대한기계학회 2001년도 춘계학술대회논문집 E pp. 404~409 KSME 01S581

비압축성유동의 수치계산을 위한 표준분할단계방법 및 일관된 경계조건의 개발

이 문 주*,** · 오 병 도*,** · 김 영 배*,**

Development of Canonical Fractional-Step Methods and Consistent Boundary Conditions for Computation of Incompressible Flows

Moon J. Lee, Byung Do Oh and Young Bae Kim

Key Words : Navier–Stokes equations (나비어–스토욱스 방정식); fractional-step methods (분할단계방법); approximate factorization (근사분해); boundary conditions (경계조건); incompressibility (비압축성).

Abstract

An account of second-order fractional-step methods and boundary conditions for the incompressible Navier–Stokes equations is presented. The present work has aimed at (i) identification and analysis of all possible splitting methods of second-order splitting accuracy; and (ii) determination of consistent boundary conditions that yield second-order accurate solutions. It has been found that only three types (D, P and M) of splitting methods called the canonical methods are non-degenerate so that all other second-order splitting schemes are either degenerate or equivalent to them. Investigation of the properties of the canonical methods indicates that a method of type D is recommended for computations in which the zero divergence is preferred, while a method of type P is better suited to the cases when highly-accurate pressure is more desirable. The consistent boundary conditions on the tentative velocity and pressure have been determined by a procedure that consists of approximation of the split equations and the boundary limit of the result. The pressure boundary condition is independent of the type of fractional-step methods. The consistent boundary conditions on the tentative velocity were determined in terms of the natural boundary condition and derivatives of quantities available at the current timestep (to be evaluated by extrapolation). Second-order fractional-step methods that admit the zero pressure-gradient boundary condition have been derived. The boundary condition on the new tentative velocity becomes greatly simplified due to improved accuracy built in the transformation.

1. 서 론

본 논문은 3 차원 비정상 비압축성유동을 primitive variables 로 기술하는 Navier–Stokes equations 을 위한 fractional-step methods 와 boundary conditions 을 연구한 결과를 담고 있다.

* 포항공과대학교 기계공학과

** 첨단유체공학연구센터

이산화된 Navier–Stokes equations 의 수치해를 구하는 계산은 그 algebraic equations 가 coupled 되어 있어 매우 큰 system 을 형성하므로 비용이 많이 든다. 이러한 어려움은 fractional-step method 를 사용함으로써 해소할 수 있다 (Harlow and Welch[6]; Chorin [4] ; Temam [11,12]).

Fractional-step methods 를 구축하고 실제로 사용하는 데 있어서 해결하여야 할 다음과 같은 2 가지 중요한 과제가 있다: (i) splitting (or decoupling) of the equations (or operators); and (ii) boundary conditions associated with the tentative velocity and pressure. 상기 2 과제는 상호의존적임과 동시에 discretization schemes (both time and space) and configuration of computational domain 과 같은 적용상의 문제 때문에 여태까지 이론의 여지가 많아 왔다. Fractional-step method 로 구한 해의 accuracy 는 time advancement, splitting 및 boundary conditions 의 accuracy (각각 *time accuracy*, *splitting accuracy* 그리고 *accuracy of the boundary conditions* 로 부르기로 함)에 의존한다. Fractional-step method 의 splitting 과 boundary conditions 의 동일한 accuracy 는 이산화된 Navier–Stokes equations 와 natural boundary conditions 에 time-advancement method 의 order of accuracy 까지 동일(*consistent*)할 때 비로소 보장된다.

본 연구의 목적은 다음의 2 가지이다: (i) second-order splitting accuracy 를 갖는 모든 가능한 splitting methods 의 발견; 그리고 (ii) second-order accurate solutions 을 갖게 하는 consistent boundary conditions 의 결정. 본 연구의 방향은 단순하며 직설적으로서 그 결과가 time and spatial derivatives 의 특별한 discretization scheme 또는 computational domain 의 geometry 에 따라 다르지 않는 넓은 적용범위를 갖는다.

