

# LES를 이용한 축류 터빈 경계층 천이에 대한 수치해석

진병주\* · 박노마\* · 유정열\*\*

## Large Eddy Simulation of Boundary Layer Transition on the Turbine Blade

Byungju Jin, Noma Park, Jung Yul Yoo

**Key Words:** Compact difference scheme(컴팩트 차분 기법), LES(큰에디모사법), Turbine boundary layer transition(터빈 경계층 천이)

### Abstract

A numerical study is performed to investigate the interaction between subsonic axial turbine blade boundary layer and periodically oncoming rotor induced wakes. An implicit scheme for solving the compressible Navier-Stokes equation is developed, which adopts a 4th-order compact difference for spatial discretization, a 2nd order Crank-Nicolson scheme for temporal discretization and the dynamic eddy viscosity model as the subgrid scale model. The efficiency and the accuracy of the proposed method are verified by applying to some benchmark problems such as laminar cylinder flow, laminar airfoil cascade flow and a transitional flat plate boundary layer flow. Computational results show good agreements with previous experimental and numerical results. Finally, flow through a stator cascade is simulated at  $Re = 7.5 \times 10^5$  without free-stream turbulence intensity. The velocity fields and skin friction coefficients in the transitional region show similar trends with previous boundary layer natural transition.

### 1. 서론

지금까지 경계층의 바이패스 천이(bypass transition)에 대해서는 많은 연구들이 이루어져 왔다.<sup>(1)(2)</sup> 직접수치모사(DNS)와 큰에디모사(LES)는 천이 현상에 대한 이해를 도울 뿐만 아니라 정량적인 데이터를 얻는 데 유용한 연구 수단이 될 수 있다. Wu<sup>(3)</sup> 등의 연구는 주목할만한데 그들은

MPI(message passing interface)를 이용한 병렬처리 기법으로  $5.24 \times 10^7$  격자 수에 대해 직접수치모사를 수행하여 평판을 따라 발달하는 층류 경계층과 주기적으로 유입되는 후류와의 상호관계에 대해 보고하였다. 그들의 결과에 의하면 유입되는 교란은 경계층에서 줄무늬구조(streaky structure 또는 puffs)로 발달하고 후류에 의해 발생한 바이패스 천이의 파괴는 경계층의 바깥에서 일어난다.

따라서 본 연구는 다음과 같은 두 가지에 주안점을 두고 있다. 첫째, 터보기계의 천이 현상에 대해 큰에디모사 방법을 효과적으로 사용할 수 있는가를 검증한다. 둘째, 터보기계의 경계층 천

\* 서울대학교 기계항공공학부 박사과정

\*\* 서울대학교 기계항공공학부 교수

이 과정이 Wu<sup>(3)</sup>등이 밝힌 것과 동일한 과정으로 일어나는가를 검증한다. 이를 위해 복잡한 형상에 대해서도 적용 가능한 고차 정확도의 컴팩트 차분 기법을 이용하여 효율적이고 정확한 수치기법을 개발하고 이를 검증 문제에 적용하며, 축류터빈 익형의 경계층 천이에 대한 큰에디모사의 결과를 제시하고자 한다.

## 2. 지배방정식 및 수치기법

### 2.1 지배방정식과 SGS 모델

큰에디모사를 위해 필터를 취한 압축성 지배방정식은 질량, 운동량, 에너지 보존 방정식 그리고 상태방정식으로 구성되며 그 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} u_k) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} u_i \tilde{u}_k + \bar{p} \delta_{ik} - \tilde{\sigma}_{ik} + \tau_{ik}) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{E}_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\tilde{u}_k (\bar{E}_T + \bar{p}) - \tilde{\tau}_{ik} \tilde{u}_i - \bar{Q}_k + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2} q_k] &= 0, \\ \bar{p} &= (\gamma-1)(\bar{E}_T - \frac{1}{2} \bar{\rho} u_k \tilde{u}_k) - \frac{\gamma-1}{2} \tau_{kk}, \end{aligned} \quad (1)$$

