

전자기력을 이용한 유동제어에 관한 수치해석적 연구

김성재* · 이정묵**

Numerical Investigation of Cross-Flow of a Circular Cylinder Under an Electromagnetic Force

Kim, Seong-Jae and Lee, Choung Mook

Key Words : MHD Flows(전자기력 유동), Flow Control(유동제어), Circular Cylinder(원주), Drag Reduction(저항력감소)

Abstract

A computational investigation of the effect of the electromagnetic force(or Lorentz force) on the flow behavior around a circular cylinder, a typical model of bluff bodies, is conducted. Two-dimensional unsteady flow computation for $Re=10^2$ is carried out using a numerical method of finite difference approximation in a curvilinear body-fitted coordinate system by solving the momentum equations including the Lorentz force as a body force. The effect of the spatial variations of the Lorentz forcing region and forcing direction along the cylinder circumference is investigated. The numerical results show that the Lorentz force can effectively suppress the flow separation and oscillation of the lift force of the circular cylinder cross-flow, leading to the reduction of the drag.

1. 서론

MHD(Magneto hydrodynamics)유동은 1832년 Ritchie가 전자기력(Lorentz force)을 이용하여 water-pumping에 성공하고 Faraday가 자장하의 전도성유체의 운동에 의한 유도전류를 발견한 후, MHD 추진, MHD 발전 등으로 많은 연구가 이루어져 왔다. MHD 원리를 유동제어에 이용하고자 하는 연구는 최근 다양한 방법으로 수행되어져 왔다. Henoeh & Meng(1991)과 Nosenchuck and Brown(1993)은 전자기력을 가하여 난류경계층으로의 천이를 억제하고 마찰항력을 감소시키고자 하였다. 특히, 미국 Rhode Island에서 개최된 International

Symposium on Seawater Drag Reduction에서는 전자기력을 이용한 난류유동의 항력감소에 관하여 다양한 연구들이 발표된 바 있다(Meng, 1998). Kim & Lee(2000)는 원주(circular cylinder)의 유동박리가 빈번히 발생하는 구간에 영구자석 및 전극을 원주 길이 방향으로 교차설치하여 전자기력을 가함으로써 유동박리를 억제하고 항력을 감소시킬 수 있음을 실험적으로 확인하였다. Fig. 1은 Kim & Lee(2000)에 의해서 제안된 원주교차유동(cross-flow) 제어를 위한 전자기력 구성을 보여주고 있으며 $70^\circ \sim 130^\circ$ 구간에 원주의 상하대칭으로 전극과 자석들이 설치되어 있다.

본 연구에서는 이를 토대로 원주면을 따라 전자기력의 작용위치의 변화와 작용방향의 변화에 따른 영향을 비교적 계산을 정확히 수행할 수 있는 저 Reynolds 수인 $Re=10^2$ 의 원주교차유동에 대하여 수치해석을 통하여 연구하였다.

* 포항공대 기계공학과 연구원

** 포항공과대학교 기계공학과 교수

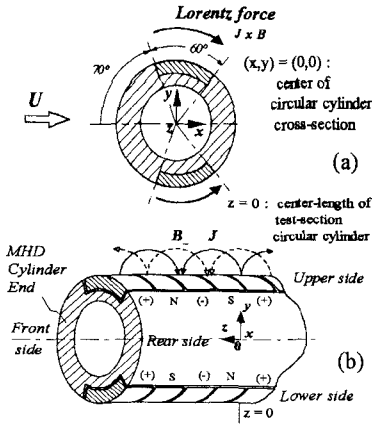


Fig. 1 Circular cylinder for electromagnetic flow control(Kim & Lee, 2000):(a) Cross-sectional view; (b) Installation of electrodes and magnets