최근의 Dukowicz and Dvinsky [5]와 Perot[10] 의 연구에 따르면 fractional-step method 의 splitting 을 이산화된 방정식의 approximate block-factorization 으로 간주할 수 있으며 *ad hoc* splitting 으로 얻어진 방정식의 splitting accuracy 는 time accuracy 와 언제나 같지 아니하다. 그러나, approximate factorization 에 기초한 splitting 으로 얻어진 system of equations 는 unsplit equations 과 time-advancement method 의 order of accuracy 까지 언제나 *consistent* 하다.

본 연구는 이와 같이 탁월한 approximate factorization 의 성질을 이용하여 second-order accuracy 를 갖는 fractional-step methods 를 구축하고자 한다. 먼저 exact block-factorizations 로 이산화된 Navier–Stokes equations 의 모든 가능한 splittings 를 얻은 후에 second-order accuracy 를 갖도록 그 결과를 approximate 하여 적절한 해석을 거치면 3 개의 nondegenerate fractional-step methods (지금부터 각각 *canonical methods* of type D, P and M 라고 부름)를 결정한다. Approximate factorization 으로 얻어진 모든 여타의 fractional-step methods 는 canonical methods 중 하나에 degenerate 하거나 또는 equivalent 하다.

2. Navier–Stokes equations 의 이산화

비압축성 Navier–Stokes 방정식을 적당한 second-order time-advancement methods 를 사용하여 시간에 대해서만 이산화하면 다음과 같이 semi-discrete equations 를 얻는다:

$$\mathrm{A}\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t\, Gp^{(n+1)} = \mathbf{r}, \tag{1}$$

$$\mathrm{D}\mathbf{u}^{(n+1)} = 0. \tag{2}$$

여기서 A 와 G=grad 그리고 D=div 는 continuous differential operators 이며 **r** 는 현재 timestep n 에서 알고 있는 모든 항을 나타낸다. Differential operator A 는 time-advancement schemes 의 선택에 관계없이 A=1− Δt B 로 나타낼 수 있다. 완전이산화한 Navier–Stokes 방정식은 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Delta t\,\mathbf{G} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(n+1)} \\ p^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ c \end{bmatrix}, \tag{3}$$

여기서 $\mathbf{u}^{(n+1)}$과 $p^{(n+1)}$는 내부격자점에서의 속도 및 압력을, **b** 와 c 는 boundary terms 를 나타내며 block matrix 는 system matrix $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{NS}}$ 라고 하자.

3. Second-order fractional-step methods 의 개발

3.1 System matrix 의 exact block-factorization

Exact factorization 은 정해진 splitting accuracy 를 갖는 fractional-step method 를 개발하는 데 필요한 중요한 첫 단계이다. System matrix 를 unit block-lower-triangular matrix L, unit block-upper-triangular matrix U 그리고 2 개의 one-sided block-diagonal matrices D_1 과 D_2 로 분해한다. 이와 같이 4 개의 factorization modules 로 구성 가능한 조합은 모두 24 개가 있는 데, 그 중 12 개만이 nontriviality condition 을 만족하여 4 개의 four-part factorizations, 9 개의 three-part factorizations 그리고 6 개의 two-part factorizations 를 만들 수 있다.

3.2 Approximate block-factorization 방법[2,13]

지금까지 exact factorization 으로 얻어진 splitting schemes 는 system matrix 에 submatrix **A** 의 inverse 를 포함하는 $-\Delta t\ \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{G}$, $-\Delta t\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}$ 그리고 $\mathbf{DA}^{-1}$ 같은 항들이 있어 계산에 어려움이 있기 때문에 approximate 하는 것이 바람직하다. 작은 Δt 에 대하여 $\mathbf{A}^{-1}$를 다음과 같이 전개한다:

Table 1. Second-order factorization of the system matrix $\mathbf{\Gamma}_{NS}$ into two parts, where $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{(s)}$ is the **αth part** of a splitting method with s parts. $\Longleftrightarrow$, equivalent to.

