

2-유체 모델의 고유치에 근거한 기포류에서의 계면압력도약항

정 문 선* · 이 원 재 · 이 성 재 · 송 철 화 · 하 귀 석

Mechanistic Pressure Jump Terms based on the System Eigenvalues of Two-Fluid Model for Bubbly Flow

M. S. Chung*, W. J. Lee, S. J. Lee, C. H. Song, and K. S. Ha

Key Words : Two-fluid model, Surface tension, Eigenvalue, Bubbly flow, Void-fraction wave

Abstract

Interfacial pressure jump terms based on the physics of phasic interface and bubble dynamics are introduced into the momentum equations of the two-fluid model for bubbly flow. The pressure discontinuity across the phasic interface due to the surface tension force is expressed as the function of fluid bulk moduli and bubble radius. The consequence is that we obtain from the system of equations the real eigenvalues representing the void-fraction propagation speed and the pressure wave speed in terms of the bubble diameter. Inversely, we obtain an analytic closure relation for the radius of bubbles in the bubbly flow by using the kinematic wave speed given empirically in the literature. It is remarkable to see that the present mechanistic model using this practical bubble radius can indeed represent both the mathematical well-posedness and the physical wave speeds in the bubbly flow.

기호설명

a	Interfacial area density
A	Interfacial area
c	Speed of sound
L	Fluid bulk modulus
P	Pressure
R	Radius of curvature
t	Time
v	Flow velocity
U	Primitive variable vector
V	Control volume
α	Void fraction
β	Relative surface thickness
δ	Surface thickness
ϕ	Source terms
λ	Eigenvalue
ρ	Fluid density
σ	Surface tension coefficient

1. 서론

보존방정식의 수학적 특성은 물리적 첨가항에 의하여 개선될 수 있음이 많은 선행 연구들에 의하여 보고된 바 있다. 예를 들면, Ransom & Hicks⁽¹⁾는 보존방정식에 표면장력방정식을 추가하였고, Travis⁽²⁾는 운동량방정식에 점성응력(viscous stress) 항을 고려하였으며, Stuhmiller⁽³⁾는 계면압력항을 고려함으로써 방정식계의 고유치를 실수화 할 수 있었다. 이에 따라 Lyczkowski⁽⁴⁾, Ranshaw & Trapp⁽⁵⁾, 그리고 Stewart⁽⁶⁾ 등이 지적한 바와 같이 허수의 고유치를 가짐으로써 발생하는 수치적인 불안정성을 제거할 수 있는 가능성이 제시되었다.

최근에 Lee et al.⁽⁷⁾ 및 Chung et al.^(8, 9, 10) 등에 의하여 수치적 안정성을 개선시킬 수 있는 효과적인 방법이 제시되었다. 이것은 2-유체 모델의 운동량 방정식에 표면장력효과에 의한 계면압력도약항(interfacial pressure jump term)을 도입함으로써 보존 방정식의 고유치들을 각기 다른 실수 값으로 바꾸는 방법이다. 여기서 표면장력에 의한 계면압력도

* 한국원자력연구소 열수력안전연구팀

약항은 운동량방정식의 여타의 항들보다 상대적으로 작은 값을 가지지만 가상질량항(virtual mass term) 등 기존의 원천항(source term)의 도움이 없어도 방정식계를 쌍곡형(hyperbolic)으로 변화시켜 줌으로써 수치적 불안정성을 제거할 수 있었다.

아울러, 계면압력도약항을 도입함으로써 6-방정식, 2-유체 모델의 고유치들이 각기 다른 물리적인 의미를 가지게 되었다. 즉, 고유치들이 각각 유체의 대류속도, 기체상에서의 음속, 및 액체상에서의 음속을 표현함으로써, 고속의 임계유동과 같이 파동의 전파가 유동에 미치는 영향이 매우 큰 이상 유동에 대한 모델의 적용성이 개선되었다.

그럼에도 불구하고, 초기의 계면압력도약항은 유체의 bulk modulus 와 계면면적밀도 (interfacial area density) 의 도함수항의 곱으로 표현되어 있어 계면면적밀도의 근사화를 통하여 방정식계의 닫힘 문제(closure problem)를 해결하여야만 한다. 그러나 계면면적밀도를 계면면적 수송방정식(interfacial area transport equation)의 해를 구함으로써 예측하고자 할 경우, 아직도 기포나 액적 같은 유체입자의 핵생성 (nucleation), 분합 (breakup and coalescence), 내몰 (implosion) 등에 관한 이론이 정립되어 있지 않으므로, 수송방정식의 원천항을 수학적으로 묘사하기 어려운 점이 있다. 그리고 수송방정식을 추가함으로써 2-유체 모델의 방정식의 수가 늘어나게 되므로 계산시간의 증가 및 계산의 효율성을 감소시키는 단점이 있다.

