

Level Set 방법과 결합된 VOF 기반의 경계면 추적법

서영호* · 손기현**

An Interface Tracking Scheme based on VOF Coupled with Level Set Method

Youngho Suh, Gihun Son

Key Words: VOF Method(VOF 방법), Level Set Method(Level Set 방법), Curvature(곡률), Interface tracking(경계면 추적)

Abstract

We present a new interface tracking method for computing two-phase flow. This method is based on VOF method coupled with Level set method. The method is verified to calculate an interfacial curvature accurately as well as to achieve volume conservation during the whole computation period. We apply the present method to calculate a falling drop. The calculated shape and terminal velocity of the falling drop showed good agreement with the data reported in the literature. Also, the present method was proven to be applicable to drop-wall collision phenomenon.

기호설명

A : CIP 방법의 사용 계수
 g : 중력 가속도
 H : 검사체적내의 액체의 체적비
 n : 경계면에 수직한 단위 벡터
 p : 압력
 R : 액적의 반경
 Re : Reynolds 수, $\rho_g g^{1/2} R^{3/2} / \mu_g$
 s : 검사체적의 모서리에서 상경계면까지의 거리
 t : 시간
 U : 액적의 하강속도
 u : 속도 벡터, (u, v)

u_r : 계산영역의 상대적인 속도 벡터

We : Weber 수, $\rho_g g R^2 / \sigma$

ζ : 검사체적내의 밀도비

x : 상경계면의 곡률

λ : 검사체적내의 점성계수비

μ : 점성계수

ρ : 밀도

σ : 표면장력

ϕ : Level set 함수

상첨자

n : $n\delta t$

$*$: n 과 $n+1$ 의 중간단계

하첨자

g : 기상

l : 액상

x, y : x, y 방향 성분

* 서강대학교 대학원

** 서강대학교 기계공학과

1. 서론

이상 유동의 수치해석 방법중에서 가장 널리 사용되는 VOF (Volume-of-Fluid) 방법은 각 상과 상경계면을 체적비 함수(H)를 사용하여 나타내는 방법으로, 체적비 함수(H)는 기상에서는 0, 액상에서는 1 그리고 상경계면에서는 0과 1 사이의 값을 갖도록 정의된다. VOF 방법은 각상에서의 체적비를 종속변수로 사용함으로 부피 보존이 잘되며, 복잡한 형상에서의 유동을 간단하고 효율적으로 해석할 수 있는 장점을 가지고 있다.⁽¹⁾ 그러나 VOF 방법은 고정 격자계 위에서 정확한 곡률을 구하기가 힘들고 상경계면의 위치를 결정하는 데 어려움이 있어 이에 대한 많은 연구들이 수행되어 왔다.^(2,4)

이와달리, Level Set 방법은 상경계면으로부터의 거리로 정의된 함수(ϕ)를 사용함으로 계단 함수인 VOF 방법의 체적비 함수(H)보다 곡률을 정확하게 구할 수가 있다.⁽⁵⁾ 그러나 Level Set 방법은 각상의 부피를 보존하기 어려운 단점이 있다. 최근에, VOF 와 Level Set 방법의 단점을 보완하기 위해 두 방법을 결합한 알고리즘 (CLSVOF)을 개발하려는 시도가 있었다.⁽⁶⁾

본 연구에서는 VOF 방법과 Level Set 방법을 효과적으로 결합하는 새로운 알고리즘을 개발하고, 이 방법을 기체 중에 자유 낙하하는 액적 문제에 적용하였다. 또한, 액적 자유강하 속도의 정확한 계산을 위하여 CLSVOF 방법에 CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-particle) 방법을 추가하였다.

2. 수치해석

2.1 지배방정식

본 연구에서는 정지하고 있는 기체에서 하강하는 액적의 거동의 해석을 축대칭, 비압축성, 단열 조건이라는 가정 하에서 수행하였다. 기체와 액적의 경계면은, 기상에서 음의 값, 액상에서 양의 값을 가지는 거리함수 ($|\nabla\phi|=1$)로 정의된 Level Set 함수와 VOF 방법의 체적비 함수(H)로 계산하였다. 기체-액체 이상유동의 질량보존, 운동량 보존 그리고 Level Set 함수(ϕ)와 VOF 방법의

체적비 함수(H)를 지배하는 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \sigma \kappa \nabla H + \nabla \cdot \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla H = 0 \quad (4)$$

상경계면에서의 곡률(κ)과 불성치는 다음과 같이 계산한다.

