

# 빛을 발산하는 기포의 안정성 해석

강 상우\* · 이 윤표\* · 곽 호영\*\*

## Stability Analysis for a Sonoluminescing Gas Bubble

Sarng Woo Karng\*, Yoon Pyo Lee\* and Ho-Young Kwak\*\*

**Key Words:** bubble wall motion(기포벽 운동), interface(계면), instability(불안정성), ultrasound(초음파), sonoluminescence(소노루미네스스)

### Abstract

It is well known that an air bubble trapped in water emits light at its collapse robustly with a proper forcing amplitude of ultrasound. Instability mechanism which causes deviation from sphericity of bubble wall was investigated theoretically. The rapid change of the bubble wall velocity which is both dependent on the forcing amplitude, was found to be a major factor of instability of the interface. The Rayleigh-Taylor instability which occurs when rapid acceleration is directed from the lighter towards the heavier fluid is found to be not related to the instability of the sonoluminescing gas bubble. A good agreement between the calculation results and experimental data is found.

### 1. 서론

초음파의 주파수와 가진압력으로 액체내의 기포의 거동을 제어할 경우, 기포 수축시 빛을 발산하는 소노루미네스스(sonoluminescence) 현상은 지난 10년간 여러 연구자에 의하여 집중적으로 연구되어 왔다<sup>(1,2)</sup>. 기포 수축시 빛을 발산하는 기포의 평형반경(기포 내부의 가스 압력이 1기압일 때의 기포 반경)은 액체의 종류, 용액의 온도, 가진압력에 따라 달라지게 된다<sup>(3)</sup>. 그러나 주어진 용액, 온도, 가진주파수 및 가진압력에서 아주 안정적으로 빛을 주기적으로 발산하는 기포인 경우라도 가진압력을 조금만 높이게 되면 기포는 사라지고 만다.

본 연구에서는 빛을 발산하는 기포에 대한 안정성 문제를 이론적으로 규명해보고자 하였다.

### 2. 기포의 안정성 문제

반경  $R$ 인 기포가 초음파에 의하여 용액 내에서 진동하고 있을 때, 주어진 가진압력에서 안정적으로 거동하는 기포가 가진압력의 변동이나 기타 외부 조건에 의하여 기포와 환경액체의 계면이 다음과 같이 섭동되었다고 하자.

$$r_s = R(t) + a(t)Y_n^m \tag{1}$$

식 (1)에서  $Y_n^m$ 은 구면조화함수(spherical harmonics)이고  $a(t)$ 는 계면의 섭동진폭이다. 이 진폭이  $R$ 에 비하여 상당히 작다고 가정하면 계면에서 반경방향의 입자의 속도는 다음과 같이 주어진다<sup>(4)</sup>.

$$u = \dot{R}(t) + \dot{a}(t)Y_n^m \tag{2}$$

\* 한국과학기술연구원 열유동제어연구센터

\*\* 중앙대학교 기계공학부

또한 섭동이 있을 경우, 기포 내부 및 기포 외부에서의 속도 포텐셜은 계면 부근에 해석을 국한시킬 경우 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_1 = \frac{R^2 \dot{R}}{r} + b_1 r_n Y_n^m, \quad r < R \quad (3-1)$$

$$\phi_2 = \frac{R^2 \dot{R}}{r} + b_2 \frac{Y_n^m}{r^{n+1}}, \quad r > R \quad (3-2)$$

식 (3)에서 임의의 함수  $b_1$ 과  $b_2$ 는 계면에서 반경방향의 속도가 연속이라는 조건으로부터 구할 수 있다. 즉,

$$b_1 \cong -\frac{1}{nR^{n-1}} \left( \dot{a} - \frac{\dot{R}}{R} a \right) \quad (4-1)$$

$$b_2 \cong \frac{R^{n+2}}{n+1} \left( \dot{a} + 2 \frac{\dot{R}}{R} a \right) \quad (4-2)$$