Code	Factorization, $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$	Degen/Equiv
D2A	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	Nondegenerate
D2B	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}$	$\Longleftrightarrow$ D2A
D2C	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ D & 0 \end{bmatrix}$	Unimplementable
P2A	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	Nondegenerate
P2B	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \Delta t\,G \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}$	$\Longleftrightarrow$ P2A
P2C	$\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ D+\Delta t\,DB & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$	Unimplementable

Table 2. Second-order factorization of the system matrix $\mathbf{\Gamma}_{NS}$ into three parts, where $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{(s)}$ is the **αth part** of a splitting method with s parts. $\Longrightarrow$, degenerate to; $\longrightarrow$, degenerate to by interpretation; $\Longleftrightarrow$, equivalent to.

Code	Factorization, $\mathbf{\Gamma}_1^{(3)}\mathbf{\Gamma}_2^{(3)}\mathbf{\Gamma}_3^{(3)}$	Degen/Equiv
D3A	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ D & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ D2A
D3B	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ D2A
D3C	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}$	$\longrightarrow$ D2A
P3A	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ P2A
P3B	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ P2A
P3C	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ P2A
M3A	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	Nondegenerate
M3B	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longleftrightarrow$ M3A
M3C	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}$	$\Longleftrightarrow$ M3A

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} + \Delta t\,\mathbf{B} + \Delta t^2\,\mathbf{B}^2 + \ldots \qquad (4)$$

본 논문에서는 second-order accuracy 를 갖는 방법들을 2 차항 까지 전개한 결과를 사용한다. 다음 단계는 실제로 implement 할 수 있는 factorization 을 찾아 내고 이들 중 fewer factored parts 의 scheme 에 degenerate 하거나 동일한 factored parts 의 수를 갖는 다른 schemes 에 equivalent 한 factorizations 를 밝혀 내는 것이다. 이와 같은 과정을 거쳐 얻은 second-order factorization 을 Tables 1, 2, 3 에 two-part, three-part 그리고 four-part methods 별로 각각 나타내었다.

Table 1 에 나타낸 6 개의 two-part factorizations 는 approximated system matrix 의 어느 operator 가 system matrix $\mathbf{\Gamma}_{NS}$ 의 operator 와 같은가에 따라 2 개의 group 으로 분류하였다. D2A, D2B 와 D2C 는 system matrix 의 pressure-gradient operator 를 $O(\Delta t^2)$로 approximate 한 결과이고 P2A 와 P2B 는 divergence operator 를 approximate 한 것이다. (D2C 는 실현할 수 없는 방법.) 전자를 methods of type D (divergence-free) 그리고 후자를 methods of type P (pressure-accurate)라고 부르자. D2A 와 P2A 를 제외한 방법은 모두 이들로 표현할 수 있으므로 이 2 종류의 방법을 canonical methods 라고 한다.

Table 3. Second-order factorization of the system matrix $\mathbf{\Gamma}_{NS}$ into four parts, where $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{(s)}$ is the αth part of a splitting method with s parts. $\Longrightarrow$, degenerate to.

Code	Factorization, $\mathbf{\Gamma}_1^{(4)}\mathbf{\Gamma}_2^{(4)}\mathbf{\Gamma}_3^{(4)}\mathbf{\Gamma}_4^{(4)}$	Degen/Equiv
D4	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ D2A
P4	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ P2A
M4A	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ M3A
M4B	$\begin{bmatrix} I & 0 \\ D+\Delta t\,DB & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\Delta t\,DG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Delta t\,G \\ 0 & I \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$ M3A

Table 2 에 나타낸 9 개의 three-part factorizations 는 type D 와 P 이외에 이들의 hybrid 인 mixed type 이 존재한다. 이들 중 methods of type D 와 P 는 D2A 혹은 P2A 로 degenerate 하고 methods of type M 은 M3A 와 equivalent 하다. 따라서 M3A 를 canonical methods of type M 이라고 한다.