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (5)$$

$$\rho = \rho_g(1-H) + \rho_l H \quad (6)$$

$$\mu = \mu_g(1-H) + \mu_l H \quad (7)$$

식 (5)에서는 Level Set 함수를 이용하여 상경계면의 곡률을 계산함으로써 VOF 방법의 수치적 확산문제를 보완하였다.

2.2 수치해석방법

질량 및 운동량 보존식을 시간에 대하여 차분화하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (8)$$

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) = -\nabla p^{n+1} + \rho \mathbf{g} - \sigma \kappa \nabla H + \nabla \cdot \mu [\nabla \mathbf{u}^{n+1} + (\nabla \mathbf{u}^n)^T] \quad (9)$$

식 (9)에서 대류항은 explicit 방법을, 확산항은 implicit한 방법을 이용하였다. 위의 식 (8)과 (9)는 projection법을 사용하여 풀 수 있다. 먼저 운동량 보존식 (9)을 이전 시간의 압력을 이용하여 풀고, 얻어진 속도 분포를 연속방정식 (8)을 만족하도록 보정해준다. 이 과정을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) = 0 \quad (10)$$

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*}{\delta t} \right) = -\nabla p^n + \rho \mathbf{g} \quad (11)$$

$$-\alpha x \nabla H + \nabla \cdot \mu [\nabla \mathbf{u}^{**} + (\nabla \mathbf{u}^n)^T]$$

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{**}}{\delta t} = -\nabla (p^{n+1} - p^n) \quad (12)$$

식 (12)를 시간에 대하여 전개한 후 (8)식에 대입하면 압력에 대한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} = \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p^n + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{**}}{\delta t} \quad (13)$$

식 (10)을 공간에 대해 차분화할 때 CIP(Cubic-Interpolated Pseudo-particle)법⁽⁷⁾을 사용하였다. CIP법의 기본 개념은 쌍곡선형 미분방정식의 특성과 각 노드에서 함수와 공간에 대한 미분함수를 이용하는 것이다. 식 (10)의 해는 2차원 공간에서 다음과 같은 3차식으로 표현할 수 있다.

$$u^*(\mathbf{x}) = u^n(\mathbf{x}) + A_4 \xi \eta \quad (14)$$

$$+ [(A_1 \xi + A_2 \eta + A_3) \xi + u_x^n(\mathbf{x})] \xi$$

$$+ [(A_5 \xi + A_6 \eta + A_7) \eta + u_y^n(\mathbf{x})] \eta$$

여기서, $\xi = -u \delta t$, $\eta = -v \delta t$

식 (14)에서 계수 A 의 값은 상류(upstream) 노드의 u^n , u_x^n , u_y^n 를 이용하여 결정할 수 있다. CIP 알고리즘에서는 함수의 미분값도 메시간 계산해야 하며, 그 계산 과정은 식 (10)으로 표현되는 이류(advection) 단계와 식 (11)의 비이류 단계로 구분된다. 이류 단계에서 u_x^* , u_y^* 는 식 (14)을 ξ , η 에 대해 미분하여 구해지며, 비이류단계에서는 chain rule을 사용하여 u_x^{n+1} , u_y^{n+1} 를 구한다.

$$u_{x(i,j)}^{n+1} = u_{x(i,j)}^* + [u_{(i+1,j)}^{n+1} - u_{(i-1,j)}^{n+1}]/2\Delta x - [u_{(i+1,j)}^* - u_{(i-1,j)}^*]/2\Delta x \quad (15)$$

$$u_{y(i,j)}^{n+1} = u_{y(i,j)}^* + [u_{(i,j+1)}^{n+1} - u_{(i,j-1)}^{n+1}]/2\Delta y - [u_{(i,j+1)}^* - u_{(i,j-1)}^*]/2\Delta y \quad (16)$$

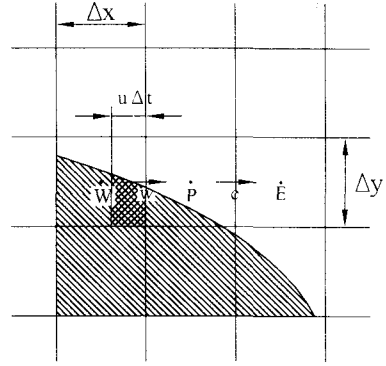


Fig. 1 Volume of liquid advected in x-direction

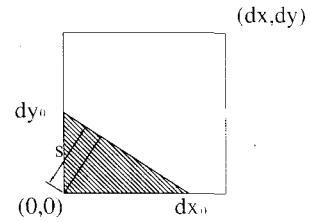


Fig. 2 Reconstruction of interface

2.3 상경계면의 계산

Level Set함수(ϕ)와 VOF 방법의 체적비(H)의 이류방정식 (3), (4)를 시간에 대하여 차분화하면 다음과 같다.

