

비압축성 유동계산을 위한 계층 요소 사용에 대한 연구

김진환*

A Study on the Use of Hierarchical Elements for Incompressible Flow Computations

Kim, Jin Whan*

Key Words : Mixed Degree Finite Elements(혼합 차수 유한 요소), Hierarchical Basis Function(계층 기저 함수), Degree of Freedom(자유도), C^0 -continuity(C^0 연속성), Subparametric element(저 자유도 요소), Poisson equation(포아송 방정식)

Abstract

A two dimensional hierarchical elements are investigated for a use on the incompressible flow computation. The construction of hierarchical elements are explained through the tensor product of 1-D hierarchical functions, and a systematic treatment of essential boundary values has been developed for the degrees of freedom corresponding to higher order terms. The numerical study for the poisson problem showed that the present scheme can increase the convergence and accuracy of finite element solutions, and can be more efficient than the standard first order with many elements. Also, for Stokes and cavity flow cases, solutions from hierarchical elements showed better resolutions and future promises for higher order solutions.

1. 서론

일찍이 Zienkiewicz¹⁾와 Robinson²⁾은 요소의 고차화에 계층함수의 효율성을 주장하였으며, 또한 Demkowicz⁶⁾는 h-p 형태의 적응적 체는 세분화 및 고차화 기법에 이를 적용하였다. 계층(Hierarchical)함수는 고차화 됨에 따라 필요한 개수의 함수를 기존의 저차 함수에 덧붙임으로서 고차 형상함수를 용이하게 구성해 나갈 수 있으며, 계층요소, 즉 계층 기저 함수를 요소의 보간 함수로 사용한 요소 사용의 이점은 다음

과 같다.

일반적으로 고차해를 구하기 위하여는 이에 상응하는 절점들을 요소가 가지고 있어야 하지만 이렇게 되면 너무나 많은 절점들이 필요하게 되어 최적의 요소 생성에 대한 이점이 없어지게 된다. 그러나 계층 형상 함수를 사용할 경우에는 요소의 기하적 형태를 2차 라그랑지안(Lagrangian) 요소로 한정할 수 있으며, 나머지 자유도(dof)는 변(edge)이나 면(face) 그리고 내부에 존재하게 된다. 2차 라그랑지안 요소란 기하학적으로 이차원일 경우 9개의 절점을 필요로 하고 3차원일 경우 27개의 절점을 필요로 한다. 이러한 요소에 계층 형상함수를 사용하면 절점의 증가없이

* 동의대학교 기계산업시스템 공학부 교수

고차 요소해를 구현할 수 있다.

이 연구에서는 계층함수의 이러한 적절성을 이용하여 3차원 요소에 대한 기저함수를 5차까지 정의하였으며, 또 고차(2차 이상)에 대한 자유도는 변위(displacement)가 아닌 관계로 변수형 고정 경계값의 적절한 변환이 필요하다. 따라서 유한 요소해의 수렴성을 가변적 고정 경계조건에 대하여도 검토하였다. 유동계산에 대하여는 Segregate 방법을 적용하여 Stokes 및 Cavity 유동에 적용하여 그 결과를 나타내었다.

2. 계층 요소의 구성

2.1 형상 함수

3차원 육면체 요소에 대한 계층형상 함수에 대하여 고려하기로 한다. 2차원 및 3차원의 경우, 일차원 함수의 텐서곱(tensor product)으로부터 요소 형상 함수를 구현할 수 있다. 다음은 일차원 5차(quintic) 요소에 필요한 계층 기저 함수이다.