이제 Bernoulli 정리를 적분하여 기포 내부와 기포 외부에서의 섭동이 있을 경우, 압력  $P_1'$ 과  $P_2'$ 를 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$P_1' = P_1(t) + \rho_1 \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)_r - \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2_r \right] \quad (5-1)$$

$$P_2' = P_2(t) + \rho_2 \left[ \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right)_r - \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2_r \right] \quad (5-2)$$

식 (5)에서  $P_1$ 과  $P_2$ 는 기포계면에 섭동이 없을 때의 기포 내부와 외부(환경압력)에서의 압력이다. 또한 섭동이 있을 때의  $P_1'$ 와  $P_2'$ 의 압력 차이는 다음과 같이 주어진다<sup>(5)</sup>.

$$P_2' - P_1' = -\frac{2\sigma}{R} - \frac{(n-1)(n+2)}{R^2} \alpha a Y_n^m \quad (6)$$

식 (5)와 (6)을 결합하고, 식 (5)에 있는 속도 포텐셜에 관한 항을 식 (3)을 이용하여 계산하면 섭동이 없을 경우의 계면에 대한 운동방정식인 Rayleigh 식과 계면 섭동의 변화에 관한 방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_2} \left[ P_1(t) - P_2(t) - \frac{2\sigma}{R} \right] \quad (7)$$

$$\alpha \ddot{a} + \frac{3\dot{R}}{R} \dot{a} - (n-1) \left[ \frac{\beta \ddot{R}}{R} - \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{\rho_2 R^3} \right] a = 0 \quad (8-1)$$

$$\alpha = 1 + \frac{(n+1)\rho_1}{n\rho_2} \quad (8-2)$$

$$\beta = 1 - \frac{(n+1)\rho_1}{n\rho_2} \quad (8-3)$$

이제 계면, 즉 기포벽의 운동과 이로 인한 기포벽 주위의 유체 흐름간의 상호작용을 고려해보자. 이와 같은 상호작용에 의한 와류(vortex)의 toroidal 성분은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{R^2}{r^2} \dot{R} U \right) = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - (n+1) \frac{\nu U}{r^2} \quad (9)$$

계면 즉,  $r=R$ 에서 윗식은 다음과 같이 된다.

$$U(R(t), t) + 2R^{n-1} \int_{R(t)}^{\infty} s^{-n} U(s, t) ds \quad (10)$$

$$= \frac{2}{n+1} \left[ (n+2) \dot{a}_n - (n-1) \frac{\dot{R}}{R} a_n \right]$$

점성효과가 작을 경우에는 기포벽과 기포벽 주위의 유체 흐름간의 상호작용에 의한 와류는 기포벽 주위의 얇은 점성층에 국한되므로 이를 고려하면<sup>(7)</sup> 섭동에 의한 계면에 대한 식 (8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha \ddot{a}_n + B_n(t) \dot{a}_n - A_n(t) a_n = 0 \quad (11-1)$$

$$\text{단, } A_n(t) = (n-1)\beta \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\beta_n \sigma}{\rho_2 R^3} \quad (11-2)$$

$$- \frac{2\nu \dot{R}}{R^3} \left[ \frac{n(n-1)(n+2)}{1+2\frac{\delta}{R}} - \beta_n \right]$$

$$B_n(t) = \frac{3\dot{R}}{R} + \frac{2\nu}{R^2} \left[ \frac{n(n+2)^2}{1+2\frac{\delta}{R}} - \beta_n \right] \quad (11-3)$$

$$\beta_n = (n-1)(n+1)(n+2) \quad (11-4)$$

기포거동을 환경액체의 압축성 효과를 고려할 경우에 식 (3)에 대응되는 기포 내부 및 외부에서의 속도 포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_1 = \frac{1}{r} \left[ f \left( t - \frac{r}{c_\infty} \right) + g \left( t + \frac{r}{c_\infty} \right) \right] + b_1' r_n Y_n^m, \quad r < R \quad (12-1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{r} \left[ f \left( t - \frac{r}{c_\infty} \right) + g \left( t + \frac{r}{c_\infty} \right) \right] + b_2' \frac{Y_n^m}{r^{n+1}}, \quad r > R \quad (12-2)$$

식 (12)에 주어진 함수  $f$ 와  $g$ 는 다음의 파동방정식을 만족하는 일반해이다.

