유동을 단이 있는 부분부터 출구까지의 영역에서 계산을 수행하였다. 지배방정식은 비정상 2 차원 층류 비압축성유동을 표현하는 Navier-Stokes 방정식과 질량보존방정식으로 무차원화한 형태로 아래와 같이 표현된다:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

여기서 $\text{Re} = U_0 h / \nu$ 는 최대입구속도 U_0 및 계단높이 h 에 기준한 Reynolds 수이며 속도 \mathbf{u} 는 U_0 를 기준으로, (x, y) 는 h 를 기준으로 무차원화하였다.

2.2 시간전진방법 및 Fractional-step method

지배방정식에서 비선형적인 대류항은 2 차 정확도의 Adams-Bashforth 방법을 그리고 선형적인 점성항은 벽근처에서 stiffness 문제로 음함수기법인 2 차정확도의 Crank-Nicolson 방법을 사용하였다. 비압축성유동내 압력구배항을 효과적으로 다루기 위하여 fractional-step method D* (Lee *et al.*⁽⁴⁾)를 적용한다:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t (3\mathbf{N}^{(n)} - \mathbf{N}^{(n-1)}) + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{L}^* - \mathbf{L}^{(n)}) - \Delta t G \phi^{(n)} \quad (3)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{u}^* - \Delta t D G \Phi^{(n+1)} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t G \Phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \quad (5)$$

전개된 식으로부터 현재시간단계의 속도장으로 (3)을 사용하여 임시속도를 얻으며 (4)로 부터 가

Series	B_x/h	B_y/h	N_x	N_y	$\Delta x/\Delta y$
A	40	10	100	100-200	2-10
B	40	2-15	100	40-300	2-10
C	30-40	10	80-100	100-200	2-10
D	40-100	10-30	100-254	200	0.5-10

Table 1. Specifications of computations: (B_x, B_y) , size of the computational domain in the (x, y) -directions; (N_x, N_y) , number of grid points in the (x, y) -directions; $(\Delta x, \Delta y)$, grid spacings in the (x, y) -directions.

상압력을 계산하고 (5)를 이용하여 최종속도를 계산하는 방법으로 진행하였다. 발산성 $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 는 전계산영역과 시간에 걸쳐 언제나 roundoff 오차 10^{-12} 내에 머물렀다.

차분화 방식으로는 모든 영역에서 2 차 정확도의 중심차분법을 사용하여 시간과 공간에 대해 모두 2 차 정확도를 유지하였다.

2.3 경계조건

아랫벽에서는 전 계산에서 모든 속도가 0 인 조건을 주었다. 입구에서는 Blasius 형태의 외부유동상태를 주었는데 입구 속도분포의 경계층 두께 δ_0/h 가 0, 0.25, 0.5, 0.75 그리고 1 인 경우에 입구 속도분포가 재부착지점에 미치는 영향을 조사하였다. 윗쪽 경계에서는 일반적인 외부유동 형태에서 흔히 보이는 무전단조건과 일정한 속도로 움직이는 no-slip 의 벽조건을 비교하였는데 이는 완전히 다른 유동형태의 표현이나 충분한 높이에서는 비슷한 조건이 된다. 출구에서는 외부유동은 항상 재발달하는 유동이므로 이에 적합한 대류경계조건을 주었고, 완전발달유동이 닫힌 후향단 모델에서 재부착지점의 3 배이상에서 발생한다고 밝혀져 있으므로 본 연구에서도 재부착지점의 3 배이상의 지점에서 완전발달 경계조건을 주어 비교하였다.

3. 계산격자 및 계산수행 매개변수

격자계와 수행 매개변수들은 Table 1 과 같이 입구유동 형태에 따른 재부착지점의 차이(Series A), 윗벽경계조건의 높이에 따른 유동형태의 비교(Series B), 윗벽경계에서 무전단 조건과 움직이는 벽조건에 따른 유동의 차이(Series C), 그리고 재발달경계층의 형태와 출구경계조건의 영향(Series D) 등 계산의 목적에 따라 달리하였다.

모든 계산에서 무차원시간간격을 $U_0 \Delta t / h = 0.1$ 로 균일하게 하였고 (CFL < 0.5), x 방향으로는 비균일 격자를 y 방향으로는 균일격자계를 사용하였다. 단, Series D 에서는 y 방향으로도 비균일격자이다.