2. 지배방정식

전기장과 자기장하에서의 전기전도성 유체의 유동은 운동방정식에 체력으로 포함된 전자기력의 영향을 받게 된다. 전자기력이 작용하는 Navier-Stokes 방정식의 무차원화된 형태는 무차원변수를 $u_i = u_i^*/U$, $t = Ut^*/L$, $J_j = J_j^*/J_0$ 그리고 $B_k = B_k^*/B_0$ 로 할 때 다음과 같이 표현된다. 상첨자 *는 차원변수임을 나타낸다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + N(\varepsilon_{ijk} J_j B_k) \quad (1)$$

식 (1)에서 Reynolds 수는 $Re = UL/\nu$ 로 정의되고 N 은 전자기력상관계수(interaction parameter)로서 $N = J_0 B_0 L / (\rho U^2)$ 로 정의되는 유체의 관성력에 대한 전자기력의 세기를 나타낸다. u_i 는 속도벡터, U 는 특성속도, L 는 특성길이, J_j 는 전류밀도벡터 (A/m^2), J_0 는 특성전류밀도, B_k 는 자속벡터(*tesla*), B_0 는 특성자속밀도이다. 그리고 p 는 유체의 압력, ν 는 동점성계수 그리고 ρ 는 유체의 밀도를 나타낸다. 하첨자 i 는 x_i 의 방향으로의 편미분을 나타내고 ε_{ijk} 는 alternating permutation tensor이다.

3. 수치해석

수치해석은 $Re = 10^2$ 의 원주교차유동에 대하여 수행하였다. 경계면일치좌표계(body fitted coordinate system)로 변환된 지배방정식을 유한차분하고 unsteady SIMPLE-C 알고리즘을 이용하였다. 확산

항은 2 차정확도의 중앙차분으로 대류항은 3 차정확도의 QUICK (quadratic upwind-interpolated convective kinetics) scheme을 사용하였다.

Fig. 2는 계산에 사용된 좌표계와 계산영역을 보여준다. 좌표원점($x=0, y=0$)은 원주단면 중앙에 위치하며 주유동은 x -방향으로 흐르고 y -축은 유동에 수직인 방향이다. 상류경계는 $x/D = -10$ 에 위치하며 하류경계는 $x/D = 40$ 에 위치한다. 주유동에 수직인 방향의 계산영역의 크기는 $y/D = 5$ 로 하였다.

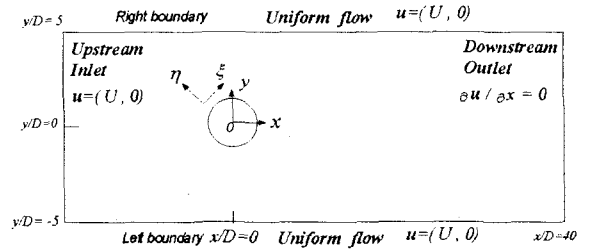


Fig. 2 Domain for flow computation and its coordinate system

경계조건으로 Fig. 2에서 상류, 원주의 상부 그리고 하부 경계에는 균일유동조건, 즉 $u=(U, 0)$ 을 부가하였으며 하류의 출구조건은 $\partial u/\partial x = 0$ 으로 부가하였는데, 이 조건은 Karniadakis(1989)의 선행 연구에서 원주 뒤의 와류동 특성등 전반적으로 양호한 결과를 주는 것으로 확인되었다. 원주는 초기정지 상태에서 균일한 속도 U 의 흐름이 x 축의 정방향으로 흐르는 것으로 가정하여 계산하였다. 시간이 지남에 따라 원주후부에서 발생한 박리기포(separation bubble)가 크게 성장한 후 일정시점 이후에는 외부의 강제교란 없이 후류의 진동이 유발되어 대칭성이 깨지도록 되어 있다. 격자는 H 타입을 사용하였으며 격자수는 경계면일치좌표계의 ξ 와 η 방향으로 각각 190개와 94개를 분포시켰으며 반원주(half-cylinder)의 ξ -방향으로의 노드수는 67개를 분포시켰다.