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

기포를 둘러싼 환경액체가 비압축성 유체라고 가정했을 경우와 똑같은 방법으로 식 (12)에서  $b_1'$ 와  $b_2'$ 를 구한 후, Bernoulli 정리를 이용하면 환경액체의 압축성 효과를 고려한 경우의 기포벽에 대한 운동방정식과 계면 섭동의 변화에 관한 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$c_\infty (R\dot{R} + \phi_R) + 2\dot{g} - \frac{R\dot{R}^2}{2} - \frac{(P_b - P_\infty)R}{\rho_\infty} = 0 \quad (14-1)$$

$$\text{단, } \phi_R = (f + g)/R, \quad (14-2)$$

$$a\ddot{a} + \frac{3\alpha\dot{R}}{R} \dot{a} - (n-1) \cdot \left[ \beta \frac{\dot{R}}{R} - \gamma \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{\rho_2 R^3} \right] a = 0 \quad (15-1)$$

$$\text{단, } \beta = 1 - \frac{(n+1)(n+2)\rho_1}{(n-1)\rho_2} \quad (15-2)$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{n-1} \quad (15-3)$$

식 (14-1)을 시간에 대하여 미분하면 잘 알려진 기포에 대한 Keller-Miksis(KM)의 방정식<sup>(8)</sup>을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$R\dot{R} \left( 1 - \frac{\dot{R}}{c_\infty} \right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left( 1 - \frac{\dot{R}}{3c_\infty} \right) = \frac{1}{\rho_\infty} \left( 1 + \frac{\dot{R}}{c_\infty} + \frac{R}{c_\infty} \frac{d}{dt} \right) (P_b - P_\infty) \quad (16)$$

또한 기포벽 근처의 점성에 의한 와류효과를 고려하면 기포벽의 섭동에 대한 방정식은 다음과 같이 된다.

$$a\ddot{a} + B_n'(t)\dot{a} - A_n'(t)a = 0 \quad (17-1)$$

$$\text{단, } A_n'(t) = (n-1)\beta \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\beta_n \sigma}{\rho_2 R^3} - \alpha \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{2\nu\dot{R}}{R^3} \left[ \frac{n(n-1)(n+2)}{1+2\frac{\delta}{R}} - \beta_n \right] \quad (17-2)$$

$$B_n'(t) = \frac{3\alpha\dot{R}}{R} + \frac{2\nu}{R^2} \left[ \frac{n(n+2)^2}{1+2\frac{\delta}{R}} - \beta_n \right] \quad (17-3)$$

### 3. 기포/액체 계면의 불안정성 문제

기포벽의 섭동에 의하여 기포가 불안정하게 되는 것은 그 섭동진폭이 지수적으로 증가하는 경우일 것이다. 섭동에 의한 진폭이 다음과 같이 시간에 따라 변한다고 가정하자<sup>(9)</sup>.

$$a_n \propto \exp[S_n(t)] \quad (18)$$

식 (18)을 식 (11-1)에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$a_n S_n^2 + B_n(t)S_n - A_n(t) = 0 \quad (19)$$

식 (19)에서 최대값을 가질 수 있는  $S_n$  값을 구하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \overline{S}_n &= \int \dot{S}_n(t) dt \\ &= \int \left[ -\frac{B_n}{2a} + \sqrt{\left( \frac{B_n}{2a} \right)^2 + \frac{A_n}{a}} \right] dt \end{aligned} \quad (20)$$