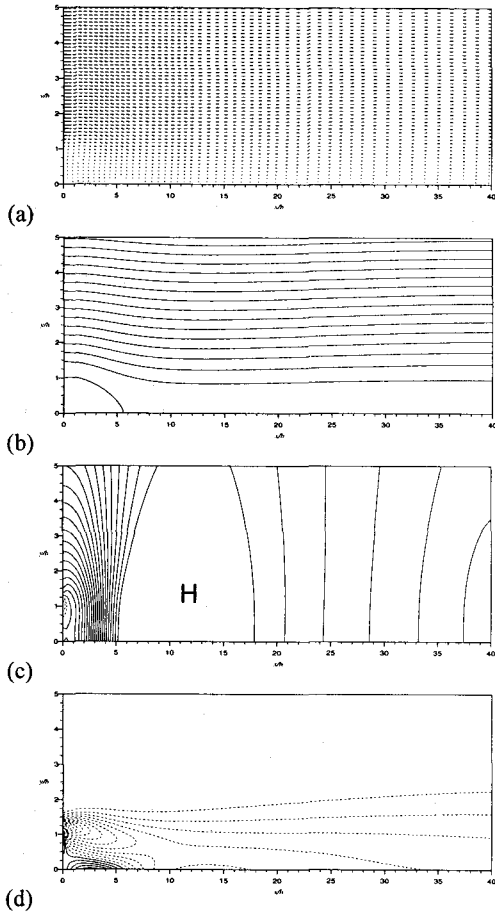


Fig. 2. Flow pattern of the base model: (a) velocity vectors; (b) streamlines; (c) isobaric contours; and (d) iso-vorticity contours. Solid line, positive value; dashed line, negative value; $Re = 100$, $TBC = SFC$, $RBC = CBC$.

4. 결과 및 고찰

4.1 열린 후향단 모델의 유동형태

Fig. 2는 수치계산의 기본 모델의 유동을 나타낸 것으로 윗쪽경계에서 유동방향속도 u/U_0 가 2% 오차이내로 1이 되는 높이($B_y/h = 10$)를 가지고, 계산수행중 가장 작은 높이($B_y/h = 2$)에서 나타난 재부착거리 X_R 의 3 배이상의 길이($B_x/h = 40$)이다. 속도벡터 (Fig. 2a)와 유선 분포도 (Fig. 2b)에서 재순환영역을 거친 유동이 재부착한 후 다시 외부유동의 형태로 자라나는 것을 확인할 수 있다. 압력분포(Fig. 2c)는 재순환영역 뒷부분이 가장 큰 압력을 가지며 그 앞 뒤로 압력이 감소하는 형태를 보인다. 이는 일정한 높이 y 에서의 x 방향 속도가 급격히 감소한 후 재부착지점을 지난 다음부터 서서

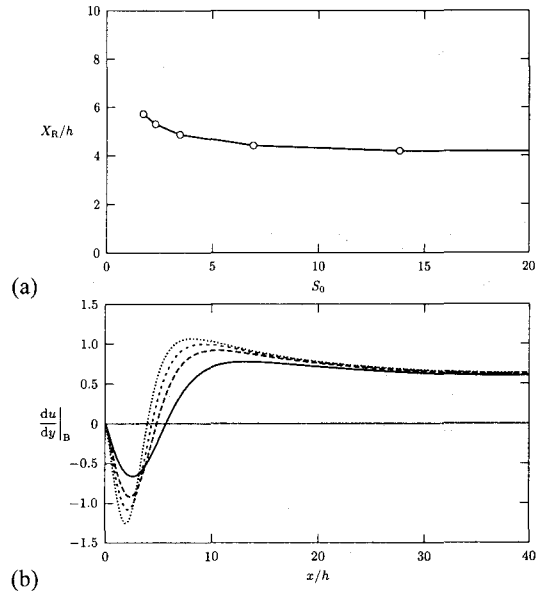


Fig. 3. (a) Reattachment length X_R/h vs. inlet shear rate S_0 ; and (b) shear rate du/dy along the bottom boundary: $Re = 100$, $(B_x, B_y)/h = (40, 10)$, $TBC = SFC$, $RBC = CBC$.