$$\begin{aligned}
 h_1(\eta) &= (1 - \eta)/2. \\
 h_2(\eta) &= (1 + \eta)/2. \\
 h_3(\eta) &= (\eta^2 - 1.)/2. \\
 h_4(\eta) &= (\eta^2 - 1.)\eta/6. \\
 h_5(\eta) &= (\eta^4 - 1.)/24. \\
 h_6(\eta) &= (\eta^4 - 1.)\eta/120.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Fig. 1에 보인 3차원 2차 요소에 대한 형상 함수는 다음과 같이 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2) h_1(\eta_3) \\
 \varphi_2 &= h_2(\eta_1) h_1(\eta_2) h_1(\eta_3) \\
 \varphi_3 &= h_2(\eta_1) h_2(\eta_2) h_1(\eta_3) \\
 \varphi_4 &= h_1(\eta_1) h_2(\eta_2) h_1(\eta_3) \\
 \varphi_5 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2) h_2(\eta_3) \\
 \varphi_6 &= h_2(\eta_1) h_1(\eta_2) h_2(\eta_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{26} &= h_1(\eta_1) h_3(\eta_2) h_3(\eta_3) \\
 \varphi_{27} &= h_3(\eta_1) h_3(\eta_2) h_3(\eta_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

각 요소해의 구성에 요구되는 형상함수는 일반적으로 요소의 보간 차수에 따라 정해진다. Table. 1 에는 요구되는 형상함수를 요소 절점과 차수에 대하여 번호로 나타내었으며, Fig. 1 에는 요소 절점 번호를 표시하였다.

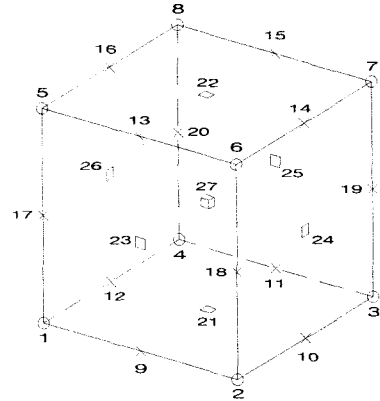


Fig. 1 Element node numbering

2.2 변수형 고정 경계조건

계층요소의 꼭지점(Vertex)에 대한 자유도는 변위를 나타내지만 그 이외의 절점(변, 면, 내부)들에 대한 자유도는 변위가 아니다.

그러나 고정경계치(Dirichlet B.C)들은 변위에 대하여 주어지기 때문에 이러한 값들을 계층함수의 자유도 특성에 맞게 변화시킬 필요가 생긴다. 이 경우 변(Edge) 혹은 면(Surface) 자유도에 대한 값을 정하기 위해서는 필요한 수의 연립방정식을 풀어야 한다.

요소 내부 및 경계의 임의 위치에 대한 변위값 T_p 는 아래와 같다.

$$T_p(\eta) = \sum N_i(\eta) U_i
 \tag{2.3}$$

Table 1 D.O.F(Degree of Freedom) numbers of element nodes in 3 dimensions

Deg.	Element Node No.			
	Vertex	Edge	Surface	Interior
	1 ... 8	9 ... 20	21 ... 26	27
1	1 ... 8			
2		9 ... 20	21 ... 26	27
3		28 ... 39	40 ~ 42 ... 55 ~ 57	58 ~ 64
4		65 ... 76	77 ~ 81 ... 102 ~ 106	107 ~ 125
5		126 ... 137	138 ~ 144 ... 173 ~ 179	180 ~ 216

3 차원 육면체요소의 고정 경계조건은 면에 대하여 주어지므로 \underline{x} 는 해당 요소면에 대한 2 차원 계산좌표, N_i 는 2 차원 계층형상함수이다. 만일 요소가 고정 경계면에 위치한다면 T_p 는 위치에 대하여 주어진 경계값이며, U_i 는 경계조건으로 취하고자 하는 자유도 값이다. 2 차(quadratic) 육면체요소의 임의의 면에 대하여 식(2.3)을 다시 쓰면 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=5}^8 N_i(0,-1)U_i &= T_p(0,-1) - \sum_{i=1}^4 N_i(0,-1)U_i \\
 \sum_{i=5}^8 N_i(1,0)U_i &= T_p(1,0) - \sum_{i=1}^4 N_i(1,0)U_i \\
 \sum_{i=5}^8 N_i(0,1)U_i &= T_p(0,1) - \sum_{i=1}^4 N_i(0,1)U_i \\
 \sum_{i=5}^8 N_i(-1,0)U_i &= T_p(-1,0) - \sum_{i=1}^4 N_i(-1,0)U_i \\
 \sum_{i=5}^8 N_i(0,0)U_i &= T_p(0,0) - \sum_{i=1}^4 N_i(0,0)U_i
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

여기서 $U_1 \sim U_4$ 는 꼭지점의 변위값으로 주어진 경계조건으로부터 결정될 수 있으며, $U_5 \sim U_9$ 는 구해져야 할 새로운 경계값이다.

