

점성감쇠력이 회전탄성원판에 미치는 영향

공 대 위* · 주 원 구**

Effect of viscous damping force subjected to a rotating flexible disk

Dae-Wee Kong, Won-Gu Joo

Key Words: Flexible rotating disk(회전탄성원판), Viscous damping force(점성감쇠력), Flutter(동적 불안정), Stability(불안정성), Spline interpolation method(스플라인보간법)

Abstract

Rotating disks are used in various machines such as floppy disks, hard disk, turbines and circular sawblades. The problems of vibrations of rotating disks are important in improving these machines. Many investigators have dealt with these problem. Specially, vibrations of a rotating flexible disk taking into account the effect of air is difficult problem in simulation. The governing equation of a rotating flexible disk coupled to the surrounding fluid is investigated by a simple mathematical model. And several important parameters concerned with the stability of a rotating flexible disk are defined. Coupling strength between air and rotating flexible disk is proportional to square of disk radius directly and square root of the all of bending rigidity, disk density and thickness inversely. Lift-to-damping coefficient has relation to the onset of disk flutter.

기호설명	r	: disk radius [m]	
	w	: transverse displacement of the disk [m]	
r_a	: outer disk radius [m]	α	: coupling coefficient
r_i	: inner disk radius [m]	β	: ratio of outer radius to inner radius
C_D	: viscous damping force coefficient [ρv]	η	: circumferential angle measured from a fixed point in space [rad]
C_L	: lift force coefficient [ρv]	θ	: circumferential angle measured from a fixed point on rotating disk [rad]
C_L/C_D	: lift-to-damping coefficient ratio	ρ	: mass density of the disk material [kg/m^3]
D	: bending rigidity ($= Eh^3/12(1-\nu^2)$) [Pa m^3]	ν	: Poisson ratio
E	: Young's modulus [N/m^2]	ξ	: demensionless radius($= r/r_a$)
h	: disk thickness [m]	σ_r	: radial stress [N/m^2]
k_{mn}	: disk eigenvalue	σ_θ	: circumferential stress [N/m^2]
(m, n)	: transverse vibrational mode of m nodal circles and n nodal diameters	Ω	: angular velocity [rad/s]

* 연세대학교 대학원 기계공학과
 ** 연세대학교 기전공학부

1. 서론

회전하는 탄성원판은 특정한 동특성을 가지고

있다, 이러한 회전탄성 원판을 기반으로 하는 장치들은 회전톱, 컴퓨터 정보저장 기기 등 종류가 다양하다. 특히 팬 로터나 압축기의 동익 로터의 경우에도 이러한 회전탄성 원판의 동특성이 관찰되기도 한다. 특히 컴퓨터 정보저장 기기에서의 플로피나 CD-ROM/DVD는 원판의 탄성특성과 주위 유동장의 영향으로 동적 불안정이 나타난다. 팬 로터 등에서도 선회실속에 의한 영향의 중요성은 매우 크다. 이처럼 회전탄성 원판을 유동장과 결부하여 해석하는 것은 더욱 확장된 기에까지 응용될 수 있다.

공기의 효과를 고려한 탄성회전 원판에 대한 연구는 대개 공기의 감쇠 효과와 압력에 대한 적절한 가정을 통해 지배방정식을 구성하고 불안정성을 검사하는 방법이 주류이다. D'Angelo와 Mote⁽⁹⁾는 특별히 제작된, 임계속도 이상에서 회전탄성 원판이 공기의 영향을 받아 일어나는 진동과 동적 불안정(flutter)에 대해 실험을 하였다. Renshaw등⁽¹⁰⁾은 Mote등⁽⁹⁾의 실험의 연장으로 공력학적으로 유발된 회전 원판의 진동에 대해서 이론적인 전개를 시도하고 실험을 하였다. Huang과 Mote⁽¹¹⁾는 벽면에 회전탄성 원판이 근접해 있을 경우의 불안정성을 연구하였다. Imai 등⁽¹²⁾은 고속 회전하는 하드디스크의 두 원판 사이에 허브에서 공기가 유입되게 하는 방법으로 플러터를 감소시키는 실험을 하였다. 이러한 시스템은 하드디스크의 플러터를 40%에서 60% 정도의 효과로 감소시켰다.