히 가속됨을 의미한다. 출구에서는 압력구배 dp/dx 가 윗쪽 경계로 가면서 점차 감소하는 것을 볼수 있는데 이는 아래쪽은 점성이 압력변화에 지배적으로 영향을 끼치나 윗쪽으로 가면서 점점 점성의 영향이 감소하고 관성의 영향이 커지기 때문이다. 재부착거리는 와도분포도(Fig. 2d)에서 와도가 0이 되는 등와도선이 바닥과 만나는 지점이다.

4.2 입구 속도분포가 재부착거리에 미치는 영향
 닫힌 후향단유동에서 모든 조건이 같고 단지 입구속도분포만 다른 경우 흥미있는 결과가 밝혀졌다. 즉, 포물선 형태의 속도분포(Thangam and Knight^(5,6))보다 균일한 속도분포(Barton⁽³⁾)가 같은 운동량을 가지는 상태에 재부착거리가 더 짧다.

열린 후향단유동은 입구의 Blasius 속도분포의 경계층 두께가 중요한 역할을 하게 된다. 입구 속도의 경계층 두께 δ_0/h 를 0에서 1로 증가시켜가면서 재부착거리 X_R 와 아랫벽에서의 shear rate du/dy 를 알아보았다. Fig. 3은 입구바닥벽에서의 전단률 $S_0 = du/dy|_0$ 에 따른 재부착거리 X_R 및 아랫벽에서의 du/dy 변화를 나타낸 것이다. 입구속도가 균일속도조건($\delta_0/h = 0$, $S_0 \rightarrow \infty$)에 가까워질수록 즉, 경계층두께가 0인 입구조건에 가까워질수록 재부착거리가 짧아짐을 알 수 있다. 들어오는 유동이 입구바닥면에서의 전단이 클수록 그 아래쪽에서의 소용돌이영역이 커지며 재순환영역이 좁아지게 된다. 따라서 재부착거리가 짧아지고 (Fig. 3a) 아랫

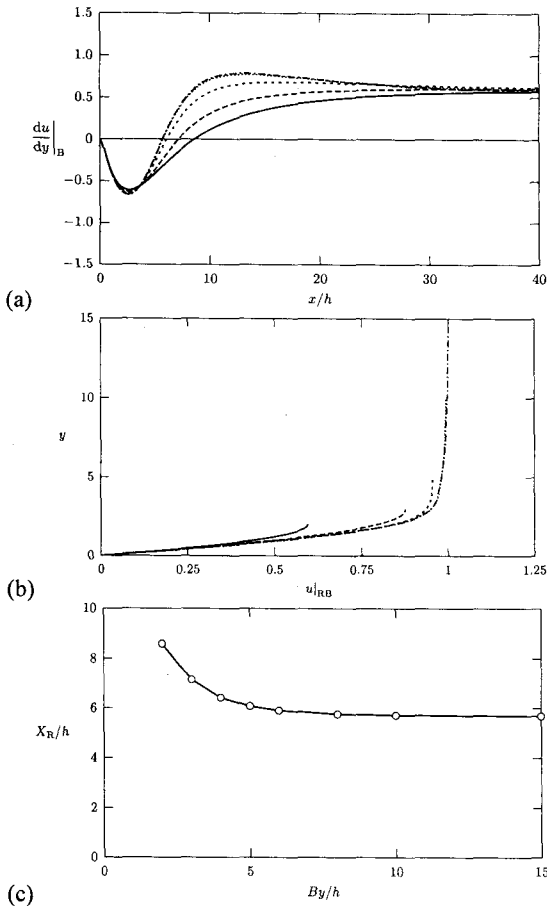


Fig. 4. Effects of the height B_y/h of the computational domain on (a) $du/dy|_B$; (b) $u_{RB}(y)$; and (c) X_R : solid line, $B_y/h = 2$; dashed line, $B_y/h = 3$; short-dashed line, $B_y/h = 5$; dotted line, $B_y/h = 10$; chain-dotted line, $B_y/h = 15$. $Re = 100$, $B_x/h = 40$, $N_x = 100$, TBC = SFC, RBC = CBC.