그리고 경계변위 T_p 는 $\underline{x} = (0,-1), (1,0), (0,1), (-1,0), (0,0)$ 에 대한 값들이다.

3 차(cubic) 이상의 차수를 갖는 요소의 경우 필요한 연립방정식을 아래와 같이 일반화된 식으로 정의할 수 있다.

$$\sum_{i=5}^8 N_i(\underline{x})U_i = T_p(\underline{x}) - \sum_{i=1}^4 N_i(\underline{x})U_i
 \tag{2.5}$$

여기서 요소의 차수를 Deg 라 하면, 식(2.5)에서 n 은 $(Deg+1)^3$ 이며, \underline{x} 는 $n-4$ 개의 2 차원 계산좌표로서 각 좌표값은 동일차수의 2 차원 라그랑지안 형상함수에서 사용되는 각 절점의 좌표값과 일치한다. 이러한 계산에서 N_5, N_7 등은 기함수, N_6, N_8 등은 우함수임을 이용하면 편리하며, 고정 경계 조건이 일정하면 꼭지점을 제외한 자유도 값은 0이 됨을 알 수 있다.

2.3 계층 요소의 계산에

계층 요소의 계산과정을 간단히 보기 위하여 아래의 3 차원 포아송(Poisson) 방정식을 이용하기로 한다.

$$-\nabla^2 u = f(x, y, z)
 \tag{2.6}$$

갤러킨 잔여법(Galerkin residual method)을 식(2.6)에 적용하고 임의의 요소에 대하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 \oint \psi \cdot \nabla u \cdot \hat{n} d\Gamma + \int \nabla \psi \cdot \nabla u d\Omega \\
 = \int f(x, y, z) d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

여기서,

$\psi \equiv$ 요소에 적용되는 계층 형상함수

$\hat{n} \equiv$ 요소의부로 향하는 단위 법선 벡터

$\Gamma \equiv$ 요소의 경계

$\Omega \equiv$ 요소의 내부

식 (2.7)에서 좌변 2 항의 계산과정을 3 차원 요소의 경우에 대하여 살펴보면 다음과 같다.

$$\int \nabla \psi \cdot \nabla u \, d\Omega = \left[\iiint \nabla \psi \cdot \nabla \psi^T \, dx \, dy \, dz \right] \cdot U \quad (2.8)$$

여기서 U 는 요소의 자유도벡터이다. 물리좌표계 (x, y, z) 와 계산좌표계 (η_1, η_2, η_3) 와의 변환을 고려하면 식 (2.8)의 우변 피적분함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^T &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) \cdot \\ &\quad \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial y} \right) \cdot \\ &\quad \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial y} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial z} \right) \cdot \\ &\quad \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

식 (2.9)에서 $\partial \psi / \partial \eta_i$ 는 계층함수를 이용하지만, $\partial \eta_i / \partial x, \partial \eta_i / \partial y, \partial \eta_i / \partial z$ 는 요소의 기하학적 성질에 관련됨으로 라그랑지안 함수를 사용하여 구해야 함이 타당하다. 마찬가지로 미소면적 $dx \, dy \, dz = [J] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$ ($[J]$ 는 변환 Jacobian)의 계산에도 라그랑지안 함수를 사용하여야 한다.

3. 3차원 열전도 수치 실험

3.1 3차원 열전도 블록 해

현재 코드의 수행과 해의 수렴성을 보기 위하여 아래의 3 차원 Poisson 방정식을 이용하였다.

$$-\nabla^2 u = 1.0 \quad (3.1)$$

$$(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$$

where,

on surface $x = y = z = 1.0, u = 1.0$

on surface $x = y = z = 0.0, \partial u / \partial n = 0.0$

식 (3.1)의 엄밀해는 Ansys 상용 S/W로부터 4019 개의 2 차 요소를 사용하여 얻은 값으로 대신하며, 오차비교를 위한 표본 점은 수치실험에서 사용된 모든 블록에 대해 공통적으로 포함되는 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 으로 취한다.

