

평면급확장유동내 대칭유동분기현상의 특성에 관한 연구

조진호* · 이문주**,** · 김기태**

Characteristics of Bifurcation Phenomena of Symmetric Flow Pattern in a Plane Sudden-Expansion Flow

JinHo Cho, Moon J. Lee and KiTae Kim

Key Words : Sudden-Expansion Flow (급확장유동), Critical Reynolds Number (임계 레이놀즈 수), Asymmetric Stable Flow (비대칭유동), Bifurcation (분기), Fractional-Step Method (분할 단계법)

Abstract

Bifurcation of unstable symmetric flow patterns to stable asymmetric ones in laminar sudden-expansion flow has been numerically investigated. Computations were carried out for an expansion ratio of 3 and over a range of the flow Reynolds numbers by using numerical methods of second-order time accuracy and a fractional-step method that guarantees divergence-free flowfields at all times. The critical Reynolds number above which bifurcation of pitchfork type to asymmetric flow pattern takes place is lower in a flow with a higher expansion ratio, in agreement with the previously reported results. The bifurcation diagrams show that the bifurcation takes place at a Reynolds number, $Re_c = 86.3$, higher than the value that has been reported. The lower critical Reynolds number may be due to deficiencies in their computations which employed SIMPLE-type relaxation methods rather than the initial-value approach of the present study. Characteristics of the flow development during the transition to asymmetric stable flow have been investigated by using spectral analysis of the velocity signals obtained by the simulations.

1. 서론

평면급확장유동내의 대칭유동에 있어서 불안정성은 Reynolds number 가 증가하여 임계 Reynolds number 에 이르면 유동을 centerline 에 대하여 비대칭으로 변화케 한다. 이러한 현상은 평면급확장유동이 불안정하여 약간의 disturbance 가 존재할 경우 한쪽 벽면에서 유체 속도의 상대적 증가에 따른 압력 감소로 일정 Reynolds number 이상에 도달하면 대칭성을 깨뜨리는 것으로 분석되고 있다.

이론적으로 Navier-Stokes equation 은 x 축에 대하여 완전히 대칭이므로 수치적으로 이 식을 계산할 경우 경계조건과 초기조건이 centerline 에 대하여 대칭이라면 계산 결과도 x 축에 대하여 완전히 대칭으로 나올 것이다. 그러나, 현실적으로 완벽한 대칭을 만족하는 실험장치는 만들기 때문에 Reynolds number 를 높여 가면서 평면급확장유동내의 대칭유동에 관한 실험을 할 경우에 비대칭으로의 분기현상이 나타난다.

Durst *et al.*⁽¹⁾은 확장비가 2 와 3 인 낮은 Reynolds number 를 갖는 평면확장유동에 관한 실험적인 연구를 통하여 특정 Reynolds number 이상에서는 비대칭 유동이 발생함을 보인 바 있으며 Chedron *et al.*⁽²⁾ 또한 다양한 유동현상에 대한 가시화를 통하여 대칭유동이 존재하는 구간이 일정한 Reynolds number 에 제한될 뿐 아니라 확장비가 2 인 유동

* 포항공과대학교 대학원

** 정희원, 포항공과대학교 기계공학과

*** 첨단유체공학연구소

에서 $Re_c = 185$ 를 임계 Reynolds number 로 제시하였다. Sobey^(3,4) 역시 실험적 연구를 통하여 확장 유동이 전체적으로는 평면문제이지만 국부적으로 3 차원적인 vortex 가 존재한다는 사실과 다른 무차원 변수에 의해 Reynolds number 를 정의하여 임계 Reynolds number 가 75 임을 보였다.

최근에 확장유동에 대한 실험적인 연구와 수치 해석을 통하여 Fearn *et al.*⁽⁵⁾ 이 확장비가 3 인 경우에 임계 Reynolds number 를 80.9 인 것으로 제안하였고 이 결과는 Shapira *et al.*⁽⁶⁾의 stability analysis 에 의해 82.6 인 값과 거의 차이가 없는 것으로 확인되었다. 그러나, 확장비가 2 인 경우에는 Chedron *et al.*⁽⁷⁾은 임계 Reynolds number 를 150-180 사이에 존재한다고 예측한 반면 Durst *et al.*⁽⁸⁾은 125 정도, Shapira *et al.*⁽⁶⁾는 215 라고 제안할 정도로 아직까지 임계 Reynolds number 를 구하는 것은 더 많은 연구가 필요한 실정이다.⁽⁹⁾