벽에서 du/dy 의 x 방향에 따른 분포는 매우 큰 변화를 나타낸다 (Fig. 3b).

4.3 계산영역 및 경계조건에 따른 재부착거리와 유동속도분포의 변화

Fig. 4 는 $B_y/h = 40$ 으로 충분히 크게하고 윗쪽 경계는 shear-free 조건하에 B_y/h 를 2-15 로 증가시켰을 때 아랫벽에서의 du/dy (Fig. 4a), 출구에서의 속도분포 (Fig. 4b) 및 재부착거리(Fig. 4c)를 나타낸 것인데 B_y/h 가 2-10 까지는 계산영역에 따라 유동형태가 변화함을 보이고 있으나 10 이상이 되면 고정된 유동형태가 된다. Fig. 4(b)에서 알 수 있듯이 $B_y/h = 10$ 이 되면 출구부근에서 Blasius 속도분포를 보이며 윗쪽 경계에서의 속도 u/U_0 는 2% 차이내로 1 이 되었다. 또 입구속도분포에 따라 유동이 달라지는데 가장 낮은 높이에서 $u/U_0 = 1$ 이

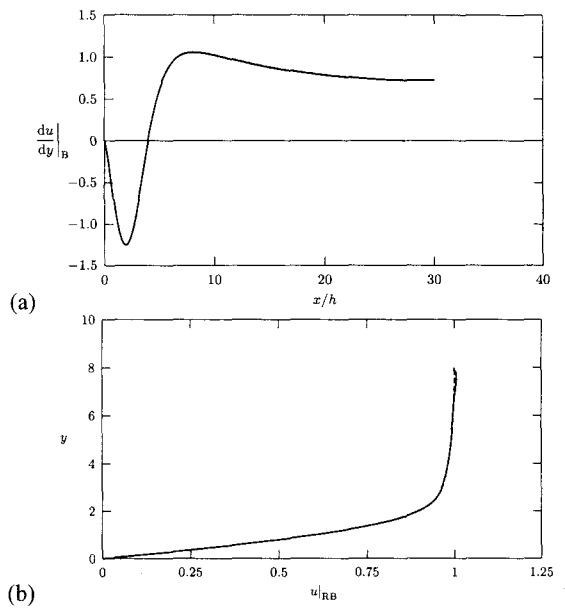


Fig. 5. (a) Shear rate du/dy along the bottom boundary; and (b) $u_{RB}(y)$ at the exit for the uniform inlet velocity profile: solid line, TBC = SFC; dotted line, TBC = DBC. $Re = 100$, $(B_x, B_y)/h = (30, 8)$.

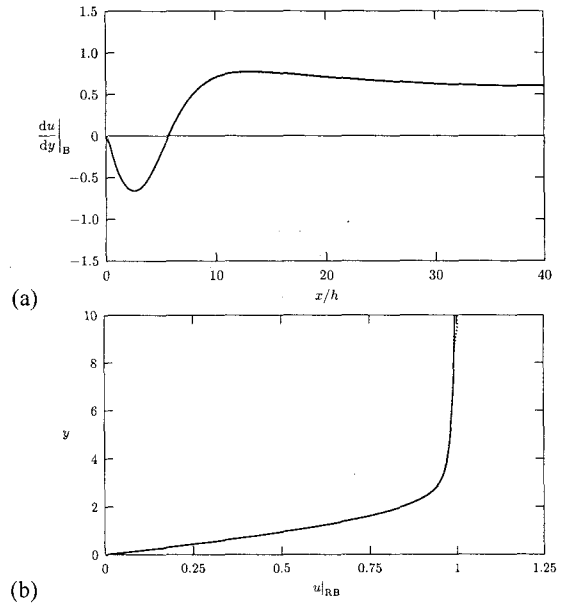


Fig. 6. (a) Shear rate du/dy along the bottom boundary; and (b) $u_{RB}(y)$ at the exit for the Blasius inlet profile ($\delta/h = 1$): solid, TBC = SFC; dotted, TBC = DBC. $Re = 100$, $(B_x, B_y)/h = (40, 10)$.