$Re = 10^2$ 의 유동은 원주 후류에서 규칙적인 Karman vortex가 생성되고 Strouhal 수 $S_n (=f_n D/U)$ 은 $0.16 \sim 0.17$ 의 값을 갖는다(Norberg, 1994). 여기서 f_n 는 와방출주파수이고 D 는 원주의 직경이다. Table 1과 같이 기존의 관련 연구들의 항력계수 C_D 및 Strouhal 수는 각각 $1.2 \sim 1.5$ 그리고 $0.16 \sim 0.18$ 범위의 값을 보이고 있다. 표준 t^* 는 무차원시간으로서 $t^* = Ut/D$ 이다. 본 계산에서 선택한 y 방향의 계산영역의 크기 $y/D = 5$ 의 경우 blockage ratio가 10%이고 이에 의한 영향을 고려해야 한다.

따라서 질량유속(mass flux)보존 원리에 근거하여 항력 및 양력계수, Strouhal 수 등을 수정하였으며 표에 기재된 본 계산결과와 수치들은 blockage effect 를 고려한 수치이다.

Table. 1 Comparison with the previous computations

Case	Time-step (non-dim.)	Onset of Oscillation (t^*)	Strouhal number	C_L amplitude	Averaged C_D
Present Computation	0.02	27.8 (approx.)	0.161	0.26	1.165
Karniadakis (1989)	0.018	72	0.179		
Braza(1990)	0.02	60	0.165	0.37	1.253
Engelman (1990)	0.026-0.033		0.161-0.172	0.35	1.4 - 1.42
Roshko's (1954)			0.167		
Williamson's (1988)			0.164		

Fig. 3(a)는 양력계수의 시간에 따른 변화를 나타낸 것이다. 일정한 시간이 경과한 후, 양력계수가 진동하고 이후 주기적인 진동을 되풀이하는 현상을 잘 예측하고 있는 것으로 사료된다. 이 그림에서 주기적인 양력의 진동폭은 약 0.26 으로 예측되었으며 다른 연구의 경우 0.35-0.37 의 진동폭이 보고된 바 있다(Persillon *et al.*,1998; Engelman, 1990). Fig. 3(b)는 항력계수의 시간에 따른 변화를 보여주고 있으며 평균항력계수와 Strouhal 수는 각각 1.17 과 0.16 의 값을 나타내었다. 약 $t^*=44.4$ 때부터 후류가 진동하기 시작하였으며 이는 Karniadakis (1989)의 $t^*=72$ 에서 진동을 시작하는 것보다 다소 조기에 진동을 시작함을 볼 수 있다.

본 연구에서는 전자기력이 없는 경우에 한하여 $y/D=10$ 으로 계산영역을 확장하여 계산영역의 크기에 따른 영향을 검토해 보았다. 평균항력계수의 값이 1.206 으로서 $y/D=5$ 인 경우보다 약 0.04 가 작은 값이 나왔다. Strouhal 수의 경우는 0.159 로서 $y/D=5$ 인 경우와 유사한 값을 나타내었다. 따라서 본 계산코드의 경우 blockage effect 가 나타나지 않도록 하기 위해서는 계산영역의 크기를 $y/D>10$ 으로 선택하여야 하나 본 계산에서는 격자의 분포 및 계산시간 등을 고려하여 $y/D=5$ 의 경우로 전자기력하에서의 계산을 수행하였다.

Table 1 에 비교한 바와 같이 본 계산 결과는 비록 유동진동 시점이 다소 이르고, 항력 및 양력계수의 값이 다른 문헌들의 결과에 비해 다소 작게 나타났으나 $Re=10^2$ 의 유동에 관한 예측도구로서 유용하다고 판단된다. Norberg (1994)와 Williamson(1988)의 실험에 따르면 $Re=10^2$ 에서의 Strouhal 수는 약 0.164 의 값을 갖는 것으로 확인

되었다. Norberg(1994)는 0.25mm 의 직경을 갖는 강선을 1912 의 종횡비(aspect ratio)로 하여 1.25m 높이와 1.8m 폭의 시험부 단면을 갖는 풍동에서 실험을 수행한 것이고 Tritton(1959)은 실험에서 1875 의 종횡비를 갖는 원주를 사용하여 $Re=97.3$ 에서의 항력계수가 1.26 의 값을 갖음을 보였다.