응력 텐서와 SGS 응력 성분 그리고 열유속은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \\ \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} &= -2C_s(\mathbf{x}, t) \bar{\rho} \Delta^2 |\bar{S}| S_{ij}^* = -2\mu_T \bar{S}_{ij}^*, \\ \tau_{kk} &= 2C_I(\mathbf{x}, t) \bar{\rho} \Delta^2 |\bar{S}|^2, \\ \bar{Q}_k &= \frac{\mu}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{RePr}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (2)$$

위의 식에서 ( $\tilde{\cdot}$ )은 Favre 필터를 취한 값을 의미하고  $S_{ij}$ 는 변형률 텐서로  $S_{ij}^* = S_{ij} - \delta_{ij}/3 \cdot S_{kk}$ ,  $|\bar{S}| = \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}$ 과 같은 관계를 가진다.

식 (2)에서 결정되지 않은 값은 Smagorinsky 상수  $C_s$ ,  $C_I$ 와 난류 Prandtl 수  $\text{Pr}_t$ 이다. 이러한 값들

은 Moin<sup>(4)</sup>에 의해 제안된 동적(dynamic)모델을 사용하며 동적모델 상수의 산란을 막기 위해 균질(homogenous) 방향으로 평균된 최소자승법(least square method)을 사용한다.<sup>(5)</sup> 격자(Grid) 필터와 시험(Test) 필터의 비  $\Delta/\Delta$ 는 2로 주었다.<sup>(6)</sup> 시험 필터로는 Simpson's 1/3 rule를 사용하는 Box 필터를 사용하며, 4차 표준 Pade 기법<sup>(7)</sup>과 결합하여 교환 법칙에 의한 오차를 줄이는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 이는 SGS의 점성을 정확하게 계산하기 위해 매우 중요한 성질이다.

### 2.2 컴팩트 차분 기법의 적용

다음으로 2차원 일반좌표계에서 Beam & Warming<sup>(8)</sup>에 의해 제안된 차분식을 선형화하고 k 번째 비선형 반복계산에 대한 차분 형태로 나타내면 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta q^k + h \delta_\xi (A \Delta q)^k + h \delta_\eta (B \Delta q)^k - h \delta_\eta^2 (T \Delta q)^k \\ = b^{n,k} - h \delta_\xi r^\xi - h \delta_\eta r^\eta = r^{n,k} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 A, C, T는 Jacobian matrices를 의미하고 q는 보존변수 벡터,  $h = \Delta t/2$ ,  $b^{n,k} = q^n - q^k$ ,  $r^\xi = e^k - e_v^k + e^n - e_v^n$ 의 관계가 성립한다.  $e$ ,  $e_v$ 는  $\xi$  방향의 대류항과 점성항을 의미한다. 더 자세한 내용은 Beam & Warming<sup>(8)</sup>의 논문을 참고하라. 주위 격자점간의 가중 합산 연산자 ( $\Omega^p(\phi) = \phi_{[4]p} = \phi_{p-1} + 4\phi_p + \phi_{p+1}$ )를 도입하여 식 (3)에 적용한다. 인수분해 기법과 대각화 기법<sup>(9)</sup>을 적용하여 차분된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left( I - \frac{3h}{\Delta \xi} A_\xi \right) s_{i-1,j} + 4s_{i,j} + \left( I + \frac{3h}{\Delta \xi} A_\xi \right) s_{i+1,j} \\ = E_\xi^{-1} r_{[4]i,[4]j} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left( I - \frac{3h}{\Delta \eta} C - \frac{6h}{\Delta \eta^2} T \right) \Delta q_{i,j-1} + \left( 4I + \frac{12h}{\Delta \eta^2} T \right) \Delta q_{i,j} \\ + \left( I + \frac{3h}{\Delta \eta} C \right) \Delta q_{i,j+1} = E_\eta r_{i,j} \end{aligned}$$

