

미세극성유체 이론을 이용한 마이크로 채널내의 유동장 해석

최근우* · 김지희* · 김윤제**

Analysis of Microchannel Flow Fields Using Micropolar Fluid Theory

G.-W. Choi*, J.-H. Kim* and Youn J. Kim**

Key Words: Micropolar fluid(미세극성유체), Couple stress(조합응력), Microrotation(미세 회전), Vorticity(와도), Microelements(미세 요소)

Abstract

In this paper, we have described the microchannel fluid behavior in a slot between rotating curvilinear surfaces of revolution using micropolar fluid theory. In order to solve this problem, we have used boundary layer equations and applied non-zero values of the microrotation vector on the wall. The results are compared with the corresponding flow problems for Newtonian fluid. Results show that both the velocity distribution and the microrotation component distribution for a micropolar fluid are lower than that of a Newtonian fluid.

기호설명

- $v_{x,\theta,y}$: x, θ, y 방향의 속도
- Ω_i : x, θ, y 방향의 미세 회전성분
- δ : 무차원 점성계수 비($\delta = \frac{\lambda}{\mu}$)
- κ : 와점성계수(vortex viscosity)
- μ : 절대점성계수
- η : y 방향의 무차원수
- M : 미세 극성 매개변수 (micropolar parameter)
- ζ : 미세 회전 경계변수

1. 서 론

근래의 초소형기계(micro-machines) 개발과 더불어 유체시스템의 마찰저항을 감소시키고, 열전달을 촉진시키기 위해 미세한 크기(micro-scale)의 유동에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 이러한 미세유동(microflows)에 대한 실험에서 관측된 결과는 전형적인 뉴턴 유체 이론으로는 설명할 수 없는 새로운 개념의 물리적 현상으로 알려져 있다. 예를 들어, 평판사이의 압착된 매우 얇은 막에 대한 Needs⁽¹⁾의 실험결과로부터 얻은 응답시간은 뉴턴 이론에 의해 예측된 것보다 긴 결과를 나타내었다. Eringen⁽²⁾에 의해 소개되고 정리된 미세 극성유체 이론(micropolar fluid theory)은 유체 입자의 미세 회전 효과(microrotational effect)를 포함하므로써 이러한 현상을 설명하였고, 이는 연속체(continuum) 역학의 또 다른 분야로서 실제 유동 모사의 적용성 때문에 많은 관심을 끌고 있다.

미세 극성 유체(micropolar fluids)란 고분자 첨

* 성균관대학교 대학원
 ** 성균관대학교 기계공학부

2. 이론적 배경

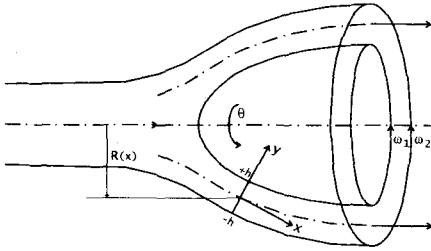


Fig. 1 Slot between rotating curvilinear surfaces of revolution.

가재, 혈액 유동, 윤활제, 액체 속의 결정 성장 (crystal growth in liquids), 오염된 기름이나 콜로이드 상태의 부유물(suspension) 등과 같이 미세 입자를 포함하는 유체로서, 유체 요소의 국소조각과 미소운동에 영향을 받는다. 이러한 미세 극성유체 이론에 기초를 둔 수학적 모델은 다양한 유체유동의 해석에 적용되고 있다.

예를 들면, Ariman⁽³⁾은 미세 극성유체 이론을 적용하여 100 μm의 크기를 갖는 작은 동맥에서의 혈액유동을 해석하였다. 그는 벽면에서의 미세 회전 성분이 없다라는 가정하에서 속도구배값을 해석하였다.

Kim⁽⁴⁾은 상사해법을 이용하여 평판유동과 썩기형 물체 주위의 비압축성, 미세 극성유체의 정상·층류유동에 대하여 고찰하였으며, 속도구배는 고찰된 값의 범위 내에서 미소하게 변화하였지만 회전장과 조합응력의 값은 큰 차이가 있음을 확인하였다.