Table 3 에 보인 4 개의 four-part factorizations 는 모두 앞에서 언급한 canonical methods 에 degenerate 하므로 four-part factorizations 중 canonical methods 는 없다.

4. Fractional-step methods 의 특성

위에서 구한 canonical methods 의 system matrix 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\mathbf{\Gamma}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Delta t\,\mathbf{G} - \Delta t^2\,\mathbf{BG} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (5a)$$

$$\mathbf{\Gamma}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Delta t\,\mathbf{G} \\ \mathbf{D} - \Delta t^2\,\mathbf{DB}^2 & \Delta t^2\,\mathbf{DBG} \end{bmatrix}, \qquad (5b)$$

$$\mathbf{\Gamma}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Delta t\,\mathbf{G} - \Delta t^2\,\mathbf{BG} \\ \mathbf{D} - \Delta t^2\,\mathbf{DB}^2 & -\Delta t^3\,\mathbf{DB}^2\mathbf{G} \end{bmatrix}. \qquad (5c)$$

여기서 pressure term 은 time-advancement scheme 에 관계없이 언제나 first-order temporal accuracy 를 갖고 있음을 알 수 있다. Canonical methods of type D and P 의 splitting structure 를 조사하자.

4.1 Canonical fractional-step methods of type D

이 방법은 two split parts 를 갖는다:

$$\mathbf{Au}^* = \mathbf{r}, \qquad (6a)$$

$$\mathbf{Du}^* - \Delta t\,\mathrm{DG}\phi^{(n+1)} = 0, \qquad (6b)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t\,\mathrm{G}\phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \qquad (6c)$$

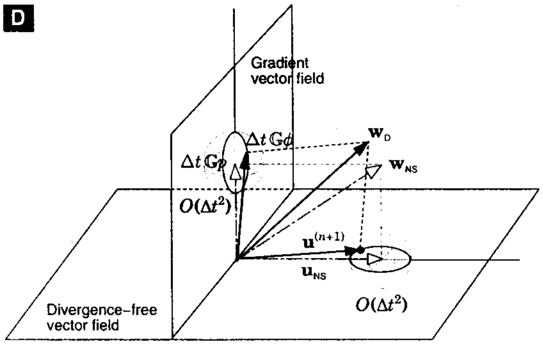

Fig. 1. Comparison of the projection in a second-order method of type D with the exact projection in the Navier–Stokes equations: ——▶, second-order method of type D; - - - -▶, Navier–Stokes equations. The solution of this method is exactly divergence-free (within machine roundoff) and has a second-order error.

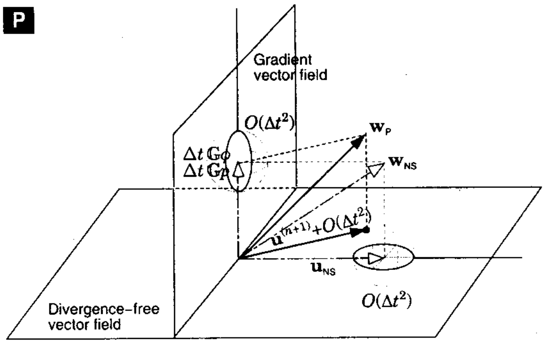

Fig. 2. Comparison of the projection in a second-order method of type P with the exact projection in the Navier–Stokes equations: ——▶, second-order method of type P; - - - -▶, Navier–Stokes equations. The solution obtained by this method is approximately divergence-free to $O(\Delta t^2)$ and has a second-order error.