본 연구는 첫째, 회전 탄성 원판의 진동 특성을 잘 나타낼 수 있는 모델에 대한 해석 방법의 성능을 비교하고 둘째, 공기 중에서 회전하는 탄성 원판에 대한 적절한 모델링을 제시한다.

2. 회전탄성원판의 모델링

2.1 점성 감쇠력이 없는 경우

2.1.1 스플라인 보간법

스플라인 보간법은 부분 연속구간에서의 다항식에 의한 보간법이다. 두께 변화가 있는 원판에 대한 응용이 Irie등⁽³⁾에 의해 이루어 졌다. 원판의 반경변위는 3차 스플라인 보간법을 사용하고 이를 통해 원심응력을 구한다. 원판의 면외변위는

5차 스플라인 함수를 이용한다.

Fig. 1은 $J=40$, $\nu=0.3$, $h_0/a=0.02$, $\beta=0.2$, $\Omega=0.1$, $E=2$ GPa, $\rho=7000$ kg/m³의 조건일 때 스플라인 보간법을 통해 얻은 (0,2)와 (1,2)의 모드 형상이다.

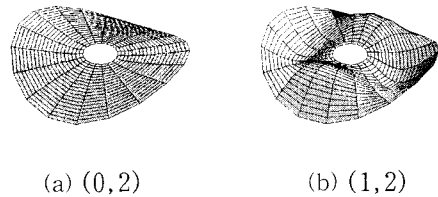


Fig. 1 Mode Shapes of a Rotating Disk Clamped

Fig. 2는 회전 속도에 따라 각 모드에서 주파수가 어떻게 변하는지를 나타낸 워터폴 그래프이다. 좌표계는 공간고정 좌표계로써 특성 방정식 복소수 해의 허수값이 정지 시점부터 두 갈래로 나뉘는 모드 분리를 나타낸다. 이는 얻어진 허수값에 $\pm m\Omega$ 만큼 변위된 값이다. (0,2)모드의 임계속도는 2194 rpm이고 (0,3)모드의 경우는 2050 rpm으로 계산되었다. 계산이 적용된 원판의 물성치는 Mote등⁽¹⁷⁾의 실험에서 인용하여 계산하였다. 주파수 곡선이 직선에서 벗어나 점점 증가하는 이유는 회전하면서 증가하는 원심응력의 영향 때문이다.

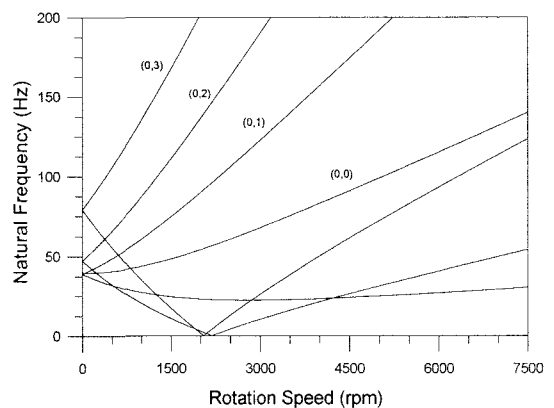


Fig. 2 Frequency-speed diagram; $J=40$, $\nu=0.3$, $D_o=356$ mm, $D_i=106.7$ mm, $t=0.775$ mm, $E=200$ GPa, $\rho=7840$ kg/m³