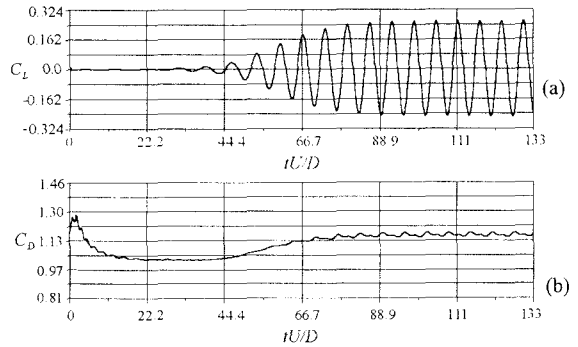


Fig. 3 Computed histories of the lift(a) and drag(b) coefficients

전자기력의 작용영역은 세 경우로 구분하였다. 즉, 원주방향을 따라서 유동박리발생 이전 영역, 유동박리점을 포함하는 영역, 그리고 유동박리 발생 이후의 영역으로 나누었으며 전방 정체점 (fore stagnation point)으로부터 원주방향으로 각각 $\theta=20^\circ\sim 80^\circ$, $70^\circ\sim 130^\circ$ 그리고 $120^\circ\sim 180^\circ$ 의 위치에 해당한다.

전자기력의 작용방향은 원주면에 접하는 방향으로 유동방향과 일치하는 방향의 전자기력 (Positive Lorentz force(LF)), 유동방향과 반대방향으로 작용하는 전자기력(Negative LF), 원주면에 수직으로 원주면을 향하는 전자기력(Inward-normal LF), 그리고 원주 밖으로의 방향의 전자기력(Outward-normal LF)으로 구성하였다. 각 전자기력의 작용모드 15 개 경우에 대한 그림을 Fig. 4 에 나타내었다. 전자기력의 세기는 반경방향으로 지수감쇄하는 형태, 즉 $C_i \exp(-C_2 r)$ 로서 가하였으며 C_1 은 전자기력의 세기에 비례하는 상수이고 원주면($r=0$)에서 N 의 값을 갖는다. C_2 는 전극 및 자석의 폭과 관련된 상수이다. 본 계산에서는 전자기력상관계수 N 의 값은 20 으로 고정하였다.

4. 결과 및 토의

Table 2 에는 본 계산을 통해 얻은 다양한 전자기력 작용하의 항력계수(C_D)와 진동하는 양력의

진폭(C_L amp.), 그리고 Strouhal 수(St)를 나타내었다. Table 2 에서 C_{Dp} 는 형상저항에 의한 항력계수를 그리고 C_{Df} 는 마찰저항에 해당하는 항력계수를 나타낸다. 이하 Positive LF, Outward-normal LF, Inward-normal LF, Negative LF를 각각 P, O, I, N 으로 표기하고 작용영역에 따라 $\theta=20^\circ\sim 80^\circ$, $70^\circ\sim 130^\circ$, $120^\circ\sim 180^\circ$ 에 대하여 각각 1, 2, 3 의 번호를 붙여 표기하도록 하겠다. 즉, Positive LF 를 $\theta=20^\circ\sim 80^\circ$ 에 가한 경우 Case-P1 으로 표기한다.