나올 것으로 예상되는 일정속도입구조건에서는 약 $B_y/h = 8$ 에서 속도 u/U_0 가 2% 차이내로 1 이 되었다. Fig. 4(c)와 같이 $B_y/h = 10$ 까지는 B_y/h 가 증가

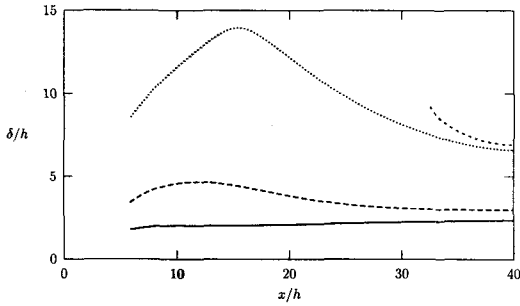


Fig. 7. Variation of the boundary-layer thickness δ/h of the redeveloping region with x/h : solid, $u_{\max}/U_0 = 0.9$; dashed, $u_{\max}/U_0 = 0.95$; short-dashed, $u_{\max}/U_0 = 0.99$; dotted, $u_{\max}/U_0 = 0.99$ ($B_x/h = 15$). $Re = 100$, $(B_x, B_y)/h = (40, 10)$, TBC = SFC, RBC = CBC.

할수록 재부착거리가 짧아지는데 닫힌 후향단유동에서 확장비(B_y/h)가 커짐에 따라 재부착거리가 짧아지는 것과 같은 양상을 보인다.⁽⁵⁾

윗쪽 경계에서 u/U_0 가 2% 이내로 1 일때 윗쪽 경계조건(SFC 및 $u/U_0 = 1$ 인 Dirichlet 조건)이 출구속도의 분포 및 바닥면에서의 du/dy 에 미치는 영향을 Fig. 5 (균일한 입구속도분포의 경우)와 Fig. 6 (Blasius 분포의 경우)에 각각 비교하였다. 두 조건을 점선과 실선으로 비교하였는데 입구속도분포에 관계없이 오차 2%안에서 겹쳐진다. 따라서 계산영역 B_y/h 가 충분히 큰 계산에서는 두 조건의 유동형태는 거의 동일하다.

4.4 재발달경계층의 형태와 출구경계조건의 영향

Fig. 7은 계산영역이 $(B_x, B_y)/h = (40, 10)$ 일때 경계층이 재발달하는 양상을 속도가 $u_{\max}/U_0 = 0.9, 0.95, 0.99$ 가 되는 지점을 기준으로 한 경계층의 두께 $\delta(x)$ 를 나타낸 것이다. $u_{\max}/U_0 = 0.9, 0.95$ 의 경계층은 $x^{1/2}$ 의 형태로 증가하는 평판위 또는 외부유동의 경계층 발달 양상을 보이나, $u_{\max}/U_0 = 0.99$ 의 경계층은 유동에 따라서 감소한다. 이는 상부로 가면서 완전한 경계층재발달 형태의 유동이 나타나지 않는 것을 의미한다. 층류에서 천천히 발달하는 외부유동과 달리 재순환영역을 거친 외부유동은 아랫벽의 점성의 영향으로 아랫부분부터 점차적으로 재발달한다. Fig. 7에서 세밀한 점선으로 나타낸 것은 같은 조건에서 $B_y/h = 15$ 일때 $u_{\max}/U_0 = 0.99$ 의 경계층으로 $B_y/h = 10$ 일 때와 다르게 나타나는데, $u_{\max}/U_0 = 0.99$ 의 지점이므로 속도오차는 2%이내이지만 같은 속도가 나타나는 지점은 윗부분에서 많은 차이가 난다. 따라서 Asai *et al.*⁽⁷⁾이 보인 바와 같이 재부착이후 나타나는 속도분포는