Walicka 등⁽⁵⁾은 미세 극성유체 이론을 이용하여 마이크로 채널내의 유동특성을 벽면 경계조건이 제로 조건이라는 가정하에 해석적인 해를 구하였다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 일반적인 축대칭으로 이루어져 있는 회전 곡면체 슬롯(slot)사이의 비압축성 미세 극성유체의 정상상태, 층류 유동에 대해 고찰하였다. 기존의 연구에서는 대부분 미세 극성유체의 벽면경계조건을 제로 조건이라는 가정하에 해석연구를 수행하였지만, 본 연구에서는 속도 구배값에 일정한 비례관계를 가지는 경계조건을 적용하여 실제문제에 더 근접한 해를 구하고 이에 따른 유동특성을 Newton 유체와 비교하여 고찰하였다.

Eringen⁽²⁾에 의해 정립된 미세극성 유체 이론은 다음과 같다.

$$t_{ij} = (-\pi + \lambda d_{nm})\delta_{ij} + (2\mu + k)d_{ij} + k\epsilon_{ijk}(\omega_k - \Omega_k) \quad (1)$$

$$m_{ij} = \alpha\Omega_{n,n}\delta_{i,j} + \beta\Omega_{i,j} + \gamma\Omega_{j,i} \quad (2)$$

여기서, t_{ij} 는 응력 텐서(stress tensor), m_{ij} 는 조합 응력 텐서(couple stress tensor)이다.

등온(isothermal), 비압축성(incompressible) 유동에 대한 보존방정식은 다음과 같다.

질량 :

$$d_{nm} = v_{n,n} = 0 \quad (3)$$

운동량 :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = t_{n,i,n} + \rho f_i \quad (4)$$

각 운동량 :

$$\rho j \frac{d\Omega_i}{dt} = m_{n,i,n} + \epsilon_{ijk} l_{jk} + \rho l_i \quad (5)$$

여기서, f_i 는 힘벡터장의 요소, l_i 는 조합 응력 벡터장의 요소이고, j 는 입자의 관성모멘트이다.

미세 극성유체의 운동방정식을 벡터형태로 표현하면 식 (3)~(5)는 다음과 같다.

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (6)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + k \nabla \times \Omega - (\mu + k) \nabla \times \nabla \times V \quad (7)$$

$$\rho j \frac{d\Omega}{dt} = k \nabla \times V - 2k \Omega - \gamma \nabla \times \nabla \times \Omega + (\alpha + \beta + \gamma) \nabla (\nabla \cdot \Omega) \quad (8)$$

여기서, p 는 정압을 나타낸다.

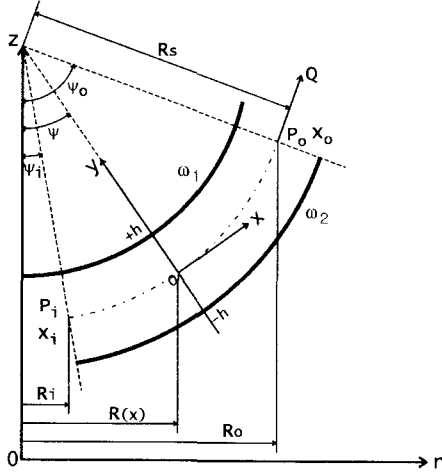


Fig. 2 Curvilinear orthogonal coordinate systems

Fig. 2는 Fig. 1을 x, θ, y 의 직교 곡선 좌표계로 도시한 그림이다. 여기서 $h(x) \ll R(x)$ 이고, 축대칭(axisymmetric)이므로 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 이라 가정하고 크기분석법(order of magnitude)을 이용하여 식을 단순화시키면 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁵⁾

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\theta^2 \frac{R'}{R} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - k \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial y} \quad (10)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + v_x v_\theta \frac{R'}{R} \right) = (\mu + k) \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + k \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} \quad (11)$$

$$\rho j \left(v_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - v_\theta \Omega_\theta \frac{R'}{R} \right) = -k \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial y} + 2\Omega_x \right) + \gamma \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} \quad (12)$$

$$\rho j \left(v_x \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial y} + v_\theta \Omega_x \frac{R'}{R} \right) = k \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega_\theta \right) + \gamma \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial y^2} \quad (13)$$

$$\rho j \left(v_x \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{R'}{R} v_\theta - 2\Omega_y \right) + \gamma \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial y^2} \quad (14)$$

$$+ (\alpha + \beta) \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x \partial y} + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial y^2} \right)$$