그밖에도 여러 연구자에 의하여 확장유동에서의 분기현상에 대한 실험적인 연구와 수치적 계산이 수행되어 왔다.^(9,11) 그러나, 수치적 계산의 경우 time advancement 에 있어서 iteration 기법을 이용한 relaxation scheme 을 사용하는 것이 대부분이었다. 따라서, 이와 같이 time-accurate 하지 않은 방법으로 구한 solution 은 각 timestep 에서의 solution 뿐만 아니라 최종적으로 나온 solution 또한 그 정확성을 보장하지 못할 것이며 이와 같은 부정확성은 특히 여기서 다루고 있는 평면급확장유동의 경우에 있어서 임계 Reynolds number 값 자체에도 영향을 줄 것으로 예측되었다. 이에 본 연구에서는 time-accurate 한 fractional-step method 를 이용하여 평면급확장유동에 대한 정확한 계산을 수행하여 평면급확장유동의 분기현상을 더 정확히 이해하고 다양한 방법으로 임계 Reynolds number 를 결정 한 후 기존 문헌에서 보고한 값과 비교 분석할 것이다. 또한, 평면급확장유동이 대칭에서 비대칭으로의 전이 되는데 주된 작용을 하는 least stable mode 가 가지는 유동형태도 분석하고자 한다.

2. 계산영역 및 지배방정식

본 논문에서는 확장비가 3 인 평면급확장내 층류의 유동에 관한 연구를 수행하였다. 수치해석을 위해 필요한 geometry 와 경계조건은 Figure 1 에 나타내었다. 이 논문에서 Reynolds number 는 최대 inlet 속도와 upstream channel 의 높이를 기준으로 정의하여 사용하였다.

2 차원 유동에 대한 momentum equations 와 continuity equation 은 최대속도와 upstream channel

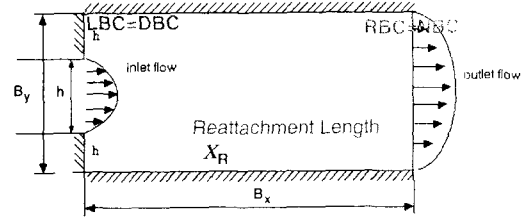


Fig. 1. Geometry and boundary conditions of a plane sudden expansion flow.

의 높이를 이용하여 무차원화된 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

여기서, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 와 $p(\mathbf{x}, t)$ 는 각각 속도와 압력을 나타낸다.

3. NUMERICAL METHODS 및 수행계산

3.1 Fractional-step method of type D^{*}(12)

지배방정식을 풀기 위하여 비선형식인 대류항은 Adams-Bashforth 방법으로 선형식으로 표현되는 점성항은 Crank-Nicolson 방법을 사용하였으며 비압축성 유동의 압력구배항을 효과적으로 다루기 위하여 fractional-step method D^{*}(12)를 적용하였다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t (3\mathbf{N}^{(n)} - \mathbf{N}^{(n-1)}) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{L}^* - \mathbf{L}^{(n)}) - \Delta t G \phi^{(n)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$D\mathbf{u}^* - \Delta t D G \phi^{(n+1)} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t G \phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \quad (5)$$

위의 전개된 식을 이용하여 tentative velocity \mathbf{u}^* 와 가상 압력 ϕ 을 구하여 최종 속도 $\mathbf{u}^{(n+1)}$ 를 계산하는 식으로 진행하였다. 이때 연속성을 의미하는 식 (2)의 divergence 값은 계산이 진행되는 동안 모든 영역에서 계속 10^{-12} 이하를 유지하여 divergence-free 를 만족하였다. 공간에 대한 차분화에 있어서는 central differencing 을 사용하였다.

3.2 경계조건 및 계산 내역

입구에서는 parabolic profile, 벽면에서는 no-slip condition, 그리고 출구에서는 완전발달유동조건을 경계조건으로 사용하였다. 이때 계산을 위해 staggered grid 를 이용하였으며 $Bx/h = 30$, expansion

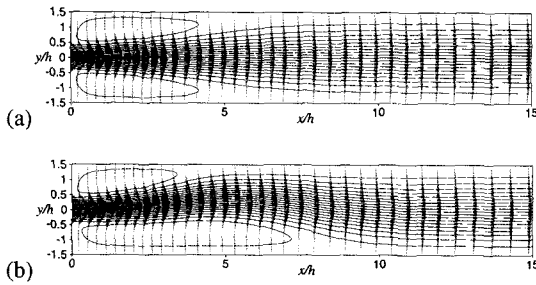


Fig. 2. Effect of Reynolds number on flow pattern (velocity vectors and streamlines) for expansion ratio of 3: (a) $Re = 80$; (b) $Re = 100$. (Only half of the streamwise extent is shown.)

ratio $E = 3$ 인 계산 domain 에 대하여 $N_x = 100, N_y = 60$ 의 grid point 로 x 방향으로는 nonuniform 한 grid 로써 최소 $\Delta x_{\min} / h = 0.15$ 에서 점차 증가하여 최대 $\Delta x_{\max} / h = 0.6$ 이고 y 방향으로는 $\Delta y / h = 0.05$ 인 uniform grid 를 사용하였다.