Pressure-gradient term 이 없는 momentum equations (6a)를 풀어 tentative velocity $\mathbf{u}^*$ 를 구하고 pressure Poisson equation (6b)로 부터 fictitious pressure $\phi^{(n+1)}$ 를 얻어 마지막 projection (pressure update) equation (6c)에서 속도장 $\mathbf{u}^{(n+1)}$ 을 구한다. 구한 속도장의 divergence 는 0 이다: D $\mathbf{u}^{(n+1)} = 0$. 이 방법에서 일어나고 있는 projection 을 Navier–Stokes equation 의 exact projection 과 Fig. 1 에 비교하였다. 이 방법에서는 actual pressure p 는 시간전진 중에 계산하지 않으므로 필요시 별도의 계산을 수행한다. 이 방법에서 구한 속도장은 정확하게 divergence-free 하므로 압력을 시간전진중에 필요로 하지 않는 경우 혹은 속도장의 비압축성이 매우 중요한 계산에 사용할 것을 추천한다.

4.2 Canonical fractional-step methods of type P

Two split parts 를 갖는 이 방법은 아래와 같다:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{r}, \tag{7a}$$

$$D(1+\Delta t\, B)\mathbf{u}^* - \Delta t\, DG\phi^{(n+1)} = 0, \tag{7b}$$

$$A\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t\, G\phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \tag{7c}$$

앞에서 고찰한 fractional methods of type D 와는 다르게 momentum equations (7a)를 explicit 한 방법으로 전진한 후에 pressure Poisson equation (7b)을 풀어 fictitious press 를 얻고 마지막 pressure-correction equation (7c)에서 속도장을 계산한다. 이 방법에서 얻은 fictitious pressure 는 actual pressure p 와 일치한다. Fig. 2 는 이 방법의 projection mechanism 을 보인다. 이 방법에서 계산한 속도장 $\mathbf{u}^{(n+1)}$ 는 단지 $O(\Delta t^2)$ 내에서 approximately divergence-free 하다. 그러나 exact pressure 를 갖는 훌륭한 성질이 있어 정확한 압력이 divergence-free 보다 요구되는 계산에서 혹은 시간전진 중에 압력을 필수적으로 알아야 하는 경우에 유용한 방법이다.

5. Fractional-step methods 의 경계조건

Second-order accuracy 를 갖는 canonical methods 를 사용하여 얻은 해의 accuracy 는 그 경계조건도 splitting accuracy 를 갖아야 비로소 second-order accurate 하다. 이와 같은 경계조건을 consistent boundary conditions 라 한다. Fractional-step methods 의 경계조건을 정하는 일은 nonphysical 한 tentative velocity 와 fictitious pressure 에 대한 것이므로 그 값이 problem formulation 단계에서 미리 알려져 있지 않기 때문에 근본적인 어려움이 있다. 경계조건이 splitting equations 과 동일한 accuracy 를 갖도록 다음의 general rule 에 따라 consistent boundary conditions 를 체계적으로 구하고자 한다.

(i) tentative velocity 와 fictitious pressure 를 splitting accuracy 까지 현재 timestep 에서 알고 있는 변수로 approximate 한다.

(ii) 그 결과를 boundary 에 접근하는 limit 를 취한다.

압력의 경계조건은 Neumann type 을 고려한다. 2 차의 splitting accuracy $O(\Delta t^2)$ 에 해당하는 압력은 1 차의 정확도 $O(\Delta t)$ 를 가지면 충분하다. 이보다 improved 된 정확도를 갖는 경우 보다 정확

Table 4. Consistent second-order boundary conditions for the canonical fractional-step methods of type D, P and M. All the expressions are to be evaluated by extrapolating the corresponding data at the interior of the computational domain, except $\mathbf{u}^{(n+1)}$ for which the natural boundary condition is imposed.