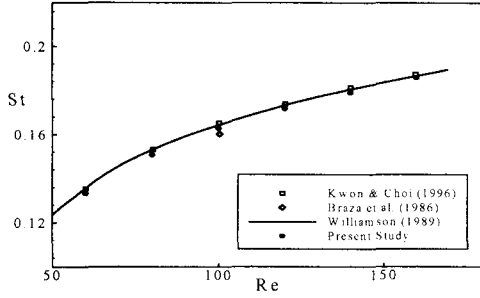


Figure 1. Comparison of strouhal number vs reynolds number for flow past a circular cylinder

$E_{\xi}, A_{\xi}$ 는 각각 주 유동 방향의 대류항의 자코비안에 대한 고유 벡터와 고유치 행렬을 의미한다. 식 (4)를 구성하기 위해 4차의 표준 콤팩트 기법이 내재적으로 적용되며 우변 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} r_{[4]i,[4]j} &= b_{[4]i,[4]j} - h\delta x_{[4]i,[4]j}^{\xi} - h\delta x_{[4]i,[4]j}^{\eta} \quad (5) \\ &= b_{[4]i,[4]j} - \frac{3h}{\Delta\xi}(r_{i+1}^{\xi} - r_{i-1}^{\xi})_{[4]j} \\ &\quad - \frac{3h}{\Delta\eta}(r_{j+1}^{\eta} - r_{j-1}^{\eta})_{[4]i} \end{aligned}$$

우변 항에 다시 4차의 콤팩트 기법을 적용하면 공간에 대한 미분항이 없어지게 된다. 이런 절차에 의해서 우변 항을 계산하기 위해 추가적으로 행렬을 풀 필요가 없게 되므로 메모리와 시간을 줄일 수 있게 된다. 이렇게 제안된 기법은 각 방향에 대해 이웃하는 3개의 격자점만으로도 공간에 대해서 4차의 정확도를, 시간에 대해서는 2차의 정확도를 만족시킨다.

### 3. 수치해석 결과

#### 3.1 원형 실린더 주위의 비정상 유동

첫 번째 검증 문제는 원형 실린더를 지나는 비정상 층류 유동에 관한 해석이다. 자유 유동의 마하수는 0.2이며 기존의 실험 및 수치 결과와 비교 검증한다. 무차원화된 시간 간격은 0.002부터 0.011까지이며 계산 영역의 크기는 70D로부터

200D까지이다. 격자의 크기는 91× 71부터 221× 201까지이며 O형 격자계이다. 레이놀즈수는 60~160까지로 층류 영역에 속한다. Fig. 1은 St와 Re와의 관계를 나타낸 그래프로 기존의 실험 및 수치 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

#### 3.2 3차원 비정상 층류 유동

낮은 레이놀즈수에서 실린더 후류는  $190 < Re < 260$ 의 영역을 넘어서면 미세한 3차원 구조가 점차적으로 무질서해지게 되는데 미세한 3차원 구조는 보통 실린더 후류의 주 유동 방향의 와동 성분과 관계가 있다. 따라서 원형 실린더를 지나가는 3차원 비정상 유동 해석은 본 논문에서 제안된 수치 기법의 공간 해상도를 검증하기에 적절한 문제가 될 수 있다. 본 연구에서의 계산 영역은  $-50D < x/D < 50D$ 이며 스펙트럼의 크기는 실린더 직경의 3배이다. 221× 201× 21 크기의 O형 격자계를 사용한다. 따라서 스펙트럼의 격자 간격은 0.15D로 이는 비교적 성근 격자이다. 자유 유동 속도와 실린더 직경을 기준으로 한 레이놀즈수는 600이며 CFL 수는 40으로 이는 무차원화된 시간 간격으로는 0.009이다. Fig. 2는 주유동방향 속도 성분의 스펙트럼을 보여 주고 있으며 shedding 주파수, 즉 St를 구할 수 있다. 본 연구의 결과 ( $St = 0.2044$ )는 Fey<sup>(10)</sup>등에 의한 결과인  $St = 0.2077 \pm 0.0015$ 와 Roshko<sup>(9)</sup>의 결과인  $St = 0.2075$ 와 1.5%의 오차로 잘 일치한다.