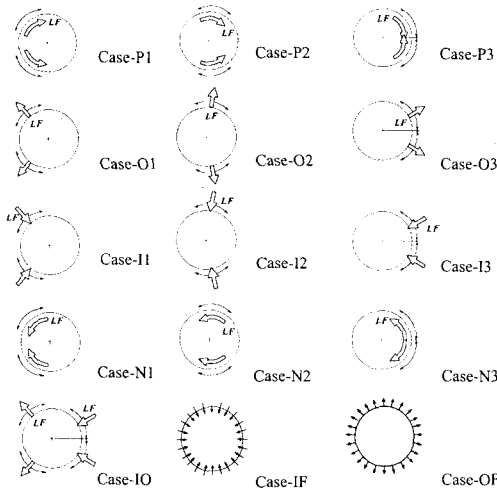


Fig. 4 Types of the Lorentz force in the computation

본 $Re=10^2$ 과 $N=20$ 의 계산에서 항력감소에 가장 효과적인 전자기력의 작용형태는 Case-IO, Case-I3 그리고 Case-O1 의 순으로 나타났다. 그러나 Case-IO 의 경우는 소비되는 동력이 다른 두 경우보다 2 배를 요하는 것이기 때문에 추진효율 면에서는 두 경우에 비해 보다 낫다고는 할 수 없다. Case-I3 및 Case-O1 의 두 전자기력 모드는 양력의 진동폭을 다소 증가시키는 결과를 가져왔다. Fig. 5 과 Fig. 6 에는 각각 Case-I3 와 Case-O1 의 경우의 압력분포와 유동형태의 시간의 따른 변화를 보여주었고 있다. 그림에서 $t^*=0$ 은 전자기력이 작용하지 않는 경우를 의미한다. Strouhal 수를 0.16 으로 할 때 흐름의 한 주기는 약 $t^*=6.25$ 가 되나 여기서 반주기정도인 $t^*=2.8$ 까지만 계산한 결과를 보여주었다. 두 경우가 압력분포에서는 큰 차이를 보이고 있으나 유선형태의 변화에서는 매우 유사한 경향을 보이는 것이 흥미롭다. 두 경우 모두 항력감소 효과를 보인것은 Case-I3 LF 가 원주표면 후부의 압력을 증가시키고, Case-O1 LF 가 원주표면 전부의 압력을 감소시킴으로써 원주 전부와 후부간의 압력차를 감소시키는 것에 기인하는 것

으로 판단된다. Fig. 5 의 Case-I3 의 경우 원주 후부의 표면압력의 증가로 원주 후부로 접근하는 유선이 바깥영역으로 배제되어 감을 볼 수 있다. Fig. 6 의 Case-O1 의 경우 방출와류의 크기가 Case-I3 의 경우보다 작게 형성된다는 점이 다른 유선의 시간에 따른 변화양상이 매우 흡사함을 볼 수 있다.

Case-P2, Case-P3 의 경우는 마찰항력이 큰 비중을 차지하여 전체항력의 감소에는 거의 영향이 없었으나 양력의 진동폭은 크게 감소하였다. Re 수가 증가하는 경우 형상저항에 비하여 마찰저항의 크기가 작아지고, Positive LF 에 의한 원주 상에서의 유속증가에 따른 마찰항력도 전자기력에 비해 미소한 값을 갖게될 것으로 생각된다. 결과적으로 Re 수가 증가함에 따라 형상저항의 감소와 후류의 안정화를 위해서 Positive LF 가 더욱 효과를 가져올 것으로 기대된다.

Fig. 7 에 Case-P2 의 경우의 시간에 따른 원주 주위의 압력분포와 유선의 변화과정을 나타내었다. 원주 상부와 하부에서 유선은 원주면에 달라붙고 유동박리점이 원주 후부로 밀리는 것을 볼 수 있다. 이에 따라 전자기력이 작용하지 않았을 때 원주 후부에서 교대로 방출되던 큰 와류가 원주로부터 떨어져 나감과 동시에 원주면에서는 더 이상 유동박리가 일어나지 않는 상황이 되고 있다. 시간이 지남에 따라 전자기장에 의한 유동장의 변화가 정상상태가 되고 원주 상부와 하부의 압력분포는 거의 대칭적으로 분포됨을 볼 수 있으며 이때 유선의 형태도 상하 대칭적으로 안정적인 유동 패턴을 보여주게 됨을 관찰할 수 있다. 원주 후부의 재순환영역은 매우 작게 축소됨을 볼 수 있다.