식 (8-1)에서 알 수 있는 바와 같이 기포벽의 불안정성이 구현되는 지점이라고 예상되는 기포의 수축시에는 기포내 가스의 밀도,  $\rho_1$ 이 환경액체의 밀도,  $\rho_2$ 에 근접하므로  $\alpha$ 값이 커져 점성효과는 상대적으로 작아지게 된다. 또한 식 (11-2)에 주어진  $A_n$  항이나 식 (17-2)에 주어진  $A_n'$  항

중, 첫 번째 항을 보면 기포벽의 가속도가 기포의 수축시에는 양으로 뒀과 동시에  $\beta$ 값은 음이 되어 기포벽의 가속도가 오히려 기포거동의 안정에 기여함을 알 수 있다. 이러한 결과는 Brenner 등<sup>(9)</sup>, Hao와 Prosperetti<sup>(10)</sup>의 해석과는 전혀 다른 바, Plesset<sup>(4)</sup>은 식 (8)에 주어진 바와  $\rho_1$ 과  $\rho_2$  값에 의존되는  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 값을 기포내의 가스 밀도,  $\rho_1$ 이 물의 밀도,  $\rho_2$ 에 비하여 그 값이 상당히 작다고 가정하여 전부 '1'로 취하였다. 따라서 Plesset의 가정을 그대로 사용한 Brenner 등<sup>(9)</sup>이나 Hao와 Prosperetti<sup>(10)</sup>의 해석은 기포가 수축시, 즉 기포 내 가스의 밀도가 환경액체의 밀도 값에 접근하게 되는 경우에는 전혀 다른 결과를 가져올 것으로 예상되어 빛을 발산하는 기포의 안정성 연구에는 적절한 가정이 아님을 알 수 있다.

#### 4. 해석 및 결과

Brenner 등<sup>(9)</sup>이나 Hao와 Prosperetti<sup>(10)</sup>는 Rayleigh-Plesset(RP) 방정식을 이용하여 기포의 안정성에 대하여 해석하였다. 이들은 RP 방정식을 해석할 때, 주기적인 가진에 대한 기포의 거동이 초음파장과 같은 위상(phase)으로 기포가 움직인다고 생각함으로써 기포의 거동에 인조공진(artificial resonance)이 발생하여 실제 기포의 거동과는 차이를 보이고 있다. 실제 기포는 가진 주파수에 대하여 기포의 평형반경이 작을수록 긴 지연시간을 가지고 거동한다<sup>(11)</sup>. 또한 이들의 해석은 기포의 안정성을 해석함에 있어서 Plesset의 해석을 검증하지 않고 사용한 오류로 인하여 기포의 안정성 해석에 문제를 내포하고 있음은 전술한 바와 같다.

본 연구에서는 기포와 가진된 초음파 사이의 유한한 지연시간을 고려하여 Navier-Stokes 방정식의 해석해<sup>(12)</sup>와 함께, 기포벽 운동에 대하여 유체의 압축성 효과를 고려한 Keller-Miksis(KM) 방정식<sup>(8)</sup>을 이용하여 기포거동을 수치적으로 계산하고,  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 값을 '1'이라 하지 않고 식 (8-2), (15-2)를 이용하여 기포 수축시 식 (20)에 주어진  $S_n$ 을 합산하여 구함으로써 기포벽의 불

안정성 여부를 조사하였다.

Brenner 등<sup>(9)</sup>이나 Hao와 Prosperetti<sup>(10)</sup>의 기포거동 해석 방법으로 기포의 안정성 문제를 Rayleigh-Taylor 불안정성에 의한 것이라고 가정하고 검토한 결과 Fig. 1에서 볼 수 있는 바와 같이 가진압력에 따른 기포거동의 안정을 유지할 수 있는 평형반경의 범위를 얻을 수 있었다. 이 값들은 Brenner 등<sup>(9)</sup>이 비이커에 담긴 물이 급격히 아랫방향으로 가속될 경우, Rayleigh-Taylor 불안정성 문제<sup>(11)</sup>라고 착상하여 얻은 결과와 유사하지만<sup>(9)</sup> 전형적인 실험치<sup>(3)</sup>와는 다른 값이다. 예를 들면, 평형반경이 4.5  $\mu\text{m}$ 일 경우, 가진압력이 1.30 atm일 때 단일기포에 의한 소노루미네스스 현상이 안정적으로 일어나지만 Brenner 등<sup>(9)</sup>의 계산결과에서 기포벽의 불안정성은 가진압력이 이보다 훨씬 낮은 1.17 atm보다 클 경우에도 나타나고 있다.