Type	$\mathbb{G}_n\phi^{(n+1)}$	$\mathbf{u}^{*}$	$\mathbf{u}^{**}$
D	$\mathbb{G}_n\phi^{(n)}$ or $\mathbf{n}\cdot[\Delta t^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{u}^{(n+1)})+\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}]$	$\mathbf{r}+\Delta t\,\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}$ or $\mathbf{u}^{(n+1)}+\Delta t\,\mathbb{G}\phi^{(n)}$	–
P	$\mathbb{G}_n\phi^{(n)}$ or $\mathbf{n}\cdot[\Delta t^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{u}^{(n+1)})+\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}]$	$\mathbf{r}$ or $\mathbf{u}^{(n+1)}+\Delta t\,(\mathbb{G}\phi^{(n)}-\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)})$	–
M	$\mathbb{G}_n\phi^{(n)}$ or $\mathbf{n}\cdot[\Delta t^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{u}^{(n+1)})+\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}]$	$\mathbf{r}$ or $\mathbf{u}^{(n+1)}+\Delta t\,(\mathbb{G}\phi^{(n)}-\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)})$	$\mathbf{r}+\Delta t\,\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}$ or $\mathbf{u}^{(n+1)}+\Delta t\,\mathbb{G}\phi^{(n)}$

Table 5. Consistent second-order boundary conditions for the canonical fractional-step methods of type D, P and M, when the steady zero-velocity condition is imposed at the boundary. Here, the nonlinear terms are treated explicitly and viscous terms are treated by the Crank–Nicolson method (AXCN method).

Type	$\mathbb{G}_n\phi^{(n+1)}$	$\mathbf{u}^{*}$	$\mathbf{u}^{**}$
D	$\mathbb{G}_n\phi^{(n)}$ or $\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbf{n}\cdot\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	$\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	–
P	$\mathbb{G}_n\phi^{(n)}$ or $\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbf{n}\cdot\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	$\frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	–
M	$\mathbb{G}_n\phi^{(n)}$ or $\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbf{n}\cdot\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	$\frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	$\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$

한 결과를 보일 수는 있으나 그렇다고 improved *order* of accuracy 를 갖음을 뜻하는 것은 아니다. 1 차의 정확도 $O(\Delta t)$를 갖는 가장 단순한 형태의 경계조건은 $\phi^{(n+1)}$를 시간상 Taylor series 로 전개하여 첫 항만을 취하여 얻을 수 있다:

$$[G_n\,\phi^{(n+1)}]_B = [\,G_n\,\phi^{(n)}]_B + O(\Delta t). \qquad (8)$$

여기서 $[*]_B = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_B}(*)$는 경계로의 limit 을 의미하며 $G_n = \mathbf{n}\cdot G$ 은 경계면에 수직한 벡터 **n** 방향으로의 gradient 를 나타낸다. 이 경계조건을 current pressure-gradient (CPG) condition 이라고 하자. 압력경계조건의 다른 expression 은 split equations 또는 이들의 조합으로부터 구할 수 있으며 앞에서 구한 canonical fractional-step methods of type D, P and M 의 압력 및 속도의 경계조건을 Table 4 에 정리하였다. 대부분의 경계조건들은 interior 의 data 를 extrapolate 하여 구한다.

많은 경우에 유동은 steady zero-velocity wall 을 갖으며 이와 같은 유동의 계산에 필요한 경계조건을 고려하기로 하자. 우선 점성항을 second-order implicit 방법인 Crank–Nicolson 방법으로 비선형항을 second-order explicit 방법인 Adams–Bashforth 방법이나 여타의 explicit 한 방법으로 전진한다고 하고 이 방법을 AXCN 이라고 하자. 이 경우 B operator 는 B = L / (2Re)로 나타낼 수 있다 (L 은 Laplace operator). 이 경우에 canonical fractional-step methods 에 쓸 수 있는 경계조건들을 Table 5 에 정리하였다[1,7-9].