2.1.2 MCK 행렬법

Watanabe등⁽¹⁶⁾은 베셀함수의 직교성을 이용하여 회전탄성원판에 대한 해석을 하였다. 이 방법은 회전탄성원판의 미분방정식이 질량-감쇠-탄성 행렬로 변환되는 방법으로 베셀함수에 대한 전개만 가능하다면 하나의 모드에 대한 고유주파수를 계산하는데 2×2 의 행렬식만 얻으면 된다. 구하고자 하는 절직경수를 l 로 정하면, MCK 행렬식은 다음과 같다.⁽¹⁶⁾

$$[M]\dot{x} + \hat{\Omega}[G]\dot{x} + [[K_1] - \hat{\Omega}^2[K_2] - [K_a]]x = 0 \quad (1)$$

여기서 x 는 모드좌표로써 $x = \{\Delta \hat{C}_{ml}, \Delta \hat{S}_{ml}\}^T$ 로 표현된다. 여기서 원판의 변위 \hat{w} 와 원판의 반경 방향 고유진동 모드형상함수 R_{mn} 은 각각 식 (2)와 (3)과 같다.

$$\hat{w}(\xi, \eta, T) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Delta \hat{C}_{mn}(T) \cos n\eta + \Delta \hat{S}_{mn}(T) \sin n\eta] R_{mn}(\xi) \quad (2)$$

$$R_{mn}(\xi) = J_n(k_{mn}\xi) + F_{mn}Y_n(k_{mn}\xi) + G_{mn}I_n(k_{mn}\xi) + H_{mn}K_n(k_{mn}\xi) \quad (3)$$

식 (1)에서 나머지 행렬들의 구성은 다음과 같다.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & -2l \\ 2l & 0 \end{bmatrix}, \quad [K_1] = \begin{bmatrix} k_{ml}^4 & 0 \\ 0 & k_{ml}^4 \end{bmatrix},$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} l^2 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_a] = \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_a \end{bmatrix}$$

$$k_a = \frac{\int_{\beta}^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \hat{\sigma}_{\xi} \frac{\partial R_{ml}}{\partial \xi} \right) - \frac{l^2}{\xi} \hat{\sigma}_{\eta} R_{ml} \right\} R_{al} d\xi}{\int_{\beta}^1 \xi R_{ml}^2 d\xi} \quad (4)$$

스플라인 보간법을 통한 원판의 해석은 적절한 정확도의 범위 안에서 비교할 때 MCK 행렬 생성법 보다 상대적으로 빠르다. 스플라인 보간법의 오차는 원판을 얼마나 많이 분할하여 계산하는가에 의존하고 MCK 행렬 생성법의 오차는 베

셀 함수를 포함한 적분식 k_a 의 정확성에 주로 의존한다. 계산의 주된 소요 시간은 k_a 값을 구하는데 있다.

2.1.3 모델해석의 비교

Table 2에 스플라인 보간법과 MCK 행렬 생성법의 계산 예를 FEM과 실험자료와 비교하였다. FEM의 주파수들은 다른 결과들에 비해 미소하나 높다. 스플라인 보간법과 MCK 행렬 생성법은 서로 유의의 차가 없었다. 그러나 실험치 보다는 낮은 모드에서 약간 더 높은 주파수를 가졌다.

Table 1. Compare of the natural frequencies of a rotating disk in several cases

Mode	Frequencies (Hz)			
	Experiment †	FEM	SIM ‡	MCK
(0,1)	37.19 ± 0.29 †	39.37	38.93	38.95
(0,0)	38.40 ± 0.24	39.99	39.58	39.60
(0,2)	47.10 ± 0.49	47.63	47.27	47.31
(0,3)	79.78 ± 0.90	79.45	78.95	78.97
(0,4)	133.08 ± 1.04	132.57	131.30	131.34
(0,5)	202.18 ± 1.02	202.61	199.62	199.67

† Experimental data of low pressure chamber by Mote⁽¹⁷⁾
 $\nu=0.3$, Do=357 mm, Di=106.7 mm, $t=0.775$ mm, E=200 GPa,
 $\rho=7840$ kg/m³.