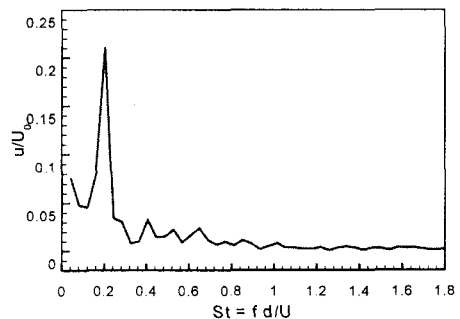


Figure 2. Frequency spectrum of streamwise velocity component of flow past a circular cylinder



Figure 3. Streamwise vorticity contour:  $\omega_x = \pm 0.3$  at  $t = 65$

Fig. 3은 주유동방향 와도 및 압력장을 나타낸다. 실린더에서 멀리 떨어진 후류에서의 와동 성분의 약화는 격자의 집중으로 인한 감쇄 효과 때문이다. 위의 결과는 매우 적은 스팬방향의 격자 수에도 불구하고 후류 영역의 전단층의 구조나 주유동방향의 와동 구조를 잘 보여 주고 있음을 볼 수 있다. 이러한 결과는 콤팩트 차분 기법이 고해상도를 요구하는 복잡한 형상의 유동해석에 적합함을 입증하며, 결과적으로 계산시간을 줄이는 데 기여할 수 있음을 보여준다.

### 3.3 NACA0012 익렬 유동

다음으로 익렬 형상을 지나는 유동해석을 위한 H형 격자계의 효과를 알아보고 3차원 계산을 위한 기초 단계로 이용하기 위해 NACA0012 익형을 지나는 층류 유동에 대해 계산을 수행하였다. 기존의 결과<sup>(11)</sup>와 비교하기 위해 자유 유동 속도와 코드 길이를 기준으로 한 레이놀즈수는 5000, 마하수는 0.5로 택했다. 받음각이  $0^\circ$ ,  $3^\circ$ 의 두 가지 경우가 고려되었고 각각의 받음각의 경우 격자 수는  $201 \times 101$ ,  $271 \times 101$ 이다. Fig. 4는 압력면을 따른  $C_p$ 를 나타내고 있으며 각각의 받음각에 대해 Venkaterinaris<sup>(11)</sup>의 수치 결과와 잘 일치한다.

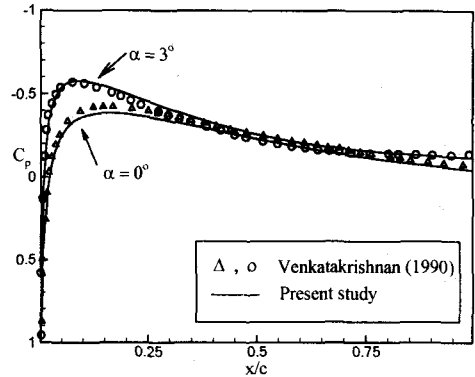


Figure 4. Pressure coefficient distributions along the pressure side of naca0012 airfoil at  $Re = 5000$