이와 같은 문제점을 해결하기 위하여, 우리는 본 연구를 통해 계면압력도약항을 보다 예측이 용이한 기포의 반경과 bulk modulus 의 함수로 새로이 표현하고자 하였다. 일반적으로 기포의 크기는 Matsui⁽¹¹⁾, Liu⁽¹²⁾ 등이 언급한 바와 같이 국소 유동형태에 의존하며 기포파(void-fraction wave) 및 유동형태의 천이(flow regime transition)에 큰 영향을 주는 것으로 알려져 있다. 또한 대부분의 기포파에 대한 연구는 2-유체 모델에 기초하고 있는데 Pauchon⁽¹³⁾, Lahey⁽¹⁴⁾ 등에 의하면 마감식(closure relation)들이 2-유체 모델의 고유치에 영향을 준다.

본 연구에서는 Boure⁽¹⁵⁾의 식을 이용하여, 기포파를 기포류에서의 특성속도(characteristic speed)의 하나로 가정하고 이를 보존방정식의 고유치로 가정함으로써 계면압력도약항을 역으로 구하는 방법으로, 기포크기에 대한 해석적인 범위를 제시하였다. 그리고 이 결과를 Song⁽¹⁶⁾등에 의해 수행된 기포반경에 대한 실험결과와 비교하였다.

2. 2-유체 모델

2.1 지배방정식

보존방정식은 2-유체 질량 및 운동량방정식으로 구성되어 있다.

$$\text{질량} : \frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial x} = \phi_{c,k} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{운동량} : & \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k^2)}{\partial x} \\ & + \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x} + (p_k - p_l) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \phi_{m,k} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $k=g$ 는 기체상을, $k=l$ 은 액체상을 나타내고 원천항 ϕ 에서 대수항들은 고유치에 영향을 주지 않으므로 생략하였다. 운동량방정식의 왼쪽 네 번째 항이 계면압력도약효과를 나타낸다.

2.2 계면압력도약항

이 항은 선행논문 들^(7, 8, 9, 10)을 통해 소개되었듯이 유체의 bulk modulus 및 계면면적밀도의 함수로써 다음과 같이 표현된다

$$(p_g - p_l) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = L_g \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g - \varepsilon_g a_l) \quad (3)$$

$$(p_l - p_l) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = -L_l \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_l + \varepsilon_l a_l) \quad (4)$$

여기서 ε 는 계면현상에 관한 매개변수이고 구형 기포의 경우 $R/2$ 을 사용한다. 그러나 다시 bulk modulus 에 관한 Present⁽¹⁷⁾의 식

$$L = c\sigma/\delta \quad (5)$$

을 사용하고 압력도약을 각 상에 대한 기여성분으로 분할하면

$$\begin{aligned} p_g - p_l &= (p_g - p_l) + (p_l - p_l) \\ &= L_g \left(1 - \frac{R_g \Delta A_l}{2 \Delta V_g} \right) - L_l \left(1 + \frac{R_l \Delta A_l}{2 \Delta V_l} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

이 되어 결과적으로 상간의 압력도약에 대한 각상의 기여성분의 비는

$$\frac{p_g - p_l}{p_g - p_l} = \frac{(-1)^n L_k}{L_g + L_l} \quad (7)$$

와 같이 표현된다. 여기서 액상의 경우 $n=1$, 기상의 경우에는 $n=2$ 이다.

결과적으로, 식 (3)-(4)는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$(p_k - p_i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = (-1)^n \frac{2\sigma}{R_i} \frac{L_k}{L_g + L_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \quad (8)$$

이때 위 항에서 기포율(void fraction)의 미분항에 곱해진 계수를 다음과 같은 매개변수로 취급할 수 있으며 이것은 기포반경에 대한 계면 두께(surface thickness)를 의미하므로 '상대적 계면두께(relative surface thickness)'로 정의한다.

$$\beta \equiv \frac{2\sigma}{R_i} \frac{1}{L_g + L_i} = \frac{\delta}{2R_i} \quad (9)$$

따라서 계면압력도약항은 단순히 bulk modulus 와 기포반경의 함수로 표현된다.