‡ Average frequency ± standard deviation.

‡ Spline Interpolation Method; J=40.

2.2 점성 감쇠력이 있는 경우

회전탄성 원판에 적용하기 위한 공기와의 연성 조건은 식 (26)의 관계로 나타낼 수 있다. 이는 압력의 단위이다. 하첨자 a 는 가정을 의미한다.

$$p_a = C_D \frac{\partial w}{\partial t} - C_L \Omega \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (5)$$

따라서 식 (5)의 계수 C_D 와 C_L 은 단위가 $[\rho\nu]$ 로 가정된다. 즉 단위 면적당 질량유량이 된다. Yasuda등⁽⁸⁾은 이 계수를 각각 점성 감쇠력 (viscous damping force) 계수와 양력 (lift force) 계

수로 불렀다. $-p_a$ 가 외력항으로써 적용된 원판의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$D\nabla^4 u + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right\} + C_D \frac{\partial u}{\partial t} - C_L \Omega \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (6)$$

경계조건과 무차원화를 적용하고 양변에 적절한 항을 곱하면 다음과 같은 정현화된 무차원 방정식이 만들어진다. 이는 C_D 와 C_L 의 적절한 가정을 통해서 이루어진 것이다.

$$k_{mn}^4 \nabla^4 \hat{w} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial T^2} - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \hat{\sigma}_\xi \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{\sigma}_\eta \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{r_a^2 C_D}{\sqrt{D\rho h}} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial T} - \frac{C_L}{C_D} \hat{\Omega} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (7)$$

식 (28)에서 유도된 무차원 파라미터인 연성계수 α 를 식 (29)처럼 정의한다.

$$\alpha = \frac{r_a^2 C_D}{\sqrt{D\rho h}} \quad (8)$$

C_L/C_D 도 무차원 파라미터로써 양력대감쇠계수비라고 부른다. 식 (7)로부터 MCK 행렬 방정식을 구하여 특정 모드에서의 특성방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\left| s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{mi}^4 - k_a & -\hat{\Omega} \frac{C_L}{C_D} l \\ \hat{\Omega} \frac{C_L}{C_D} l & k_{mi}^4 - k_a \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (9)$$

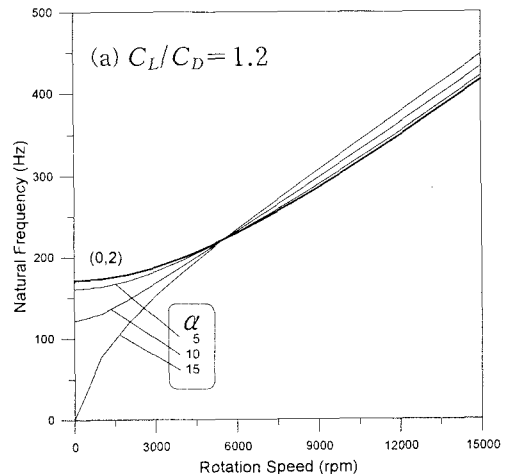
3. 결과 및 고찰

이들 α 와 C_L/C_D 는 모델상수로써 어떤 값을 가지는지는 아직 알 수 없다. 그러나 실험을 통해 구할 수 있다. 실험에 의한 자료는 이승엽등⁽¹⁵⁾의 논문의 자료를 이용하였다. 원판은 CD-ROM으로써 밀폐되지 않은 공간에 스피들 모터에 직접 연결된 장치로 구성되었다. 원판은 외경이 60 mm, 허브외경은 15 mm, 두께는 1.2 mm, 영률은 2.7 GPa, 프와송비는 0.3, 밀도는

1200 kg/m³이다. 실험에서 12500~13000 rpm 사이에 플러터가 (0,2)모드에서 나타난 것으로 보고되었다.