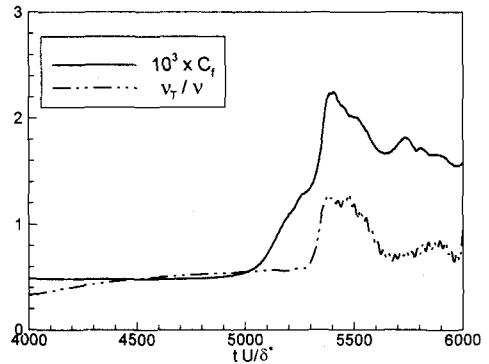


Figure 5. Time evolution of skin friction coefficient and eddy viscosity

### 3.4 경계층 유동해석

바이패스 천이 현상을 예측하기 위해 사용하는 동적 SGS 모델을 검증하기 위해 낮은 마하수에서 경계층 유동에 대한 큰에디모사를 수행한다. 입구의 배제 두께를 기준으로 한 레이놀즈수는 1000이며 자유 유동 마하수는 0.5이다.  $61 \times 25 \times 21$  격자를 사용하고, 주유동방향과 스팬방향으로는 균일 격자를 사용하며 벽면에 수직인 방향으로는 집중된 격자를 사용한다. 다른 계산 조건들은 Normand & Leisieur<sup>(12)</sup>의 조건과 같다. Fig. 6은 공간 평균된  $\nu_{||}/\nu$ 값의 변화와 함께 시간에 따른  $C_f$ 의 변화를 나타내고 있다. 위의 결과를 통해 사용된 모델이 천이가 시작하는 지점에서부터

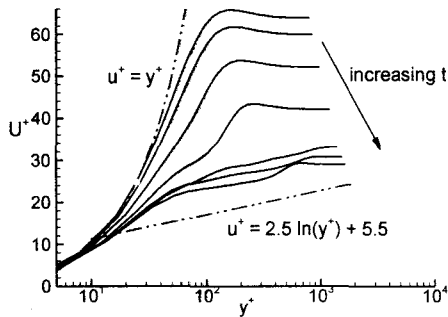


Figure 6. Mean velocity profiles at various time

$\nu_t$  값이 증가하는 천이 현상의 시작을 잘 예측하고 있음을 알 수 있다. 그러나 적은 격자수를 사용해서 해상도가 떨어지므로 정확한 통계량의 일치는 기대하기 힘들다. 그러나 주유동방향의 평균 속도 구배는 Blasius 속도 구배에서 벽 법칙 속도 구배로 옮겨가는 일반적인 천이 경로를 잘 보여 주고 있다 (Fig. 6).

### 3.5 NACA0012 익형의 경계층 천이

마지막으로 자유유동 난류 성분이 없는 경우, 익형 표면을 따른 자연 천이 현상에 대해서 해석하였다. 천이의 시작점은 입구 난류 강도와 레이놀즈수, 그리고 압력 구배에 매우 민감하다. 본 연구에서 코드 길이를 기준으로 한  $Re = 7.5 \times 10^5$  이다. Fig. 8은 주유동방향 속도 성분의 섭동량을 나타내며 Fig. 9는 후연 근처에서의 속도 섭동량을 나타내고 있다. 익형 표면의 대부분은 층류 영역이며,  $x/c = 0.6$ 을 지나서 Tollmien-Schlichting 파가 생기고  $x/c = 0.7$ 부분에서 난류 스팟(turbulent spot)이 생기고 하류로 가면서 천이 현상의 파괴가 일어나고 줄무늬 구조가 생기며 난류로 변해감을 알 수 있다.



Figure 7. U-velocity fluctuation contour along the airfoil surface at  $Re = 7.5 \times 10^5$

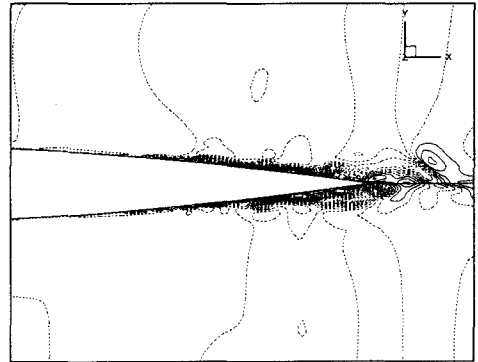


Fig. 8 U-velocity fluctuation contour near the trailing edge at  $Re = 7.5 \times 10^5$