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \phi^n = 0 \quad (17)$$

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla H^n = 0 \quad (18)$$

위의 식 (18)을 풀기 위해 다음과 같이 시간에 대해서 분리하였다.⁽⁴⁾

$$\frac{H^* - H^n}{\delta t} + u^n \frac{\partial H^n}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{H^{n+1} - H^*}{\delta t} + v^n \frac{\partial H^*}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

식 (19)를 검사체적에 대하여 적분하고 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{CV} H^* dV = \int_{CV} H^n dV - F_e + F_w \quad (21)$$

$$+ \delta t \int_{CV} H^n \frac{\partial u^n}{\partial x} dV$$

식 (21)에서 $F (= u \delta t \delta y H)$ 는 Fig. 1에 표현된 바와 같이 검사체적으로 이루어지는 액상의 부피이며 F 를 구하는 과정은 다음과 같다.

- (1) 상경계면을 재구성하기 위해 필요한 상경계면에서의 법선벡터 \mathbf{n} 을 구한다. VOF 방법에서는 \mathbf{n} 을 $\nabla H / |\nabla H|$ 로 계산하며 ∇H 가 불연속이기 때문에 이를 부드럽게 하는 차분과정이 필요하다. 반면, Level Set을 사용하는 본 연구에서는 \mathbf{n} 을 $\nabla \phi / |\nabla \phi|$ 로 간단히 구할 수 있다.
- (2) 검사체적내에서 상경계면을 직선으로 가정하며, 상경계면을 결정하기 위해서 검사체적의 모서리와 상경계면과의 수직거리인 s 를 도입한다. Fig. 2에서 액상의 부피($H \delta x \delta y$)와 s 의 관계식은 다음과 같다.

$$2H \delta x_1 \delta y_1 = s^2 - \langle s - dx_1 \rangle^2 - \langle s - dy_1 \rangle^2 \quad (22)$$

여기서, $s = dx_o n_x = dy_o n_y$

$$dx_1 = n_x dx, \quad dy_1 = n_y dy$$

$$\langle a \rangle = \max(0, a)$$

- (3) 식 (22)로부터 계산된 s 를 이용하여 검사체적으로 이루어지는 액상의 부피(F)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = \frac{1}{2n_x n_y} [s^2 - \langle s - dx_1 \rangle^2 - \langle s - dy_1 \rangle^2] \quad (23)$$

여기서, $dx_1 = n_x u \delta t$, $dy_1 = n_y dy$

마찬가지 방법으로 식 (20)을 차분화할 수 있다.

3. 계산결과 및 검토

3.1 알고리즘의 검증

먼저, 본 연구에서 개발한 경계면 추적 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여, 원형의 상경계

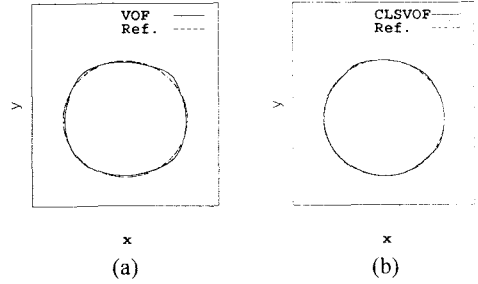


Fig. 3 Translating circle obtained from (a) VOF method and (b) new interface tracking method (CLSVOF)

면을 대각선 방향으로 일정한 속도로 이루시키는 경우에 대하여 계산을 수행하였다. Fig. 3은 반경을 10등분하는 격자간격을 사용하여 1000 시간간격동안 계산을 수행한 결과이다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 VOF 방법의 결과인 (a)보다 CLSVOF 방법의 결과인 (b)의 상경계면이 더 원형에 가깝다. 이것은 본 연구에서 사용한 CLSVOF 방법이 VOF 방법보다 우수하다는 것을 의미한다.

3.2 정지된 기체에서 단일 액적의 하강

지배방정식을 무차원하기 위해, 액적의 초기 반지름 R 과 속도 \sqrt{gR} 을 대표값으로 이용하였다. 주요 무차원 매개 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$Re = \frac{\rho_g g^{1/2} R^{3/2}}{\mu_g}, \quad We = \frac{\rho_g g R^2}{\sigma} \quad (24)$$

액적면에 정렬된 body-fitted 격자를 사용한 Dandy와 Leal⁽⁸⁾의 수치결과와 비교하기 위해 Table 1에 서술된 3가지 조건을 사용하였다. 여기서 $\lambda (= \mu_l / \mu_g)$ 는 점성계수비이고, $\zeta (= \rho_l / \rho_g)$ 는 밀도비이다.