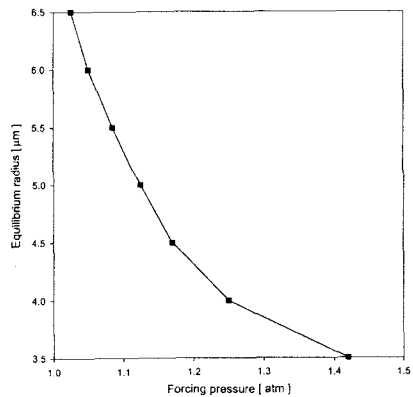


Fig. 1 Stability curve beyond which the bubble is unstable(right) with  $\alpha = \beta = 1$  and RP Eq.

Fig. 2에는 전형적인 기포거동의 불안정성이 나타날 것으로 예상되는 평형반경 17  $\mu\text{m}$ , 가진압력 0.8 atm, 가진주파수 26.5 kHz인 경우,  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 값을 '1'로 놓고, RP 방정식을 이용하여 계산된 결과로 시간에 따른 기포거동(점선)과 섭동진폭을 나타내었다. 이 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 7 번 주기 후에는 섭동진폭이 커져 기포거동이 불가능함을 보여주고 있다. 하지만 이 경우에도 기포벽에 대한 KM 방정식을 이용하고 가진 음파와 기포거동 간에 지연시간을 고려하면 기포벽의 섭동진폭은 급격히 줄어들고 기포는 안

정된 거동을 거듭할 수 있음을 Fig. 3은 보여주고 있다. Fig. 2에서 볼 수 있는 바와 같이 Brenner 등<sup>(9)</sup>과 Hao와 Prosperetti<sup>(10)</sup>가 해석한 방법인 경우에는 주기가 거듭될수록 기포의 거동은 불규칙해지는 것을 볼 수 있는 바, 이러한 기포거동의 불규칙성이 주기가 거듭되면서 나타나는 기포의 불안정성이라 생각할 수 있다.

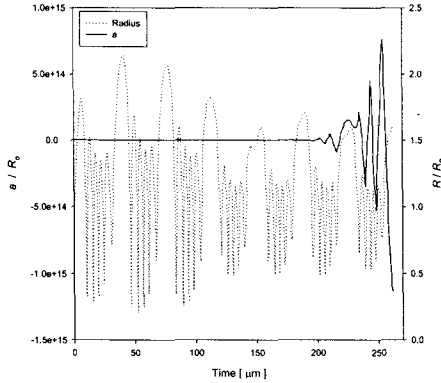


Fig. 2 An example of parametric instability of an air bubble in water for  $R_0=17 \mu\text{m}$  at  $P_A=0.8 \text{ atm}$  and  $f=26.5 \text{ kHz}$  by using RP Eq.

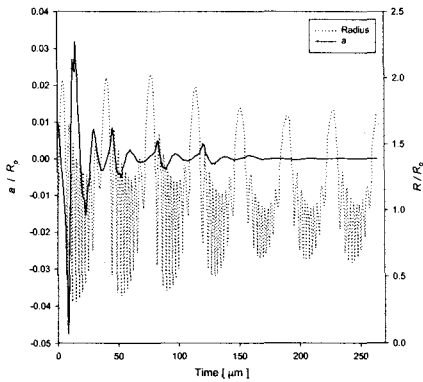


Fig. 3 A parametrically stable air bubble in water for  $R_0=17 \mu\text{m}$  at  $P_A=0.8 \text{ atm}$  and  $f=26.5 \text{ kHz}$  by using KM Eq.