Fig. 3부터 4는 연성계수와 양력대감쇠계수비의 의미를 알아보기 위해 임의적인 파라미터들을 시험한 값이다. 공기에 의한 점성 감쇠력이 고려되지 않은 경우의 후퇴파(굵은 선)와 파라미터들의 변화에 의해 나타난 후퇴파(가는 선)의 교차점에 해당하는 회전수가 동적불안정, 즉 플러터가 일어나는 지점이다.⁽⁸⁾ 그림에서 설명하듯 연성계수 α 는 동적 불안정 시점을 중심으로 고유진동수의 변화를 볼 수 있는데 특히 극단적인 높은 값일 수록 저 회전에서 더 크게 고유진동수가 떨어진다. 양력대감쇠계수비 C_L/C_D 는 동적 불안정 시점과 밀접한 관계가 있으며, 상대적으로 큰 값일 수록 플러터는 더 일찍 발생한다.

Fig. 5는 플러터가 일어난 시점을 12500 rpm으로 가정하여 특성방정식의 복소수해 s 의 실수부 $\text{Re}(s)$ 가 0이 되는 모델상수를 찾아본 결과이다. 여기서 공기가 있는 경우나 없는 경우에 있어서 정지상태의 원판의 고유진동수가 서로 같다고 가정하고 각 계수들을 구하면 (0,2)모드에서 α 와 C_L/C_D 는 각각 7.8과 0.87이다. 이 모드의 임계속도는 7500 rpm으로 실험치인 6900 rpm보다 600 rpm 차이가 났다. 그러나 공기와 연성되지 않은 경우의 계산에 의한 임계속도는 7922 rpm으로, 연성된 경우의 계산 결과가 전반적으로 실험치에 더 근접한 결과를 보여준다.



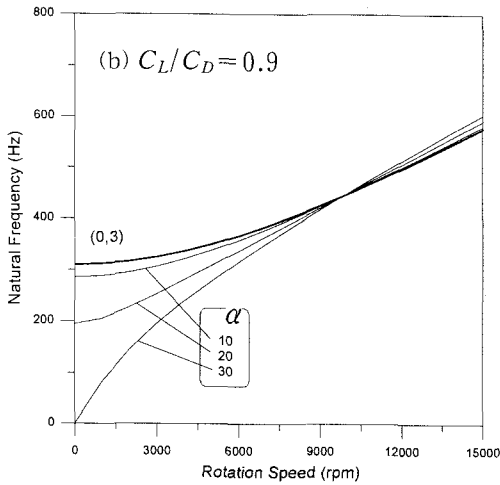


Fig. 3 α effect of a rotating CD-ROM

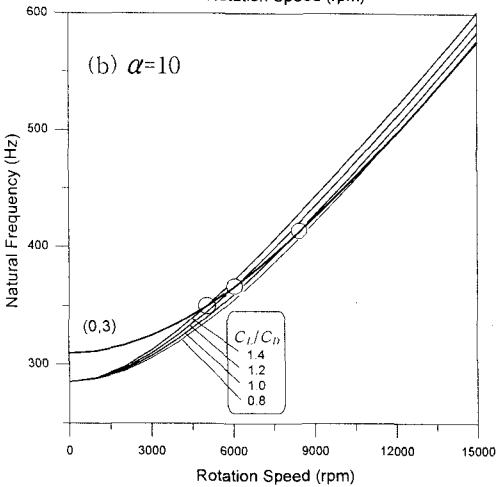
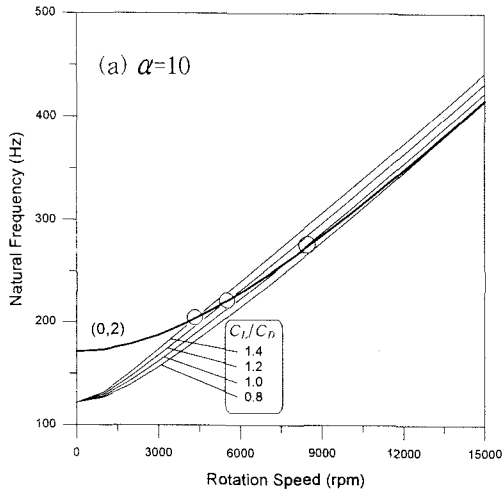