Table. 2 Computed time-averaged drag and lift coefficients under the various Lorentz forces at $Re=10^2$

LF mode	LF region	Case	C_{Dp}	C_{Df}	C_D	C_L Amp.	St
No LF	-		0.86	0.31	1.16	0.26	0.16
Positive LF	20-80	P1	0.58	0.92	1.50	0.13	0.23
	70-130	P2	0.15	1.06	1.21	0	0
	120-180	P3	0.36	0.70	1.05	0	0
Outward LF	20-80	O1	0.31	0.25	0.56	0.4	0.14
	70-130	O2	1.29	0.36	1.64	0.60	0.16
	120-180	O3	1.67	0.40	2.07	0.44	0.16
Inward LF	20-80	I1	1.45	0.37	1.82	0.18	0.17
	70-130	I2	0.51	0.27	0.78	0.05	0.15
	120-180	I3	0.11	0.24	0.34	0.63	0.15
Negative LF	20-80	N1	0.95	-0.42	0.53	0.63	0.14
	70-130	N2	3.12	-0.27	2.86	2.36	0.13
	120-180	N3	2.39	0.12	2.52	2.27	0.14
Inward(120-180) & Outward(20-80)		IO	0.02	0.23	0.25	0.58	0.15
Inward-normal (0-360)		IF	0.79	0.32	1.11	0.27	0.16
Outward-normal (0-360)		OF	0.92	0.32	1.24	0.25	0.16

Fig. 8 에는 Case-N1 의 경우의 압력분포와 유선 변화를 나타내었다. Negative LF 의 경우 Kim & Lee(2000)의 논문에서 유동을 크게 교란시키고 항력을 증가시키는 것으로 보고된 바 있다. 본 $Re=10^2$ 의 계산의 경우도 Case-N2, Case-N3 의 경우는 Table 2 에 기재된 바와 같이 유동에 의한 원주 표면의 마찰력이 항력을 감소시킴에도 불구하고 형상저항의 증가로 인해 전체항력을 증가시키는 결과를 보여줌으로써 이를 뒷받침하고 있다. 단, Fig. 8 의 Case-N1 의 경우 원주 전부의 상하에 큰 와류쌍이 생성되며 표면마찰력이 항력을 크게 감소시켜 전체항력이 감소하는 효과를 나타내었다.

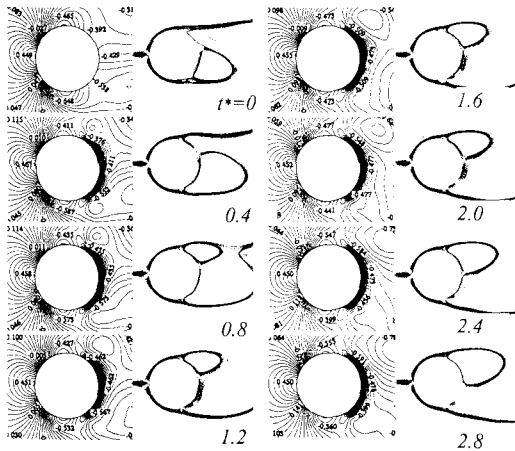


Fig. 5 Computed instantaneous pressure contours and corresponding streamline patterns at $N=20$ and $Re=102$ for the case of Inward-normal LF at $\theta=120^\circ\sim 180^\circ$

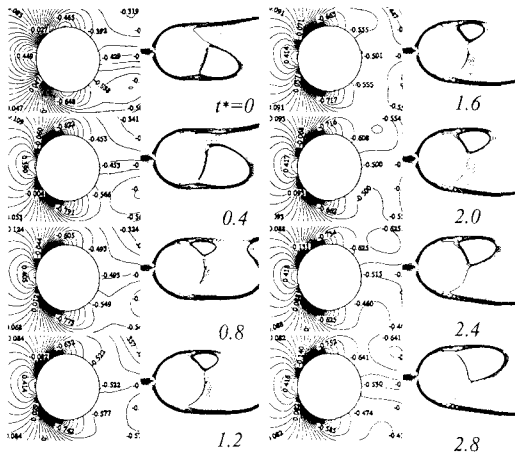


Fig. 6 Computed instantaneous pressure contours and corresponding streamline patterns at $N=20$ and $Re=102$ for the case of Outward-normal LF at $\theta=20^\circ\sim 80^\circ$