위의 지배방정식 (9)~(14)은 속도와 미세회전에 대한 다음과 같은 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} v_x(x, \theta, \pm h) &= 0 \\ v_y(x, \theta, \pm h) &= 0 \\ v_\theta(x, \theta, \pm h) &= w_{1,2} \\ \Omega_i(x, \theta, \pm h) &= -\frac{\zeta}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, ζ 는 미세 회전 경계변수이며, ζ 는 $0 \leq \zeta \leq 1$ 의 범위를 가진다. 특히 $\zeta = 0$ 인 경우 $\Omega = 0$ 가 되고 벽면에 근접한 미세요소(microelements)가 회전하지 않는 짙은 농도의 흐름을 나타낸다.⁽⁶⁾ $\zeta = 0.5$ 인 경우 약한 농도를 나타내며,⁽⁷⁾ $\zeta = 1$ 인 경우에는 물체표면에서 미세회전은 유체가 갖는 와도(vorticity)의 절반이라는 것을 의미하고 난류경계층 유동의 모델로 사용되고 있다.^{(4),(8)}

식 (15)의 마이크로채널 벽면의 새로운 경계조건으로부터 본 연구의 주된 관심사인 θ 방향의 미세회전성분(Ω_θ)과 x 방향의 속도성분(v_x)를 구하면 다음과 같다.

$$\Omega_\theta = -\frac{fh}{\mu(2+\delta)} \left\{ A \frac{\sinh(M\eta)}{\sinh(M)} - \eta \right\} \quad (16)$$

$$v_x = -\frac{f h^2}{\mu (2+\delta)} \left\{ 1-\eta^2 - A \frac{\delta}{1+\delta} \frac{\cosh(M) - \cosh(M\eta)}{M \sinh(M)} \right\} \quad (17)$$

여기서, δ 는 무차원 점성비로서 다음과 같이 와류점성계수(α)와 유체가 갖는 절대점성계수(μ)의 비로 정의된다.

$$\delta = \frac{\alpha}{\mu} \quad (18)$$

또한 A 는 변수 ζ 와 무차원 점성비 δ 를 포함하고 있는 변수이고, η 와 M , 그리고 f 는 각각 다음과 같이 정의된 변수들이다.

$$A = 1 + \frac{(2+\delta)\zeta}{2+\delta(2+\zeta)} \quad (19)$$

$$\eta = \frac{y}{h} \quad (20)$$

$$M = m h \quad (21)$$

$$f = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (22)$$

미세 회전성분(Ω_θ)과 x 방향의 속도성분(v_x)은 다음과 같이 η 의 함수로 다시 표현된다.

$$\Omega_\theta = -\frac{f h}{2\mu} f_1(\eta) \quad (23)$$

$$v_x = -\frac{f h^2}{2\mu} f_2(\eta) \quad (24)$$

여기서, f_1 과 f_2 는 다음과 같다.

$$f_1(\eta) = \frac{2}{2+\delta} \left[A \frac{\sinh(M\eta)}{\sinh M} - \eta \right] \quad (25)$$

$$f_2(\eta) = \frac{2}{2+\delta} \left[\{1-\eta^2 - A \frac{\delta}{1+\delta} \frac{\cosh M - \cosh(M\eta)}{M \sinh M}\} \right] \quad (26)$$

3. 결과 및 고찰

무차원함수인 식 (25)~(26)은 계산의 단순성을 위하여 $M=1.0$ 일 때 다양한 δ 와 ζ 값에 대하여 해석적인 해를 구하였고, 유로의 무차원 변수인 η 의 계산간격 $\Delta\eta$ 은 0.01을 택하였다. 본 연구에서 유도한 식의 검증을 위해 벽면 경계조건이 제로 조건이라는 가정하에서 연구를 수행한 선행연구자⁽⁵⁾의 결과와 비교하였고, 그 결과는 잘 일치하였다. 여기서 제로 조건이라는 것은 본 연구에서 도입한 미세 회전 경계변수 ζ 값이 제로일 때를 의미한다.

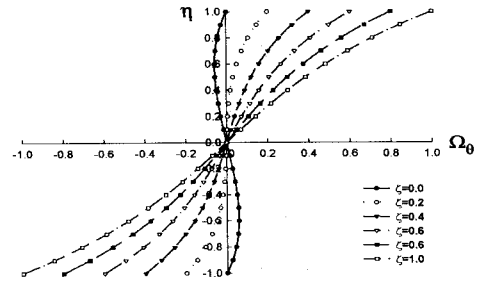


Fig. 3 Distribution of the microrotation component Ω_θ for various ζ with $M=1.0$ and $\delta=0.0$.