Fig. 4에서 볼 수 있는 바와 같이 기포벽의 속도가 최소일 때, 섭동진폭의 변화를 나타내는 지수  $S_n$ 은 급격하게 커져 최대가 됨을 알 수 있는 바, 이것은 기포벽의 속도가 기포거동의 안정성에 크게 관계하고 있지만, 기포벽의 급격한 가속도의 변화는 기포거동의 불안정성에 거의 영향을 미치지 못함을 알 수 있다.

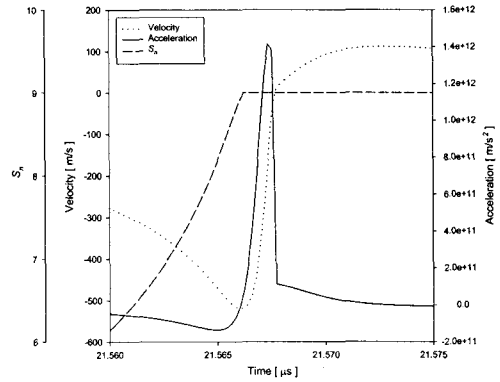


Fig. 4 Instability parameter,  $S_n$  and bubble wall velocity and acceleration during collapse for an air bubble of  $R_0=4.5 \mu\text{m}$  at  $P_A=1.305 \text{ atm}$  and  $f=26.5 \text{ kHz}$

한편, 기포와 가진된 초음파 사이의 유한한 지연시간을 고려하고, Navier-Stokes 방정식의 해석해<sup>(12)</sup>와 함께, 식 (16)에 주어진 기포벽에 대한 KM 방정식을 이용하여 기포거동을 해석하고 식 (17-1)을 이용하여 기포의 섭동진폭을 해석했을 경우, 가진압력에 따른 기포거동이 안정을 나타내는 평형반경의 범위가 Fig. 5에 나타나 있다. Brenner 등<sup>(9)</sup>이 해석한 결과보다 주어진 가진압력에서 안정되게 소노루미네스 현상을 구현할 수 있는 평형반경의 범위가 훨씬 넓게 나타남을 알 수 있다. 그리고 해석에서 구한 결과에 의하면 평형반경  $4.5 \mu\text{m}$ 일 때, 가진압력  $1.305 \text{ atm}$ 에서 불안정성을 나타내고 있고, Barber 등<sup>(3)</sup>의 실험결과는 평형반경  $4.5 \mu\text{m}$ 일 때, 가진압력  $1.3$

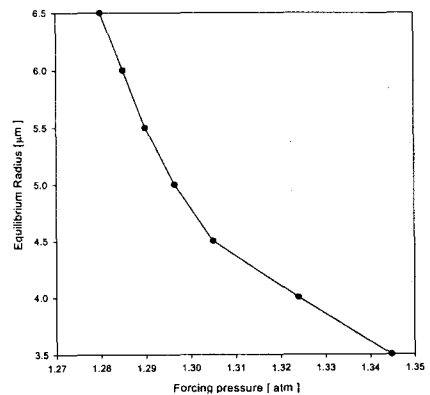


Fig. 5 Stability curve beyond which the bubble is unstable(right) with  $\alpha$  and  $\beta$  given in Eq. (8-2) and (15-2) respectively and with KM Eq.