기포류를 완전한 혼합물로 가정할 경우 이상혼합유체의 bulk modulus 는

$$L_m = -V \frac{dp}{dV} = V \frac{dp}{V_g dp/L_g + V_l dp/L_l} \quad (10)$$

와 같이 사용할 수 있다^(8, 9, 10). 그런데 $L_g \ll L_l$ 이므로 식 (10)은 다음과 같이 근사화 된다.

$$L_m \approx L_g / \alpha_g \quad (11)$$

따라서 식 (8)의 각 상에 대한 bulk modulus L_k 를 식 (11)로 대치할 수 있다.

3. 기포크기의 해석적 유도

3.1 계통방정식의 고유치 해석

식 (8)-(11)을 운동량방정식(2)에 대입하고 질량 및 운동량방정식의 각 미분항을 전개하여 행렬식으로 표현하면,

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = D \quad (12)$$

가 되고 계수행렬들은 각각

$$A = \begin{bmatrix} \rho_g & \frac{\alpha_g}{c_g^2} & 0 & 0 \\ -\rho_l & \frac{\alpha_l}{c_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_g \rho_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} \rho_g v_g & \frac{\alpha_g v_g}{c_g^2} & \alpha_g \rho_g & 0 \\ -\rho_l v_l & \frac{\alpha_l v_l}{c_l^2} & 0 & \alpha_l \rho_l \\ \beta L_m & \alpha_g & \alpha_g \rho_g v_g & 0 \\ -\beta L_m & \alpha_l & 0 & \alpha_l \rho_l v_l \end{bmatrix} \quad (14)$$

로 정리되며 D 는 실험적인 대수항으로 구성된 원천항 벡터이다.

행렬 $G = A^{-1} \cdot B$ 의 고유치들은 $Det(G - \lambda I) = 0$ 에 의하여 다음과 같은 4 차의 특성방정식(characteristic equation)의 근을 구함으로써 얻어진다. 즉,

$$P(\lambda) = (\lambda - v_g)^2 (\lambda - v_l)^2 - K_1 (\lambda - v_g)^2 - K_2 (\lambda - v_l)^2 + K_3 \quad (15)$$

이고 각 계수는

$$K_1 = \frac{\beta L_m \alpha_g c_l^2 + c_g^2 c_l^2 \alpha_l \rho_g}{\alpha_g \rho_l c_l^2 + \alpha_l \rho_g c_g^2} \quad (16)$$

$$K_2 = \frac{\beta L_m \alpha_l c_g^2 + c_g^2 c_l^2 \alpha_g \rho_l}{\alpha_g \rho_l c_l^2 + \alpha_l \rho_g c_g^2} \quad (17)$$

그리고

$$K_3 = \frac{\beta c_g^2 c_l^2 L_m}{\alpha_g \rho_l c_l^2 + \alpha_l \rho_g c_g^2} \quad (18)$$

이다. 전술한 바와 같이 보존방정식들이 쌍곡형이기 위한 필요조건은 이 특성방정식의 근들 모두가 서로 다른 실수여야 한다는 것이다. 그러므로 특성방정식(15)의 해를 그래프로 나타내면 그림 1 과 같이 'W'자 모양의 곡선을 그리며 v_l 에 대하여 대칭인 형태를 가진다.

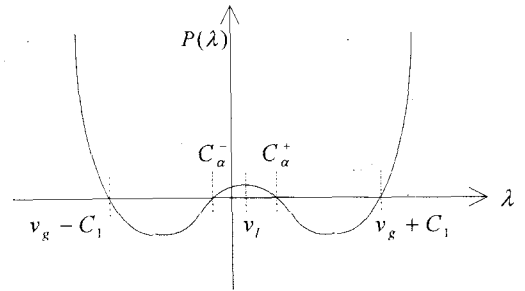


Fig. 1 Typical characteristic curve

특성방정식 (15)의 근들은 각 상의 유속 v_g 와 v_l 에 대하여 공액(conjugate)인 관계를 가지며 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_{1,2} = v_g \pm C_1 \quad (19)$$