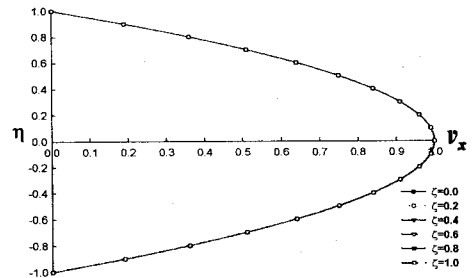


Fig. 4 Distribution of the velocity component v_x for various ζ with $M=1.0$ and $\delta=0.0$.

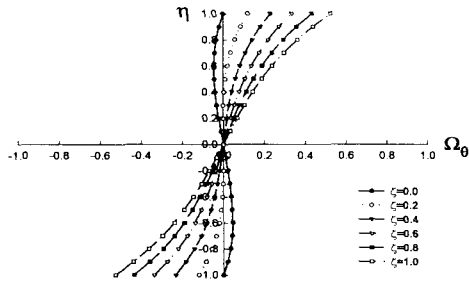


Fig. 5 Distribution of the microrotation component Ω_θ for various ζ with $M=1.0$ and $\delta=0.6$.

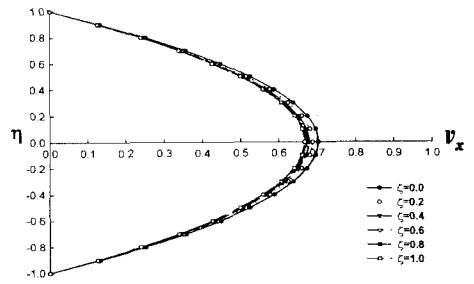


Fig. 6 Distribution of the velocity component v_x for various ζ with $M=1.0$ and $\delta=0.6$.

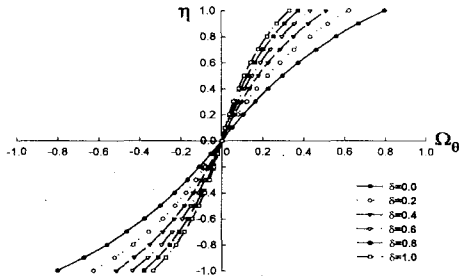


Fig. 7 Distribution of the microrotation component Ω_θ for various δ with $M=1.0$ and $\zeta=0.8$.

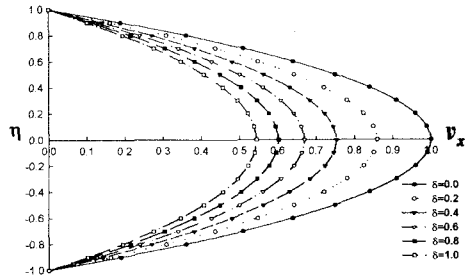


Fig. 8 Distribution of the velocity component v_x for various δ with $M=1.0$ and $\zeta=0.8$.

Figs. 3과 4는 M 값이 1.0이고 δ 값이 0일 때 여러가지 ζ 값에 대한 미세 회전요소 Ω_θ 와 유로의 x 방향 속도성분 v_x 분포를 도시하였다. y 축은 유로 폭을, 그리고 x 축은 Ω_θ 와 v_x 값의 정규화(normalization)분포를 나타내고 있다. δ 값이 0일 때 미세 회전요소(Ω_θ)는 ζ 값의 변화에 따라 변화가 있지만 속도성분(v_x)은 변화가 없음을 알 수 있다. 여기서 δ 값이 0일 때는 식 (18)에서와 같이 와류 점성 계수(χ)가 없는 뉴턴 유체를 나타낸다. 미세 회전요소(Ω_θ)의 변화는 Fig. 3에 도시된 것과 같이 상수 ζ 값이 증가함에 따라 커지고 벽면($\eta=\pm 1$)에서도 증가하는 경향을 보이고 있다. 이는 ζ 의 변화가 유체 입자의 농도 변화를 의미하며 전술한 바와 같이 ζ 값이 0에 가까워지

면 농도 증가를, ζ 값이 1에 가까워지면 농도 감소를 의미하고, 벽면에서의 회전성분이 입자 농도의 증가에 따라 감소함을 알 수 있다.