요소의 세분화와 계층 형상 함수의 차수증가에 따른 수렴성을 비교하기 위해 식 (3.1)에서 정의한 단일 블록을 1, 8, 27, 64 개의 요소로 분할한 각 모델에 대해 1 ~ 3 차의 계층 형상 함수를 사용하여 수치실험을 수행하였다.

Fig. 2 는 64 개의 요소를 사용한 경우의 해를 비교하고 있으며, 여기서 r 은 원점 $(0, 0, 0)$ 에서 $(1, 1, 1)$ 까지의 직선상에 놓인 절점(Node)들의 x 좌표값을 의미한다. 각 그래프에서 2 차와 3 차 요소에서 얻어진 값들은 거의 같은 값에 수렴하여 가시적으로는 동일한 궤적을 나타내고 있음을 볼 수 있다.

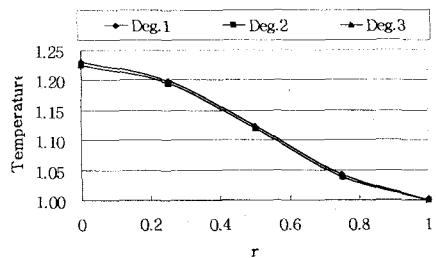


Fig. 2 Numerical solution of 3D Poisson problem (64 Element)

3.2 고차요소 해의 수렴성

더욱 자세한 수렴경향을 보기 위해 표본점에 대한 해의 수치자료를 통하여 Tabel 2와 Fig. 3에 각 표본점의 수치해가 갖는 오차의 절대값을 보였다. 엄밀해로 사용한 수치는 Ansys 상용 S/W로부터 구한 값으로 $u(0,0,0) = 1.22485103$ 이며, 요소의 세분화와 차수 증가에 따라 Table 2로부터 수치해가 엄밀해에 수렴함을 알 수 있다.

Table 2는 고차 계층 요소를 사용할 경우, 요소의 세분화에 비해 같은 계산공간과 계산시간을 소요하더라도 수렴도가 훨씬 크게 증가함을 보여 준다. 더욱이 3차 요소를 사용한 27 및 64 Elem의 경우 4019개의 2차 요소를 사용한 엄밀해에 매우 근접한 수치해를 제공함을 볼 수 있다.

Table 2 Error on data point for each case

Deg.	1	2	3
1 Elem	0.150149	0.000189	0.000372
8 Elem	0.025371	0.000245	0.000004
27 Elem	0.010186	0.000054	0.000001
64 Elem	0.005550	0.000018	0.000001

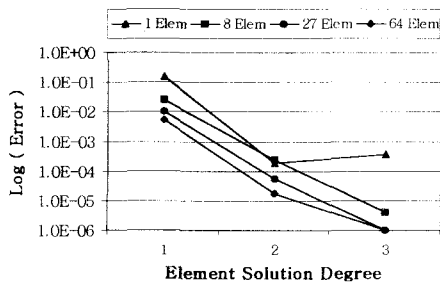


Fig. 3 Error plots for 3D Poisson problem

4. 2차원 유동 계산에 적용

이차원 유동 계산을 위한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$-\nu \nabla^2 u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = f_u$$

$$-\nu \nabla^2 v + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = f_v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(4.1)

여기서 u, v, p 그리고 v 는 각각 x, y -방향의 속도, 압력 그리고 동점성 계수이다. 위의 방정식에 적절한 가중함수(weighting function)와 보간 함수를 취하여 내적하면 갈러킨 잔여법에 의하여 아래의 연립 비선형 대수 방정식을 얻게 된다.

$$A_{11} \cdot \underline{U} + A_{12} \cdot \underline{V} + A_{13} \cdot \underline{P} = \underline{R}_1$$

$$A_{21} \cdot \underline{U} + A_{22} \cdot \underline{V} + A_{23} \cdot \underline{P} = \underline{R}_2$$

$$A_{31} \cdot \underline{U} + A_{32} \cdot \underline{V} = \underline{R}_3$$

(4.2)