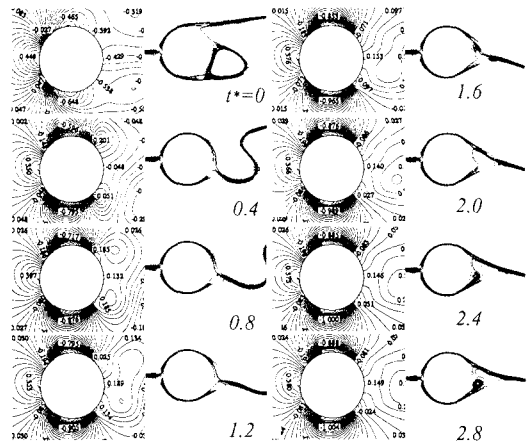


Fig. 7 Computed instantaneous pressure contours and corresponding streamline patterns at $N=20$ and $Re=102$ for the case of Positive LF at $\theta=70^\circ\sim 130^\circ$

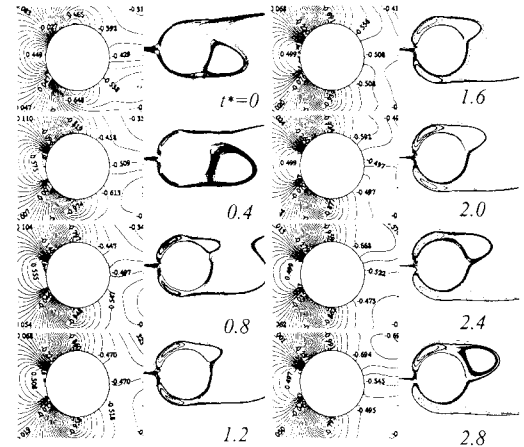


Fig. 8 Computed instantaneous pressure contours and corresponding streamline patterns at $N=20$ and $Re=102$ for the case of Negative LF at $\theta=20^\circ\sim 80^\circ$

Fig. 9 에는 15 가지 경우의 각 전자기력하에서의 순간 유선의 형태를 비교하였다. 선정된 t^* 는 Case-P3 의 흐름이 원주에 부착되는 순간을 기준으로 한 것이다. Case-P1 의 경우는 후류 쪽의 감소와 항력감소에는 가시적 영향을 보이지 않는 것으로 나타났다. 그러나 Case-P3 의 경우는 유동박리가 더 이상 발생하지 않고 유선은 원주 전체표면에 완전히 붙어 흐름을 볼 수 있으며 높은 Re 수의 유동에서도 전자기력상관계수 N 의 값이 일정하다면 Case-P3 LF 을 가하는 것이 항력감소와 후류의 진동을 억제하는 데 효과가 있을 것으로 기대된다. Cases-O1, O2, O3 의 경우, 유선의 형태가 다소 변화하고 있으나 후류의 진동에는 가시

적 효과를 보이지 않고 있다. 다만, Case-O3 LF에 의해 후류의 진동폭이 다소 감소함을 볼 수 있다. Inward-normal LF의 경우도 Case-I2와 같이 비록 유선이 원주의 후부로 재부착됨에도 불구하고 후류진동의 폭은 약간 감소하나 진동의 억제효과가 잘 나타나지 않음을 알 수 있다.

Negative LF를 가한 경우는 전체적으로 유동이 교란되고 있음을 볼 수 있다. 원주 표면 전체에 각각 Inward-normal LF(Case-IF) 그리고 Outward-normal LF를 가하는 경우(Case-OF)는 유동 양상에는 그다지 영향을 주지 않는 것으로 확인되었다.