$$\lambda_{3,4} = v_l \pm C_2 \quad (20)$$

만약 각 상의 유속이 각 상에서의 음속보다 매우 적다고 가정하면, 이런 저속의 기포류일 경우, 식

(19)의 특성속도 C_1 은 기체상에서의 음속을, 그리고 식 (20)의 C_2 는 상간의 운동량교환에 의한 다른 하나의 특성속도를 나타낸다^(8, 9, 10). 일반적으로 이 특성속도는 기포울의 전파를 나타내는 기포파로 알려져 있고^(13, 14), 따라서 우리는 특성방정식의 네 근이 기체상의 압력과 전달속도, 기포파 전달속도, 그리고 그들의 공액인 값들로 이루어져 있다고 가정할 수 있다. 기포파에 대한 관계식은 Boure⁽¹⁵⁾에 의하여 실험적으로 제시된 식

$$C_\alpha = v_g - m\alpha_g(v_g - v_l) \quad (21)$$

을 사용할 수 있으며 기포류에 대하여는 상수 $m=1.75$ 가 알려져 있다.

3.2 기포반경기준

앞 절에서와 같이 특성방정식의 근들을 가정하였을 경우 특성방정식의 계수에 포함되어 있는 기포반경에 대한 정보를 역으로 얻을 수 있다. 이것은 안정성에 대한 충분조건을 다음과 같이 표현함으로써 가능한데 즉, 특성방정식 (15)에 기포파의 속도를 대입하고 미지수로서의 기포반경을 구하기 위하여

$$P(C_\alpha) = 0 \quad (22)$$

의 해를 구하면 된다. 이때 특성방정식은 매우 복잡한 형태를 가짐으로써 해석적인 해를 구하기 어려우나, 앞서 가정한 바와 같이 각 상의 유속이 음속보다 작은 비압축성유동, $v_k \ll c_k$, 이라고 할 경우 식 (22)는 보다 단순화 되어 다음의 형태로 정리된다:

$$\alpha_g(p_l - p_i) + \alpha_l(p_g - p_i) = aC_\alpha^2 + bC_\alpha + c \quad (23)$$

여기서

$$a = (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) \quad (24)$$

$$b = -2(\alpha_g \rho_l v_l + \alpha_l \rho_g v_g) \quad (25)$$

그리고

$$c = (\alpha_g \rho_l v_l^2 + \alpha_l \rho_g v_g^2) \quad (26)$$

이다. 따라서 식 (8)을 식 (23)에 대입하고 정리하면 최종적으로 다음과 같은 기포반경에 대한 해석적인 기준을 구할 수 있다.

$$R = \frac{\sigma(\alpha_g + \alpha_l)}{aC_\alpha^2 + bC_\alpha + c} \quad (27)$$

그림 2와 3은 액상의 유속을 함수로 하고 식 (27)을 이용하여 그린 기포반경곡선을 보여준다. 이 곡선은 Song⁽¹⁶⁾등에 의한 실험결과와 상호 비교되었으나 실험결과의 불충분으로 인해 계산결과

의 전반적인 경향이 폭 넓게 검증되지는 못하였다.

우선, 그림 2, 3에서의 실선은 기포류에서의 각기 다른 네 개의 액상유속을 이용하여 얻어졌다. 즉 액상의 유속은 0.133m/s, 0.2m/s, 0.31m/s, 그리고 0.55m/s인 경우로 나누었고 이는 기상의 유속변화와 더불어 slip ratio를 변화시키는 효과를 나타낸다. 그림 2의 경우 기포울 0.1인 경우에 대한 이론적인 기포반경과 실험결과와의 비교를 보여준다.

대부분의 실험결과들이 기포류 0.1에서 기포반경이 수 mm의 크기를 가짐을 보여준다. 식 (27)에 의한 계산결과 역시 이 유동 조건에서의 기포크기가 수 mm의 크기를 가짐을 예측하고 있고 두 결과는 상당히 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

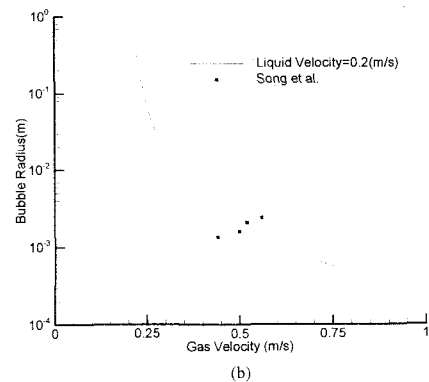
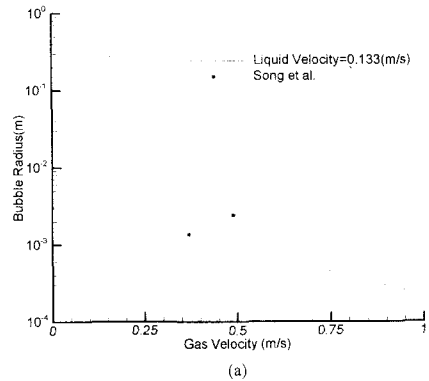