6. Homogeneous 압력경계조건을 갖는 fractional-step methods

위에서 보인 바와 같이 압력의 경계조건을 구하기 위하여 interior 의 data 를 extrapolate 하여야 하므로 정확도는 차치하고라도 안전성을 해칠 수 있는 여지가 매우 많다. 새로운 압력을 정의하여 homogeneous pressure-gradient (HPG) condition 을 만족토록 한다면 이와 같은 어려움을 극복할 수 있다. 새로운 pressure 는 다음과 같이 delta-form pressure 의 형태임을 보일 수 있다:

$$\Phi^{(n+1)} = \phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}. \qquad (9)$$

Fractional-step methods of type D*는 위에서 얻은 canonical methods of type D 에서 새로운 압력을 이용하여 만든 방법으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{r} - \Delta t\, G\phi^{(n)}, \qquad (10a)$$

$$D\mathbf{u}^* - \Delta t\, DG\Phi^{(n+1)} = 0, \qquad (10b)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t\, G\Phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \qquad (10c)$$

이 방법의 특성은 methods of type D 와 유사하다. 속도장이 divergence-free 하고 압력은 actual pressure 와 2 차의 정확도를 갖는다. 이 방법의 projection mechanism 을 Fig. 3 에 보이고 있다. 이 방법의 또 다른 장점은 tentative velocity 의 경계조건이 매우 간단하게 된다는 점이다. 같은 방법으로 fractional-step methods of type P*와 M*를 얻을 수 있으나 tentative velocity 의 경계조건이 간단하게 되지 않는다. 이들의 tentative velocity 에 적용하는 경계조건을 Table 6 에 정리하였다.

앞에서 고려하였던 steady zero-velocity wall 을 갖는 유동에 AXCN 방법을 적용한 경우에 사용되는 fractional-step methods of type D*, P* 및 M*의 경계조건을 Table 7 에 정리하였다[3].

7. 요약 및 결론

2 차정확도의 fractional-step methods 및 boundary conditions 를 연구하였다. 본 연구는 (i) second-order splitting accuracy 갖는 가능한 모든 splitting methods 를 찾아내며; (ii) second-order accurate 한 해를 구할 수 있도록 consistent

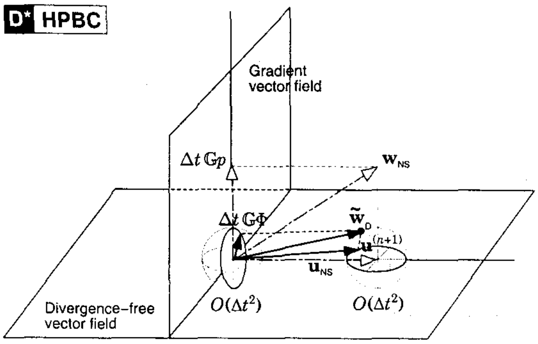

Fig. 3. Schematic of the projection in a new second-order method of type D* using the 'delta-form' pressure: ——▶, present method; -·-·-▶, Navier–Stokes equations. Instead of the usual $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{(n+1)} + O(\Delta t^2)$, a new vector field $\mathbf{w} - \Delta t\, \mathbf{G}\phi^{(n)} = \mathbf{u}^{(n+1)} + O(\Delta t^2)$ is used for the projection in this method. The solution is exactly divergence-free (within machine roundoff) and has a second-order error $O(\Delta t^2)$.

boundary conditions 를 결정하는 데 주력하였다. 연구방법과 결과는 특정한 time-advancement schemes, spatial derivatives 의 discretization 방식 또는 computational domain 의 기하학적 형상에 따라 다르지 않아 광범위하게 적용할 수 있다. 2 차 정확도를 보장하도록 approximate factorization 에 기초하여 개발한 fractional-step methods 는 general rule 에 따라 유도한 consistent boundary conditions 과 함께 계산에 사용하면 원하는 2 차정확도의 해를 구할 수 있다. Canonical methods 의 특성과 projection mechanism 을 밝혀 내었으며, homogeneous 경계조건을 갖는 fractional-step methods 를 기본방정식으로부터 유도하였다. 개발된 fractional-step methods 는 각각의 장점을 계산특성에 맞추어 사용하도록 권장한다.