여기서 A_{11}, \dots, A_{32} 들은 미지수 $\underline{U}, \underline{V}$, 및 \underline{P} 들에 대한 좌변 행렬들이며, $\underline{R}_1, \underline{R}_2$ 그리고 \underline{R}_3 들은 중력항 등과 경계조건 처리에 의하여 형성된 우변 벡터들이다. 위의 식은 압력 \underline{P} 에 대한 대각 행렬 A_{33} 이 존재하지 않는 관계로 일반적인 풀이가 어려우며, 특히 압력은 속도와 별도로 구해야 한다. 이렇게 구한 압력은 대체로 진동(wiggle) 현상을 보이며, 해의 수렴성 및 안정성을 저해하였으며, 이는 많은 연구자들의 관심 대상이었다. 유한요소적 관점에서의 수치해에 대한 존재 및 수렴에 대한 조건으로는 LBB 조건이 있으며, 이는 압력해의 차수는 속도해의 차수보다 한 단계 낮아야 한다는 것이다. 이를 수행하기 위해서는 일반적으로 속도와 압력에 대한 별개의 격자계를 구성해야 한다.

4.1 Penalty 접근법

Penalty 방법은 압력이 연속방정식에 의하여 구속되어야 한다는 전제하에 penalty parameter를 변분법에 의하여 도입함으로써 속도를 구하는

방법이다. 이 연구에서는 행렬 A_{33} 의 대각선에 아주 작은 수를 도입함으로써, 근본적으로는 penalty 방법과 같으나, 속도와 압력을 동시에 구하고자 하였다. 먼저 Stokes 유동⁽⁶⁾에 대한 영역 정의를 Fig. 4에 하였으며, Fig. 5에는 Deg(2/1)과 Deg(3/2)에 대한 압력해를 12×4 요소에 대하여 도시하였다. 그리고 Table 3에는 임의의 점에 대한 평균적 백분율 오차를 나타내었다. Table 5에 의하면 요소를 세분화할수록 모두 수렴하고 있음을 알 수 있으며, 특히 압력성분은 고차일수록 수렴성이 월등함을 알 수 있다. 특이할 점은 동일한 요소의 수에서 고차화되면 속도성분의 오차는 약간 증가하는 반면에 압력성분의 오차는 약 10 배 정도 감소함을 발견할 수 있다. 이는 압력의 변화가 선형적이 아님에 기인한다고 볼 수 있다. Fig. 6에는 Cavity 유동에 대한 수평 방향의 속도 성분을 중심 수직선에 따라 도출한 값을 $Re = 1000$ 에 대하여 Deg(2/1)과 Deg(3/2)에 대하여 각각 도시하였다. 이 경우에도 예상되는 결과와 상당히 일치함을 볼 수 있다.

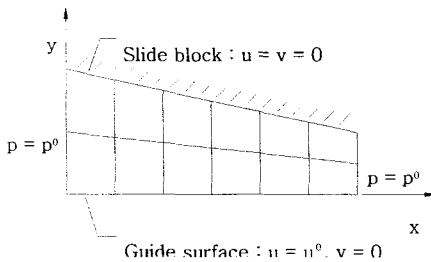


Fig. 4 Domain definition for Stokes problem

Table 3 Percent error for velocity and pressure components of Stokes problem from the Penalty-like Solver.

Mesh	Deg. 2/1		Deg. 3/2	
	u	p	u	p
6×2	9.49	0.99	9.61	0.18
9×3	5.79	0.51	5.80	0.059
12×4	4.24	0.38	4.83	0.0011