Fig. 2 Measured vs. calculated bubble radius for $\alpha_g = 0.1$

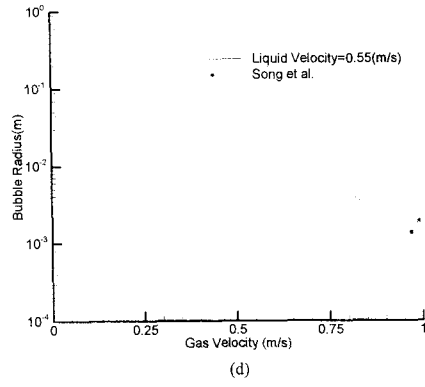
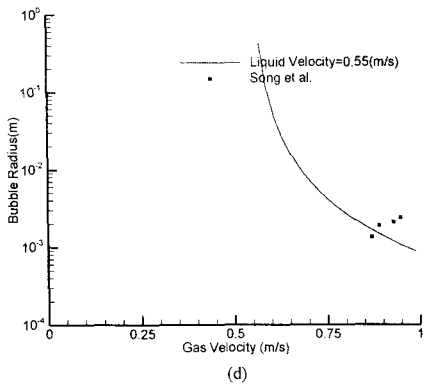
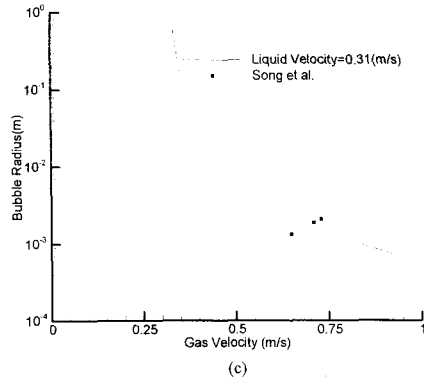
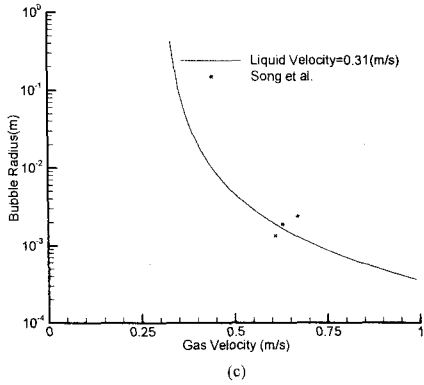


Fig. 2 Measured vs. calculated bubble radius for $\alpha_g = 0.1$ (Continued)

Fig. 3 Measured vs. calculated bubble radius for $\alpha_g = 0.2$

그림 3 을 통하여, 기포율 0.2 인 경우에도 그림 2 에서와 같은 기포크기를 가짐을 알 수 있고 실험치와의 비교결과도 기포율 0.1 인 경우와 마찬가지로 국부적인 유동 조건에 대하여 주목할 만한 일치성을 보여주고 있다. 다만, 액상의 유속 0.133m/s 및 0.2m/s 에 대한 실험결과를 인용할 수 없었으므로 유속이 0.31m/s 및 0.55m/s 인 경우만으로 이론 및 실험결과의 비교를 제한하였다. 이 결과 역시 두 결과가 서로 잘 일치하는 경향을 보였다. 따라서 이 결과들을 통하여, 본 논문에서 유도한 계면압력도약항 및 기포파를 고유치로 사용하여 해석적으로 구한 기포의 크기를 실험과 비교해 봄으로써, 상간의 slip 이 존재할 경우에도, 보 존방정식 (1)-(2) 들이 기포류에 관하여 타당한 물 리적 특성을 반영하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문을 통하여 bulk modulus 및 기포반경의 함수로 표현된 기포류에 대한 새로운 형태의 계면 압력도약항을 유도하였다. 이는 기포의 계면에 관한 역학적 고찰에 기초하고 있으며 수학적으로는, 작지만 유한한 크기의 표면장력효과를 통하여, 계 통방정식을 쌍곡형방정식으로 변환시킴과 동시에 고유치에 물리적인 의미를 부여할 수 있는 주목할 만한 기능을 가지고 있음을 알 수 있었다. 따라서 기존의 안정성을 위한 첨가항들을 사용하지 않더라도 수치적인 불안정성을 제거할 수 있게 되었다. 또한 선행연구에 의해 유도된 계면압력도약항이 계면면적밀도에 대하여 닫힌 형태의 해를 제공할 수 없었던 것에 비하여 본 계면압력도약항은 실험