Figs. 5와 6은 M 값이 1.0, δ 가 0.6일 때의 미세 회전요소 Ω_θ 와 속도성분 v_x 각각의 분포를 나타내고 있고, Figs. 7과 8은 M ($M=1.0$), ζ ($\zeta=0.8$)의 값을 고정하고 δ 값에 변화를 주어 미세 회전요소 Ω_θ 와 속도성분 v_x 의 분포를 도식적으로 표시하였다. 뉴턴 유체인 Figs. 3과 4의 결과와 비교를 하면 δ 값이 제로가 아닌 값($\delta=0.6$)으로 고정하고 변수 ζ 에 변화($0 \leq \zeta \leq 1$)를 주었을 때 (Figs. 5와 6 참조) 미세 극성유체의 속도 크기 분포가 뉴턴 유체에 비해 작아지는 경향을 보여주었다. 또한 ζ 가 증가함에 따라 속도 크기의 분포는 감소하는 경향을 나타내었다. 이 때 미세 회

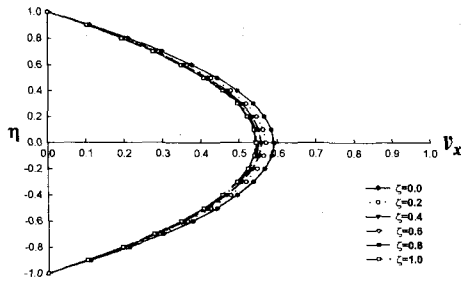


Fig. 9 Distribution of the velocity component v_x for various ζ with $M=1.0$ and $\delta=1.0$.

전요소 분포(Fig. 5 참조)를 살펴보면 뉴톤 유체에 비해 작아졌으며, ζ 가 증가함에 따라 그 크기는 속도 분포의 크기와는 달리 점차 증가하였다.

δ 값의 변화에 의한 영향을 살펴보면, δ 값이 증가함에 따라 미세 회전요소 분포(Fig. 7 참조)는 감소하였고, 속도 분포 크기(Fig. 8 참조)는 미세 회전요소 분포와 유사하게 감소하는 경향을 나타내었다. Fig. 9는 M 값이 1.0, δ 가 1.0일 때의 속도성분 v_x 의 분포를 나타내고 있으며, 특이할 점은 Fig. 6과 비교를 하였을 때, ζ 값의 변화에 따라 Fig. 9의 속도 분포의 변화가 큰 것을 알 수 있고, 이는 채널 내 유체의 δ 값이 커질 수록 ζ 에 의한 영향이 크다는 것을 나타낸다.

4. 결론

미세 극성 유체이론을 이용하여 축대칭으로 이루어져 있는 곡면회전체 슬롯(slot)사이의 비압축성 미세 극성유체의 정상상태, 층류 유동에 대해 고찰하였다. 경계층 방정식을 이용하여 해를 구하였으며, 벽면에서의 미세 회전성분에 대한 경계조건을 속도 구배값에 일정한 비례관계를 가진다는 가정하에 해를 제시하였다.

δ 값 증가의 영향으로 속도성분과 벽면에서 미세 회전성분이 뉴톤 유체에 비해 작아졌으며, δ 값이 커질수록 속도성분과 미세 회전성분은 작아지는 경향을 나타내었다. 또한 ζ 값 증가는 채널 내의 미세 회전성분의 증가를 가져왔으며, δ 값이

0일 경우에 속도성분에는 아무런 영향을 주지 않았으며, δ 값이 0이 아닐 때는 ζ 값이 증가하면 채널 내 속도성분이 점차 감소하는 경향을 나타내었다.

후 기

본 연구는 두뇌한국 21(BK 21)사업 핵심분야인 "고효율 차세대 에너지 기기 설계 사업팀"의 지원 하에 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Needs, S. J., 1940, "Boundary Film Investigations," Trans. ASME., Vol. 62, pp. 331~342.
- (2) Eringen, A. C., 1966, "Theory of Micropolar Fluids," J. Math. Mech., Vol. 16, No.1, pp. 1~18.
- (3) Ariman, T., 1971, "On the Analysis of Blood Flow," J. Biomech., Vol. 4, pp. 185~192.
- (4) Kim, Y.-J., 1999, "상사해법을 이용한 췌기형 물체 주위의 미세 극성유체 유동 특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집 B권, 제23권 제8호, pp. 969~977.
- (5) Walicka, A., 1994, "Micropolar flow in a slot between rotating surfaces of revolution," TU Press, Zielona Góra.
- (6) Jena, S. K. and Mathur, M. N., 1991, "Similarity Solutions for Laminar free convection flow of a thermomicro-polar fluids past a nonisothermal vertical flat plate," Int. J. Engng. Sci., Vol. 19, pp. 1431~1439.
- (7) Ahmadi, G., 1976, "Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate," Int. J. Engng. Sci., Vol. 14, pp. 639~646.
- (8) Peddieson, J., 1972, "An application of the micropolar fluid model to the calculation of turbulent shear flow," Int. J. Engng. Sci., Vol. 10, pp. 23~32.