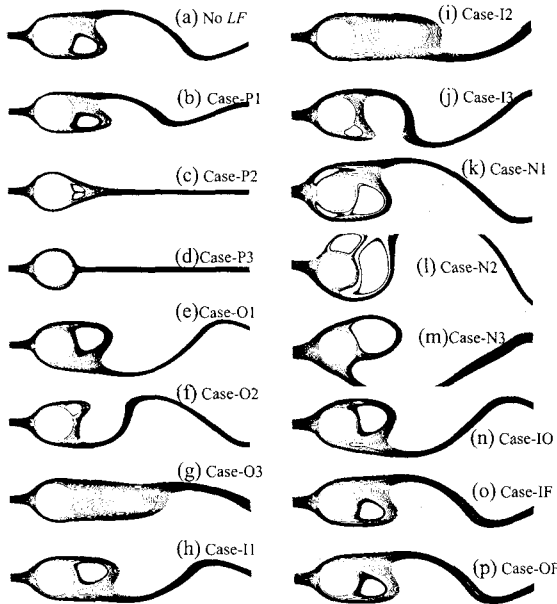


Fig. 9 Compute instantaneous streamlines at $N=20$ and $Re=10^2$

5. 결론

본 $Re=10^2$ 의 원주교차 유동에 대한 수치해석적 연구를 통하여 전자기력이 뒫막한 물체(bluff body) 주위의 유동을 제어하는데 효과적임을 예측하였다. Positive LF는 유동박리 억제, 항력감소 그리고 원주의 주류(mainstream)에 직각방향의 진동력의 감소를 공통적으로 만족시킴으로써 전반적으로 긍정적인 효과를 가져올 것으로 판단된다. 물론 본 계산결과가 높은 Re 수의 유동에서도 유사한 전자기력제어효과를 보일 것으로 단순히 확장될 수 없다는 점은 지적해야 한다. 그러나 본문에서 언급한 바와 같이 Re 수가 증가함에 따라 점성의 영향은 크게 줄어들기 때문에 결국 동일한

N 에 대해 항력감소나 후류의 진동 억제등에 대한 전자기력의 영향은 높은 Re 수에서도 유사하게 나타날 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 포항공과대학교 첨단유체공학연구센터의 연구지원으로 이루어졌으며 저자는 이에 감사を表한다.

참고문헌

- (1) Engelman, M. S. and Jamnia, M.-A., 1990, "Transient Flow Past a Circular Cylinder: A Benchmark Solution." *Int'l J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, pp. 985-1000.
- (2) Hayase, T., Humphrey, J. A. C. and Greif, R., 1992, "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-volume Iterative Calculation Procedures." *J. Comput. Phys.*, Vol. 98, pp. 108-118.
- (3) Henoch, C. W. and Meng, J. C. S., 1991, "Magnetohydrodynamic turbulent boundary layer control using external direct current crossed surface poles." Annual Report IR/IED, *Naval Underwater System Center*, TD 800.
- (4) Karniadakis, G. E. and Triantafyllou, G. S., 1989, "Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes." *J. Fluid Mech.*, Vol. 199, pp. 441-469.
- (5) Kim, S. J. and Lee, Choung M., 2000, "Investigation of the flow around a circular cylinder under the influence of an electromagnetic field." *Experiments in Fluids*, Vol. 28, pp. 252-260.
- (6) Meng, J. C. S., 1998, "Engineering insight of near-wall microturbulence for drag reduction and derivation of a design map for seawater electromagnetic turbulence control." *Proc. of the International Symposium on Seawater Drag Reduction*, Newport, Rhode Island, USA, pp. 359-367.
- (7) Norberg, C., 1994, "An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio." *J. Fluid Mech.*, Vol. 258, pp. 287-316.
- (8) Nosenchuck, D. M. & D. Brown, 1993, "Discrete Spatial Control of Wall Shear Stress in a Turbulent Boundary Layer." *Proc. Near Wall Turbulent Flows*, Elsevier, pp. 689-698.
- (9) Persillon, H. and Braza, M., 1998, "Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation." *J. Fluid Mech.*, Vol. 365, pp. 23-88.
- (10) Tritton, D. J., 1959, "Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers." *J. Fluid Mech.*, Vol. 6., part 4, pp. 547-567.
- (11) Williamson, C. H. K., 1988, "Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder." *Phys. Fluids*, Vol. 31, pp. 2742-2744.