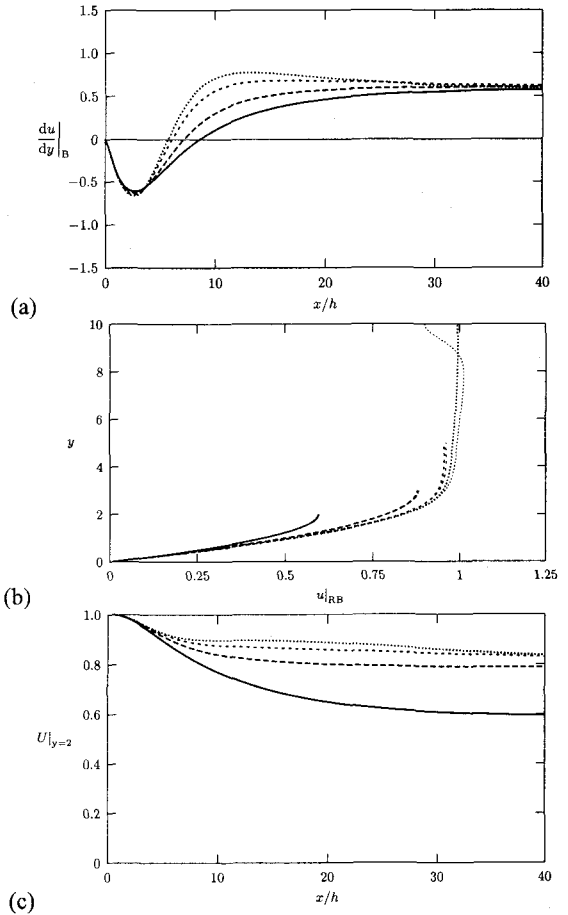


Fig. 8. Effects of RBC on the flow: (a) shear rate du/dy ; (b) exit velocity $u_{RB}(y)$; and (c) $u|_{y=2}$. solid, $B_y/h = 2$; dashed, $B_y/h = 3$; short-dashed, $B_y/h = 5$; dotted, $B_y/h = 10$. $Re = 100$, $B_x/h = 40$, $N_x = 100$, TBC = SFC; RBC = CBC and FDC.

Blasius 형태이나, 재발달하는 과정은 유동하부는 외부유동의 경계층재발달 형태로 나타나고 상부는 민감하게 변하는 과정이다.

유동하부는 느리게 재발달하고 상부의 속도변화가 오차 2%이내이므로 출구경계에서 완전발달 경계조건($du/dx = 0$)의 경우와 비교하였다. Fig. 8에서 $B_y/h = 5$ 까지는 아랫벽에서의 du/dy , 출구에서의 속도분포 및 $y/h = 2$ 에서의 속도분포가 두 경계조건에서 차이가 거의 없다. 그러나 계산영역이 $B_y/h = 10$ 의 경우 아랫벽에서의 du/dy 와 $y/h = 2$ 인 지점의 속도분포는 두 조건에서 거의 비슷하나 출구에서의 속도분포는 판이하게 다르다. CBC를 사용한 경우는 출구에서 Blasius 형태이나 FDC의 경우는 윗쪽 경계면으로 가면서 오차가 점점 커져서

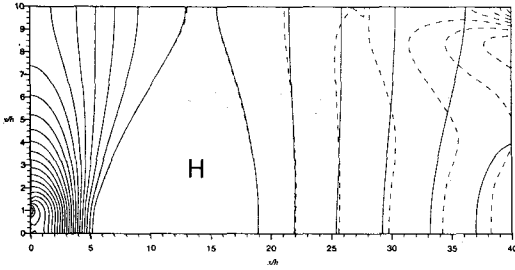


Fig. 9. Comparison of isobars between computations with CBC and FDC: solid, RBC = CBC; dashed, RBC = FDC. $Re = 100$, $(B_x, B_y)/h = (40, 10)$, $N_x \times N_y = 100 \times 200$, TBC = SFC.

약 15%의 오차가 발생하였다. 이와 같이 큰 오차는 Fig. 9의 CBC와 FDC의 압력분포 비교에서 확인할 수 있다. 하부로부터 점차적으로 재발달하고 있는 유동은 아랫벽 부근에서는 $dp/dy = 0$ 에 가까우나 위로 가면서 점차 $dp/dy \neq 0$ 가 되는데 FDC에서 나타나는 출구 근처에서 $dp/dy = 0$ 인 경계조건이 계산영역이 높아질수록 출구경계조건 상반성이 커져서 오차도 커지게 된다.