atm에서 안정성을 나타내고 있다. 이는 가진압력이 1.3 atm에서는 안정성을 나타내지만 조금만 높아져도(1.305 atm) 불안정성이 나타남을 의미하며, Barber 등의 실험결과<sup>(3)</sup>와 잘 일치하고 있음을 보여준다. 그러나 Brenner 등<sup>(9)</sup>이나 Hao와 Prosperetti<sup>(10)</sup>의 해석 방법으로 얻어진 결과를 나타낸 Fig. 1에서는 평형반경 4.5  $\mu\text{m}$ 일 때, 가진압력 1.3 atm의 조건은 불안정성 범위에 들어 있어 Barber 등<sup>(3)</sup>의 실험결과와는 일치하지 않고 있다. 이것은 전술한 바와 같이 기포벽의 급격한 가속은 오히려 기포거동의 안정에 기여해줄 뿐만 아니라 기포 수축시 기포내 가스 밀도의 증가는 기포거동의 한 변수인 기포질량을 증가시켜 기포거동을 교란시키는 점성효과를 감소시켜 주기 때문이라고 생각된다.

## 5. 결론

초음파장에서 진동하는 액체내의 기포가 그 수축시 빛을 발산하는 기포에 대한 안정성 문제를 유체역학 관점에서 이론적으로 검토하였다.

본 연구에서 밀도가 작은 유체가 상대적으로 밀도가 큰 유체를 급격한 가속으로 압축할 경우 일어나는 Rayleigh-Taylor 불안정성은 소노루미네스스 현상을 수반하는 기포에 대한 안정성 문제와는 관련이 없음이 밝혀졌다. 비압축성을 고려한 기포거동의 경우, 기포가 환경액체의 계면에 대하여 안정된 기포거동을 나타내는 가진압력에 따른 평형반경 곡선을 처음으로 얻었으며 그 결과는 Barber의 실험<sup>(3)</sup>과 잘 일치하였다.

## 감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정목적연구비의 지원(과제번호 1999-1-304-002-5)으로 행해진 연구임.

## 참고문헌

- (1) Barber, B.P., Hiller, R.A., Löfstedt, R., Putterman, S.J., Weninger, K.R., 1997, "Defining the unknowns of sonoluminescence", Phys. Report, Vol. 281, pp. 65-143.
- (2) Putterman, S.J., Weninger, K.R., 2000, "Sonoluminescence ; How bubbles turn sound into light", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 32, pp. 445-476.
- (3) Barber, B.P., Wu, C.C., Löfstedt, R.A., Robert, P.H., Putterman, S.J., 1994, "Sensitivity of sonoluminescence to experimental parameters", Phys. Rev. Lett., Vol. 72, pp. 1380-1383.
- (4) Plesset, M.S., 1954, "On the stability of fluid flow with spherical symmetry", J. Appl. Phys., Vol. 25, pp. 96-98.
- (5) Lamb, H., 1945, *Hydrodynamics*, Dover.
- (6) Prosperetti, A., 1977, "Viscous effects of perturbed spherical flows", Quar. Appl. Math., Vol. 35, pp. 339-352.
- (7) Hilgenfeldt, S., Lohse, D. and Brenner, M.P., 1996, "Phase diagrams for sonoluminescing bubbles", Phys. Fluids, Vol. 8, No. 11, pp. 2808-2826.
- (8) Keller, J.B. and Miksis, M., 1980, "Bubble oscillations of large amplitude," J. Acoust. Soc. Am., vol. 68, pp. 628-633.
- (9) Brenner, M.P., Lohse, D. and Dupont, T.F., 1995, "Bubble Shape Oscillation and the Onset of Sonoluminescence", Phys. Rev. Lett., Vol. 75, No. 5, pp. 954-957.
- (10) Hao, Y. and Prosperetti, A., 1999, "The effect of viscosity on the spherical stability of oscillating gas bubble", Phys. of Fluids, Vol. 11, No. 6, pp. 1309-1317.
- (11) Drazin, P.G. and Reid, W.H., 1981, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press.
- (12) 강상우, 박호영, 2000, "초음파장하에서 미소 기포의 완화적 거동", 대한기계학회 2000년도 추계학술대회논문집 B pp. 550-555.
- (13) Kwak, H. and Na, J., 1996, "Hydrodynamic solutions for a sonoluminescing gas bubble", Phys. Rev. Lett. Vol. 77, pp. 4454-4457.