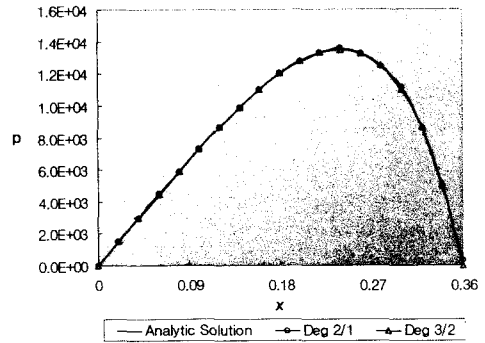


Fig. 5 Pressure plots for the Stokes prob. from Elem. 12×4 solutions

4.2 Segregated Projection 방법

전술한 방법은 전체 System을 직접적으로 풀어야 하기 때문에 일반적 사용에는 적합하지 못하다. 유한 체적법에 있어서는 잘 알려진 SIMPLE 방법이 있으며, 최근에는 이러한 개념을 식 (4.2)에 적용한 Segregated 방법이 효율적으로 사용되고 있다. 다음은 이에 대한 간단한 소개를 한다. 식 (4.2)를 각각 분리하기 위하여 Haroutunian의 2인⁽⁷⁾은 다음과 같은 압력 투시 (Pressure Projection) 반복법을 제시하였다.

1) 압력식

$$\begin{aligned} & [A_{31} \cdot (A_{11})^{-1} \cdot A_{13} + A_{32} \cdot (A_{22})^{-1} \cdot A_{23}] P_{i+1/2} \\ & = A_{31} \cdot (A_{11})^{-1} \cdot (F_u - A_{11} \cdot U_i) \\ & + A_{32} \cdot (A_{22})^{-1} \cdot (F_v - A_{22} \cdot V_i) \end{aligned}$$

2) 압력 이완(Relaxation)

$$P_{i+1} = \alpha_p P_i + (1 - \alpha_p) P_{i+1/2}$$

3) 속도(U)식

$$\begin{aligned} & [(a_u / (1 - a_u)) A_{11} + A_{11}] U_{i+1/2} \\ & = F_u - A_{13} \cdot P_{i+1} + (a_u / (1 - a_u)) \cdot A_{11} \cdot U_i \end{aligned}$$

4) 속도(V)식

$$\begin{aligned} & [(a_v / (1 - a_v)) A_{22} + A_{22}] V_{i+1/2} \\ & = F_v - A_{23} \cdot P_{i+1} + (a_v / (1 - a_v)) \cdot A_{22} \cdot V_i \end{aligned}$$

5) 압력 보정

$$[A_{31} \cdot (A_{11})^{-1} \cdot A_{13} + A_{32} \cdot (A_{22})^{-1} \cdot A_{23}] P_s = A_{31} \cdot U_{i+1/2} + A_{32} \cdot V_{i+1/2} - R_3$$

6) 속도 보정

$$U_{i+1} = U_{i+1/2} - (A_{11})^{-1} \cdot A_{13} \cdot P_s$$

$$V_{i+1} = V_{i+1/2} - (A_{22})^{-1} \cdot A_{23} \cdot P_s$$

여기서,

$$F_u = R_1 - A_{12} \cdot V, F_v = R_2 - A_{21} \cdot U \text{ 이다.}$$

위의 1) 에서 6) 의 반복을 해가 수렴할 때까지 수행한다.

Stokes 유동에 대한 오차는 Table 4 에 나타내었으며, 그 결과는 Penalty 적 접근법에 의한 값들과 대동소이하다. 이 경우 각 식들의 풀이는 CG 방법을 사용하였다. Fig. 7 에는 Cavity 유동에 대한 결과를 보기 위하여, 수평방향 속도 성분을 중심 수직선을 따라 도출하여 $Re = 1000$ 에 대하여 도시하였다. 이 경우 각 식들의 풀이는 직접법을 사용하였다. 이 경우에도 예상되는 결과와 비슷한 경향을 볼 수 있다.

Table 4 Percent error for velocity and pressure components of the Stokes flow problem from the Segregated Solver.

Mesh	Deg. 2/1		Deg. 3/2	
	u	p	u	p
6×2	9.50	0.99	9.61	0.18
9×3	5.79	0.51	5.81	0.065
12×4	4.24	0.37	4.83	0.0014

5. 결론

일반적으로 유한요소해석에서 요소의 세분화는 기하급수적인 자유도의 증가를 수반하며, 특히 1 차 요소만을 사용할 경우 충분한 정도(accuracy)를 얻기 위해서 엄청난 체논의 세분화가 요구된다. 또 높은 차수의 라그랑지안 요소를 사용할 경

우, 해의 차수 증가에 따른 요소 구성을 위한 절점의 증가는 고차 요소의 일반적 접근을 저해하였다. 이에 반해 계층 요소를 사용하면 적은 수의 요소에 고차의 형상함수를 적용함으로써, 보다 정밀하고 안정적인 해를 구현할 수 있었다.