Fig. 10은 윗쪽경계와 출구경계조건 (TBC, RBC)이 (SFC, CBC), (DBC, CBC) 그리고 (SFC, FDC)일 때, 경계층의 재발달에 미치는 영향을 비교한 것으로 Fig. 6과 같은 u_{max}/U_0 에 대하여 나타낸 것이다. 각각의 경계조건은 $u_{max}/U_0 = 0.95$ 까지는 같은 형태이나 $u_{max}/U_0 = 0.99$ 가 되면 매우 큰 오차를 보인다. 따라서 각 경계조건에 따른 경계층 재발달과정의 관찰에서 속도오차가 2%이내라 하더라도 같은 결과를 가져오는 경계조건이 아니다.

5. 결론

열린 후향단유동의 경계조건의 수치해석적인 결정과 경계조건이 재발달경계층에 미치는 영향에 대한 결론은 다음과 같다.

(1) 후향단유동에서 입구유동이 가지고 들어오는 전단률의 크기가 클수록 재부착거리 X_R 는 짧아지고 $S_0 \rightarrow \infty$ 에 가까워지면서 ($\delta_0/h = 0$, 균일속도 분포) 재부착거리는 점근치 $X_R/h \approx 4$ 를 갖는다.

(2) 닫힌 후향단유동의 확장비에 해당하는 열린 후향단유동의 윗쪽경계 B_y 의 단의 높이 h 에 대한 길이비 B_y/h 가 클수록 재부착거리는 $X_R/h \approx 6$ 에 점근적으로 짧아진다. 그러나 윗쪽에서 $u/U_0 = 1$ 에 가까워지면 재부착거리는 일정하다.

(3) $u/U_0 = 1$ 에 가까워지는 높이에서는 $u/U_0 = 1$ 의 Dirichlet 조건은 속도 오차 2%이내에서 shear-

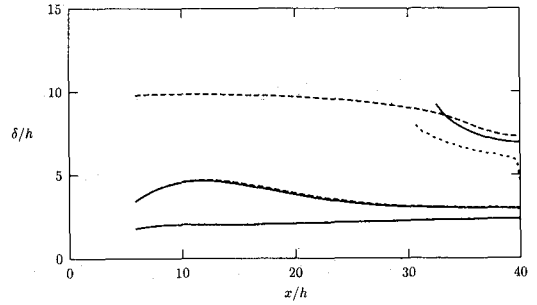


Fig. 10. Effect of boundary conditions on the boundary-layer thickness $\delta(x)$ in the redeveloping region: solid, TBC = SFC, RBC = CBC; dashed, TBC = DBC, RBC = CBC; short-dashed, TBC = SFC, RBC = FDC. $Re = 100$, $(B_x, B_y)/h = (40, 10)$, $N_x \times N_y = 100 \times 200$.

free 조건과 유사한 결과를 보인다. 그러나, 경계층 재발달의 양상은 Dirichlet 조건과 shear-free 조건은 매우 큰 차이를 가진다.

(4) 열린 후향단유동의 경계층 재발달과정은 외부평판유동의 경계층 재발달과는 달리 아랫쪽에서부터 안정적으로 재발달하는 형태를 보인다.

(5) 열린 후향단유동의 출구에서 대류경계조건 (CBC)은 유동형태를 잘 나타내나 완전발달유동 경계조건(FDC)은 계산영역의 크기에 의존한다.

참고문헌

- (1) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F. and Schönung, B. (1983) Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.* **127**, 473-496.
- (2) Kim, J. and Moin, P. (1985) Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **59**, 308-323.
- (3) Barton, I. E. (1994) Laminar flow past an enclosed and open backward-facing step. *Phys. Fluids A* **12**, 4054-4056.
- (4) Lee, M. J., Oh, B. D. and Kim, Y. B. (2001) Canonical fractional-step methods and consistent boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **168**, 73-100.
- (5) Thangam, S. and Knight, D. D. (1989) Effect of stepheight on the separated flow past a backward-facing step. *Phys. Fluids A* **1**, 604-606.
- (6) Thangam, S. and Knight, D. D. (1990) A computational scheme in generalized coordinates for viscous incompressible flows. *Comput. & Fluids* **18**, 317-327.
- (7) Asai, M., Aiba, K. and Nishioka, M. (1996) A nonlinearity-coupled receptivity process generating a Tollmien-Schlichting wave behind a backward-facing step. *Fluid Dyn. Res.* **17**, 225-236.