Fig. 4는 시간에 따른 액적의 하강 속도(U)의 변화를 나타낸 것이다. 액적은 정지상태에서 하강하여 하강속도가 선형적으로 증가하다가 임의의 속도에서 그 증가율이 점점 둔화되어 결국에는 일정 속도의 정상상태에 이르게 된다. Fig. 4에서 보면, Reynolds 수가 작고 Weber 수가 클수록 빨리 종단 속도에 도달함을 알 수가 있다.

Table 1 Comparison of the dimensionless terminal velocities of falling drops

Case	Re	We	λ	ζ	David	present study	
						dx=0.05	dx=0.025
(a)	0.32	0.0005	100	1000	31.29	28.88	30.13
(b)	0.74	0.0012	100	1000	40.68	38.90	39.88
(c)	1.10	0.0010	200	1000	45.44	43.98	

정상상태에서 계산된 액적의 형상은 Fig 5와 같다. 낮은 Reynolds 수에서는 둥근 형태를 유지하지만 Reynolds 수가 증가함에 따라 액적의 종단면 형상은 타원형으로 변함을 볼 수가 있다.

Table 1에서 기포의 종단속도를 body-fitted 격자를 사용한 David와 Leal의 결과⁽⁸⁾와 비교하였다. 격자의 간격 dx가 0.05일 경우에는 최대 8%, 0.025일 경우에는 최대 4%의 편차가 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은 액적 주변의 유동을 계산한 결과이다. Reynolds 수가 60인 경우(Fig. 6(b))에 액적의 후류에서 유동의 박리현상이 일어나고, 높은 Reynolds 수에서는 박리현상이 현저한 것을 볼 수 있다.(Fig. 6(c))

3.3 단일액적의 벽면 충돌

CLSVOF 방법의 효용성을 살펴보기 위하여 액적이 벽면에 충돌하는 문제에 적용했다. Fig. 7과 8은 액적이 각각 1 m/s와 2 m/s의 속도로 충돌했을 때 액적 모양의 변화를 관찰한 것이다. 계산에 사용한 액적의 반지름은 0.25 mm이다. 사용한 물성치로는 물과 공기인 경우, 밀도비 ρ_l/ρ_g 는 8.34×10^2 이고 μ_l/μ_g 는 56을 사용하였다. Fig. 7과 8에서 나타난 바와 같이 액적의 충돌속도가 작은 경우에 액적은 벽면에 붙어있지만, 충돌속도가 2 m/s로 증가한 경우에 액적은 벽면과 충돌 후에 일부가 되튀어 벽면으로부터 멀어지는 이차 액적이 생성되는 것을 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 Level Set 방법과 결합된 VOF 기반의 경계면 추적법을 개발하고, 알고리즘의 타당성과 우수성을 검증하였다. 검증 방법으로 사용한, 정지한 유동에서의 자유 낙하하는 액적