그러나 위의 결과는 입구 유동이 전체 계산 영역을 한 번 지날 정도의 시간이 경과한 경우로, 평균값이 충분히 수렴하지 않은 초기 단계의 계산 결과이다. 이 단계에서는  $C_f$  그래프가 변화하고 있어 천이 과정의 대략적인 단계만을 살펴볼 수가 있었다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 NACA0012 익형에 대해 LES를 수행하였다. 4차 정확도의 컴팩트 차분 기법, 2차의 Crank-Nicolson 시간 차분 기법, 동점성 모델을 사용하여 내재적 수치 기법을 개발하였다. 제안된 수치기법의 효율성과 정확성을 검증하기 위해 몇몇 기본예제(benchmark) 문제에 적용하여 비교 검토하였으며 기존의 실험 및 수치 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 마지막으로 자유 유동 난류가 없는  $Re = 7.5 \times 10^5$ 의 경우에 대해 NACA0012 익형 주위의 유동 해석을 수행하여 천이 현상을 관찰할 수 있었다.

## 후기

본 연구는 한국 철도 기술 연구소 (KRRRI)와 연구개발정보센터 슈퍼컴퓨팅 사업단(KORDIC)의 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Liu, X. & Rodi, W., 1994, "Experiments on Transitional Boundary Layers with Wake-Induced Unsteadiness," *J. Fluids Mech.*, 231, pp. 229-256.
- (2) Orth, U., 1993, "Unsteady Boundary Layer Transition in Flow Periodically Disturbed by Wakes," *Trans. ASME J. Turbomachinery*, 115, pp. 707-713.
- (3) Wu, X., Jacobs, R. G., Hunt, J. C. R. & Durbin, P., 1999, "Simulation of Boundary Layer Transition Induced by Periodically Passing Wakes," *J. Fluid Mech.*, 398, pp. 19-153.
- (4) Moin, P., Squires, K., Cabot, W. & Lee, S., 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport," *Phys. Fluids*, A 3(11), pp. 2746-2757.
- (5) Lily, D. K., 1992, "A Proposed Modification of Germano Subgrid-Scale Closure Method," *Phys. Fluids*, A 4(3), pp. 633-635.
- (6) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. & Cabot, W., 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids*, A 3(7), pp. 1760-1765.
- (7) Lele, S. K., 1992, "Compact Difference Schemes with Spectral-like Resolution," *J. Comput. Phys.*, 103, pp. 16-42.
- (8) Beam, R. M. & Warming, R. F., 1978, "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, 16, pp. 393-402.
- (9) Roshko, A., 1954, "On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets," NACA TN 1191.
- (10) Fey, U., König, M. & Eckelmann, H., 1998, "A New Strouhal-Reynolds-Number Relationship for the Circular Cylinder in the Range  $47 < Re < 2 \times 10^5$ ," *Phys. Fluids*, A 10, pp. 1547-1549.
- (11) Venkatakrishnan, V., 1990, "Viscous Computations Using a Direct Solver," *Computers & Fluids*, 18(2), pp. 191-204.
- (12) Normand, X. & Lesieur, M., 1992, "Direct and Large-Eddy Simulations of Transition in the Compressible Boundary Layer," *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3, pp. 231-252.
- (13) Braza, K., Chassaing, P. & Minh. H. H., 1986, "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," *J. Fluid Mech.*, 165, pp. 79-130.
- (14) Halstead, D. E., Wisler, D.C., Okiishi, T. H., Walker, G. J., Hodson, H. P. & Shin, H. W., 1997, "Boundary Layer Development in Axial Compressors and Turbines - Part 1: Composite Picture; Part 2: Compressors; Part 3: LP Turbines; Part 4: Computations and Analysis," *Trans. ASME J. Turbomachinery*, 119, 114-127, 128-138, 225-237, pp. 426-443.
- (15) Kleiser, L. & Zang, T. A., 1991, "Numerical Simulation of Transition in Wall-Bounded Shear Flows," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23, pp. 495-537.
- (16) Kwon, K. & Choi, H., 1996, "Control of Laminar Vortex Shedding Behind a Circular Cylinder Using Splitter," *Phys. Fluids*, A 8(2), pp. 479-485.
- (17) Pulliam, T. H. & Chaussee, D. S., 1981, "A Diagonal Form of an Implicit Approximation Factorization Algorithm," *J. Comput. Phys.*, 39, pp. 347-363.