Fig. 4 C_L/C_D effect of a rotating CD-ROM

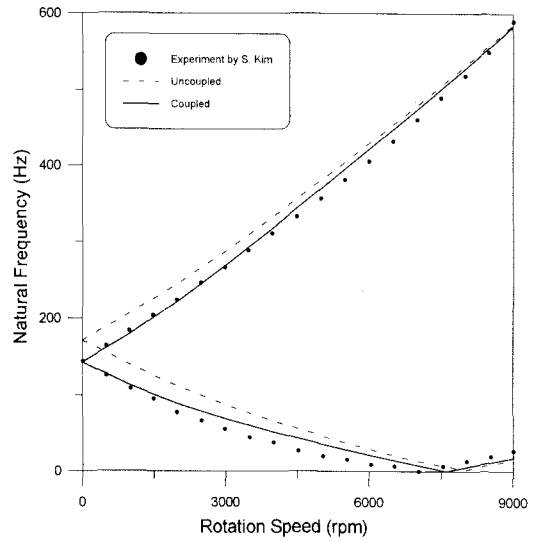


Fig. 5 Natural frequency of a rotating CD-ROM in air; (0,2) mode, $\alpha=7.8$, $C_L/C_D=0.87$; Experimental data is quoted from S. Lee⁽¹⁵⁾.

주파수와 회전속도와의 관계 그래프에서 각 모드별로 후퇴파가 0이 되는 가장 빠른 모드를 찾아 임계속도를 결정한다. 공기의 영향이 없거나 미약한 경우에는 이 임계속도는 바람직하다.

실제 유동에 있어서 원판에 상대운동을 하는 유동은 다분히 3차원적이다. 특히 원판이 실린더형 슈라우드 안에 있거나 벽면에 밀접하게 근접해 있는 경우 원주방향과 반경방향 유동성분 모두의 영향에 대한 점성감쇠력이 고려되어야 한다. 그러나 원주방향 유동성분만에 의한 계의 불안정 해석이 보편적으로 이루어져 왔다.^(8,9,12) 본 연구에서 점성감쇠력은 회전하지 않는 경우이다. 그러나 상대회전하는 점성감쇠력에 대한 효과 또한 적용되어야 한다.

연성강도와 양력대감쇠계수비와 같은 모델 상수들은 플러터 시점, 임계속도 또는 어느 작동영역 안에서의 공진주파수, 이들 중 주파수 일치를 어디로 정함에 따라 따라 약간의 차이를 가진다. 이는 점성감쇠항 만에 의한 모델이 완전한 공력학적 효과를 모사하지 못하기 때문이다.

유동에 의해 원판면에 작용하는 압력분포력을 MCK 행렬 생성법으로 적용하는 문제는 점성감쇠력을 동시에 고려할 수 있는 장점이 있으나 해를 구하는 데 있어서 발전된 기법이 요구된다.

특히 압력분포력이 원판의 진동변위에 대한 함수로 정의된다면 압력과 점성감쇠력 모두에 의한 원판의 불안정성 조사가 가능할 것으로 보인다.

4. 결론

본 연구는 회전 탄성 원판의 진동 특성을 이해하고 유동장과 원판 사이에 어떠한 연성 관계에 있는지 알아보기 위함이다.

회전 탄성 원판의 동특성을 나타내기 위한 지배 방정식의 고유 진동수 계산방법으로, 스플라인 보간법은 임계속도를 추정하는데 유리하고 베셀 함수로 표현되는 MCK 행렬 생성법은 감쇠항 등의 처리에 있어서 편리하다.