을 통하여 역으로 예측할 수 있는 기포의 반경으로 기술됨으로써 방정식의 닫힘 문제를 극복할 수 있었다. 또한 기포류의 특성속도 중 하나인 기포파를 기반으로 하여 고유치해석을 통해 구한 기포 반경은 기존의 실험결과에서 얻어진 기포크기와 잘 일치함으로써 본 계통방정식이 기포류의 물리적인 특성을 잘 반영하고 있음을 보여주었다. 향후 실험결과의 보충, 방정식계의 안정성 평가 및 다양한 수치실험을 통하여 본 2-유체 모델의 검증을 수행할 예정이다.

후 기

본 연구를 수행함에 있어서 유익한 토론을 통해 큰 도움을 주신 한국과학기술원 장 근 식 교수님께 감사의 말씀을 드립니다.

참고 문헌

- (1) V. H. Ransom and D. L. Hicks, 1984, "Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow", *Journal of Computational Physics*, vol. 53, pp. 124-151.
- (2) J. R. Travis et al., 1976, "Numerical calculation of two-phase flows", *Nuclear Science and Engineering*, vol. 61, pp. 1-10.
- (3) J. H. Stuhmiller, 1977, "The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 3, pp. 551-560.
- (4) R. W. Lyczkowski et al., 1978, "Characteristics and stability analyses of transient one dimensional two-phase flow equations and their finite difference approximations", *Nuclear Science and Engineering*, vol. 66, pp. 378-396.
- (5) J. D. Ramshaw and J. A. Trapp, 1978, "Characteristics, stability, and short-wave length phenomena in two-phase flow equation systems", *Nuclear Science and Engineering*, vol. 66, pp. 93-102.
- (6) H. B. Stewart, 1979, "Stability of two-phase flow calculation using two-fluid models", *Journal of Computational Physics*, vol. 33, pp. 259-270.
- (7) S. J. Lee, K. S. Chang, S. J. Kim, 1998, "Surface tension effect in the two-fluid equation system", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, pp. 2821-2826.
- (8) M. S. Chung, K. S. Chang, S. J. Lee, 2000, "Wave propagation in two-phase flow based on a new hyperbolic two-fluid model", *Numerical Heat Transfer-part A*, vol. 38, pp. 169-191.
- (9) M. S. Chung, S. J. Lee, and K. S. Chang, 2001, "Effect of interfacial pressure jump and virtual mass terms on sound wave propagation in the two-phase flow", *Journal of Sound and Vibration*, in press.
- (10) M. S. Chung, S. J. Lee, W. J. Lee, and K. S. Chang, 2001, "An interfacial pressure jump model for two-phase bubbly flow", *Numerical Heat Transfer-Part B*, in press.
- (11) G. Matsui, H. Monji, T. Sugiyama, 1991, "Flow pattern indication of gas-liquid mixtures", *Proc. Int. Conf. on Multiphase Flows '91*, Tsukuba, vol. 1, pp. 37-40, Sept.
- (12) T. J. Liu, 1993, "Bubble size and entrance length effects on void development in a vertical channel", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 19, pp. 99-113.
- (13) C. Pauchon, S. Banerjee, 1988, "Interphase momentum interaction effects in the averaged multifield model; Part-II. Kinematic waves and interfacial drag in bubbly flows", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 14.
- (14) R. T. Jr. Lahey, 1991, "Void wave propagation phenomena in two-phase flow", *AIChE J.*, vol. 37, pp. 123-135.
- (15) J. A. Boure, 1988, "Properties of kinematic waves in two-phase flow; consequences on the modelling strategy", *Proc. Euro. Two-Phase Flow Group Meeting*, Brussels, May 30-June 1.
- (16) C. H. Song, H. C. No, M. K. Chung, 1995, "Investigation of bubble flow developments and its transition based on the instability of void fraction waves", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 21, pp. 381-404.
- (17) R. D. J. Present, 1974, "On the product of surface tension and compressibility of the liquids", *J. Chemical Physics*, vol. 61, pp. 4267-4269.