Table 6. Consistent second-order boundary conditions for the canonical fractional-step methods of type D, P and M that admit homogeneous Neumann boundary condition on the pressure. All the expressions are to be evaluated by extrapolating the corresponding data at the interior of the computational domain, except $\mathbf{u}^{(n+1)}$ for which the natural boundary condition is imposed.

Type	$\mathbb{G}_n\Phi^{(n+1)}$	$\mathbf{u}^*$	$\mathbf{u}^{**}$
D*	0	$\mathbf{u}^{(n+1)}$	–
P*	0	$\mathbf{r} - \Delta t\,\mathbb{G}\phi^{(n)}$ or $\mathbf{u}^{(n+1)} - \Delta t\,\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}$	–
M*	0	$\mathbf{r} - \Delta t\,\mathbb{G}\phi^{(n)}$ or $\mathbf{u}^{(n+1)} - \Delta t\,\mathbb{B}\mathbf{u}^{(n)}$	$\mathbf{u}^{(n+1)}$

Table 7. Consistent second-order boundary conditions for the canonical fractional-step methods of type D, P and M that admit homogeneous Neumann boundary condition on the pressure, when the steady zero-velocity condition is imposed at the boundary. Here, the nonlinear terms are treated explicitly and viscous terms are treated by the Crank–Nicolson method (AXCN method).

Type	$\mathbb{G}_n\Phi^{(n+1)}$	$\mathbf{u}^*$	$\mathbf{u}^{**}$
D*	0	0	–
P*	0	$-\frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	–
M*	0	$-\frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\mathbb{L}\mathbf{u}^{(n)}$	0

참고문헌

(1) Armfield, S. and Street, R. 1999 The fractional step method for the Navier–Stokes equations on staggered grids: The accuracy of three variations. *J. Comput. Phys.* **153**, 660–665.
(2) Beam, R. M. and Warming, R. F. 1978 An implicit factored scheme for the compressible Navier–Stokes equations. *AIAA J.* **16**, 393–402.
(3) Choi, H. and Moin, P. 1994 Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow. *J. Comput. Phys.* **113**, 1–4.
(4) Chorin, A. J. 1968 Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Math. Comp.* **22**, 745–762.
(5) Dukowicz, J. K. and Dvinsky, A. S. 1992 Approximate factorization as a higher-order splitting for the implicit incompressible flow equations. *J. Comput. Phys.* **102**, 336–347.
(6) Harlow, F. W. and Welch, J. E. 1965 Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluids with free surface. *Phys. Fluids* **8**, 2182–2189.
(7) Karniadakis, G. E., Israeli, M. and Orszag, S. A. 1991 High-order splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **97**, 414–443.
(8) Kim, J. and Moin, P. 1985 Application of a fractional-step method to incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **59**, 308–323.
(9) Orszag, S. A., Israeli, M. and Deville, M. O. 1986 Boundary conditions for incompressible flows. *J. Sci. Comput.* **1**, 75–110.
(10) Perot, J. B. 1993 An analysis of the fractional step method. *J. Comput. Phys.* **108**, 51–58.
(11) Temam, R. 1969 Sur l'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes par la méthode des pas fractionaries. I. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **33**, 135–153.
(12) Van Kan, J. 1986 A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **7**, 870–891.
(13) Warming, R. F. and Beam, R. M. 1978 On the construction and application of implicit factored schemes for conservation law. In *SIAM–AMS Proc* Vol. 11 (Proc. Symp. on Comput. Fluid Dyn., New York, New York, April 16–17, 1977), pp. 85–129.