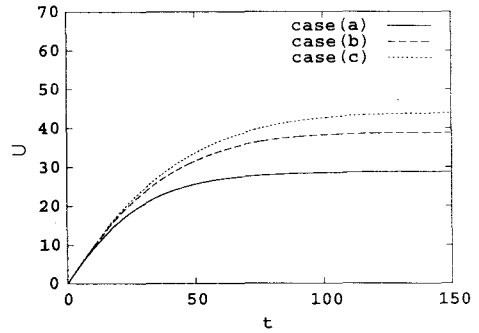


Fig. 4 Drop falling velocities for three cases

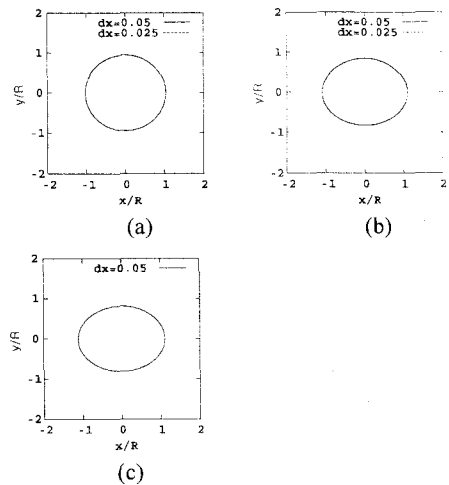


Fig. 5 Drop shapes at steady state

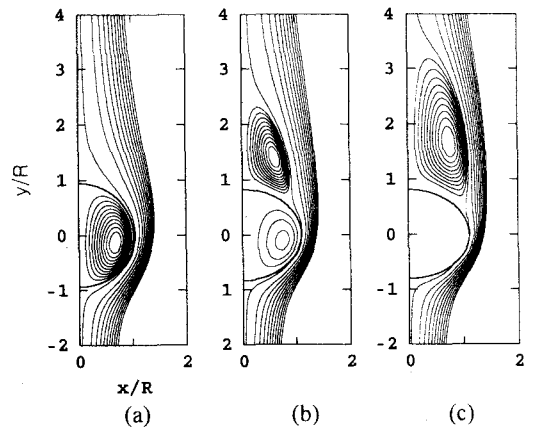


Fig. 6 Streamlines around drop for three cases

의 수치해석 결과는 문헌에 발표된 body-fitted 격자를 사용한 수치해석 결과와 8%편차 내에서 일치함을 보였다. 그리고 격자 간격을 0.025로 세분화한 경우에 계산한 결과는 문헌에 발표된 결과와 3% 이내에서 일치하였다. 이로써 본 연구에서 제안한 수치 해석 알고리즘의 타당성이 입증되었다.

또한 본 알고리즘은 body-fitted 격자를 사용한 수치해석 방법으로 불가능한 액적의 벽면 충돌 문제를 계산할 수 있음을 보였으며, 추후, 액적의 벽면 충돌 모델을 수치해석적으로 개발하는 연구를 수행할 예정이다.

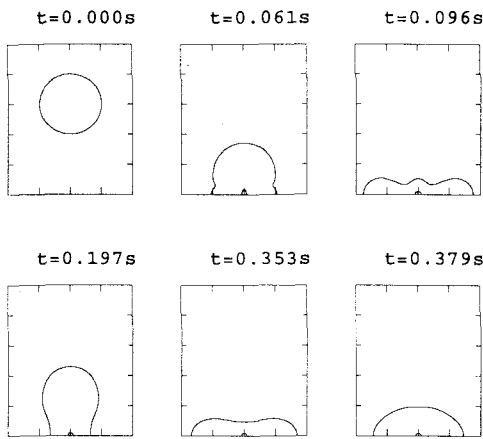


Fig. 7 Water drop impacting solid wall, $U=1$ m/s

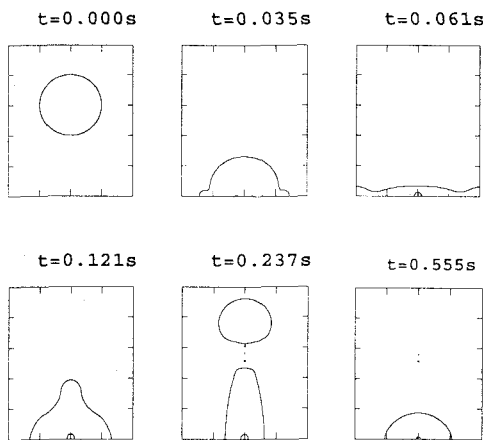


Fig. 8 Water Drop impacting solid wall, $U=2$ m/s

참고문헌

- (1) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (2) Rider, W. J. and Kothe, D. B., 1997, "Reconstructing Volume Tracking," *J. Comput. Phys.*, Vol. 141, pp. 112~152.
- (3) Kim, M. S., Shin, S. and Lee, W. I., 2000, "A new VOF-based Numerical Scheme for the Simulation of Fluid Flow with Free Surface (I)," *대학기계학회논문집 B*, Vol. 12, pp. 1555~1569.
- (4) Puckett, E. G., Almgren, A. S., Bell, J. B., Marcus, D. L. and Rider, W. J., 1997, "A High-Order Interface Tracking Method for Tracking Fluid Interface in Variable Density Incompressible Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 130, pp. 269~282.
- (5) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A Level Set Approach for Computing Solution to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 146~159.
- (6) Sussman, M. and Puckett, E. G., 2000, "A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 162, pp. 301~337.
- (7) Yabe, T. and Wang, P. Y., 1991, "Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid," *J. of Phys. Soc. Jan.*, Vol. 61, pp. 2105~2108.
- (8) Dandy, D. S. and Leal, L. G., 1989, "Buoyancy-driven Motion of a Deformable Drop Through a Quiescent Liquid at Intermediate Reynolds Numbers," *J. of Fluid Mech.*, Vol. 208, pp. 161~192.