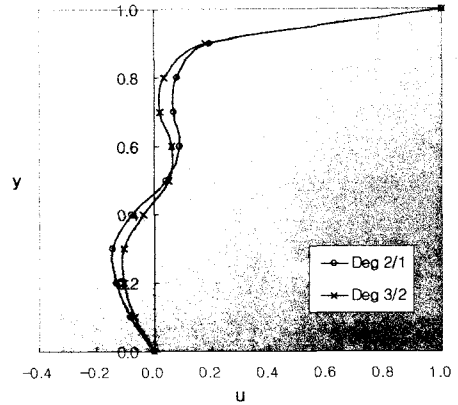


Fig. 6 Horizontal velocity along the center line of the Cavity flow by Penalty-like Solver for $Re = 1000$.

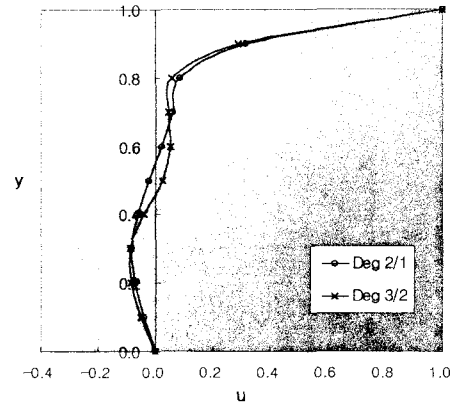


Fig. 7 Horizontal velocity along the center line of the Cavity flow by the Segregate Solver for $Re = 1000$

유동해석을 위한 계층 요소의 사용은 동일 격자계를 사용하여 속도와 압력에 다른 차수를 적용함으로써, LBB 조건을 용이하게 만족시킬 수 있음을 보였다. 또한 적절한 고차화를 통하여 압

력해의 수렴성이 월등히 증가됨을 보았으며, 이는 추후 국부적 혹은 적응적 고차화를 통한 해의 질적 향상에 긍정적이라고 본다.

그러나 고차 요소와 관련된 유동 해석에서 비선형, 비대칭 방정식에 대한 풀이 기법에 대한 연구가 아직 미흡하여 일반적인 적용에는 어려움이 따른다. 본 연구에서는 기초적인 수렴성과 안정성을 검증하였으며, 적절한 풀이 기법에 대한 추가적인 연구가 계속되어야 한다.

참고 문헌

- (1) Zienkiewicz, O.C., de S. R. Gago, J. P. and Kelly, D.W. 1983, "The hierarchical concept in finite element analysis". Computers and Structures, Vol. 16, pp. 53-65.
- (2) Robinson, John, 1986, "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique", Finite Elements in Analysis and Design, Vol.2, No. 1, pp. 377-388.
- (3) Reddy, J.N., 1985, "An Introduction of the Finite Element Method", McGraw-Hill, pp.210-218.
- (4) Stephens, Rod, 1998, "Inside Secrets Programming VB Graphics", John Wiley & Sons, Inc.
- (5) 김진환, 1999, "3차원 정렬 유한요소생성 코드 개발에 대한 연구", 한국해양공학회지, 제 13권, 제 1호, pp.11-17.
- (6) Demkowicz, L., 1988, "An Adaptive h-p Finite element strategy for Two dimensional boundary value problems: A Theory Manual", COMCO Report, Austin, Texas.
- (7) Haroutunian, V., Engelman, M.S. and Hasbani, I., 1993, "Segregated Finite Element Algorithms for the Numerical Solution of Large-Scale Incompressible Flow Problems", Int. J. for Num. Mtd. in Fluids, Vol. 17, pp. 323-348.
- (8) Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994, "The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics", CRC press, Inc., pp. 191-195.