공기 중에 회전하는 탄성 원판의 불안정성을 조사하기 위해 적절한 연성 조건을 도입하여 불안정성의 특성을 조사하였다. 무차원 계수인 연성계수와 양력대감쇠계수를 정의할 수 있고 이를 모델 상수로 적용할 수 있다. 연성의 정도는 원판 반경의 제곱에 비례하고, 그리고 굽힘 강성과 원판의 밀도, 원판의 두께 각각의 제곱근에 반비례한다. 양력대감쇠계수는 동적 불안정 시점과 밀접한 관계가 있고, 큰 값일 수록 플러터는 더 일찍 발생한다.

참고문헌

- (1) Eversman, W and Dodson, R. O. Jr., 1969, "Free Vibration of a Centrally Clamped Spinning Circular Disk," *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 10, pp. 2010-2012
- (2) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 485-490
- (3) Irie, T., Yamada, G. and Kanda, R., 1979, "Free Vibration of Rotating Non-uniform Discs: Spline Interpolation Technique Calculations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 66, No. 1, pp. 13-23
- (4) Chonan, S., Mikami, T. and Ishikawa, H., 1985, "The Vibrations and Critical Speeds of Rotating Sawblades," *日本機械學會論文集(C編)*, 52卷, 478号, 1805-1812面
- (5) Chonan, S., 1987, "On the Critical Speed of a Rotating Circular Plate," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 967-968
- (6) Liew, K. M., Han, J. -B. and Xiao, Z. M., 1997, "Vibration Analysis of Circular Mindlin Plates using the Differential Quadrature Method," *Journal of sound and Vibration*, Vol 205, No. 5, pp. 617-630
- (7) McAllister, J. S., 1997, "Characterization of Disk Vibrations on Aluminum and Alternate Substrates," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 1, pp. 968-973
- (8) Yasuda, K., Torii, T. and Shimizu, T., 1992, "Self-Excited Oscillations of a Circular Disk Rotating in Air," *JSME International Journal, Series III*, Vol. 35, No. 3, pp. 347-352
- (9) D'Angelo, C. III and Mote, C. D. Jr., 1993, "Aerodynamically Excited Vibration and Flutter of a Thin Disk Rotating at Supercritical Speed," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 168, No. 1, pp. 15-30
- (10) Renshaw, A. A., D'Angelo, C. III, and Mote, C. D. Jr., 1994, "Aerodynamically Excited Vibration of a Rotating Disk," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 177, No. 5, pp. 577-590
- (11) Huang, F. Y. and Mote, C. D., 1995, "On the Instability Mechanisms of a Disk Rotating Close to a Rigid Surface," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 764-771
- (12) Huang, F. Y. and Mote, C. D. Jr., 1996, "Mathematical Analysis of Stability of a Spinning Disk Under Rotating, Arbitrarily Large Damping Forces," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 657-662
- (13) Imai, S., Okazaki, T. and Mori, K., 1998, "Flutter Reduction by Centrifugal Airflow for High - Rotation -Speed Disks," *Advances in Information Storage System*, Vol. 9, pp. 5-17
- (14) Kim, S., Han, G. and Son, H., 1998, "A Study of Characteristics of Disk Vibration and Rotating Airflow in Magneto Optical Disk Drives," *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, Vol. 44, No. 3, pp. 601-604
- (15) 박관우, 이승엽, 2000, "CD-ROM 드라이브의 회전임계속도 및 공기유동에 의한 불안정성 연구," 한국소음진동공학회 학술대회 논문집, pp. 492-498
- (16) Watanabe, M. and Hara, F., 1997, "Dynamic Instability of a Rotating Flexible Disk Subjected to Swirling Fluid Flow," *日本機械學會論文集(C編)*, 63卷, 615号, 3861-3869面
- (17) D'Angelo, C. III and Mote, C. D. Jr., 1993, "Natural Frequencies of a Thin Disk, Clamped by Thick Collars with Friction at the Contacting Surfaces, Spinning at High Rotating Speed," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 168, No. 1, pp. 1-14