4. 대칭 및 비대칭 유동장의 특성 비교

4.1 대칭 유동과 비대칭 유동

Figure 2(a, b)는 확장비가 3 이고 disturbance 의 크기가 10^{-6} 인 종류에 대해서 $Re = 80$ 과 $Re = 100$ 인 경우 각각의 속도 벡터와 stream line 을 나타낸다. 실제 계산에서 $B_x / h = 30$ 까지 계산하였으나 x/h 가 15 이상인 지점부터는 속도 변화가 크지 않아 일부만 표현하였다. 그림에서 알 수 있듯이 $Re = 80$ 에서는 x 방향 속도 u 가 $O(10^{-6})$ 내로 수렴할 경우에는 대칭성을 유지하지만 $Re = 100$ 이상이 되면 비대칭적인 유동으로 수렴함을 알 수 있다. 이때 flow pattern 은 disturbance 의 크기가 커질수록 수렴하는 시간을 앞당길 뿐이며 같은 결과를 얻을 수 있으므로 계산 시간을 줄이기 위하여 disturbance 의 크기는 x 방향 속도 u 의 수렴정도를 고려하여 10^{-6} 으로 정하여 사용하였다. 이러한 유동특성은 top boundary 와 bottom boundary 에 따라 du/dy 를 구해봄으로써 더 확실히 구분이 가능해진다.

4.2 벽면에서의 전단률과 재부착지점

Figure 3(a, b)는 $Re = 80$ 과 $Re = 100$ 인 경우 각각에 대하여 top boundary 와 bottom boundary 에 따라 shear rate, $S = du/dy$ 를 구한 결과를 나타낸다. $Re = 80$ 인 경우에는 top 과 bottom 에서의 du/dy 가 x 축에 대하여 완전히 대칭이지만 $Re = 100$ 에서는 top 과 bottom 에서의 du/dy 로부터 비대칭 유동을

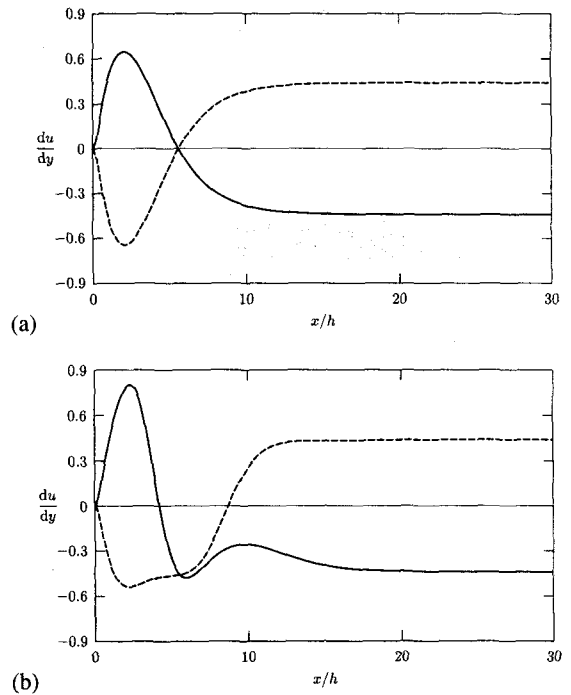


Fig. 3. Profile of du/dy along the top (solid line) and bottom (dotted line) boundaries for expansion ratio of 3: (a) $Re = 80$; (b) $Re = 100$.

가짐을 알 수 있다.

5. Disturbance 의 성장률 및 임계 Reynolds number

이와 같이 임의의 expansion ratio E 를 갖는 평면 급확장유동은 Reynolds number 를 증가시켜 감에 따라 어떤 특정한 Reynolds number 이상이 되면 비대칭 유동으로 전이되는데 이 Reynolds number 를 임계 Reynolds number (critical Reynolds number)라고 한다. 앞에서도 언급했듯이 급확장유동 자체가 매우 불안정하여 유동이 임계 Reynolds number 이상이 되면 벽면에서의 압력의 미세한 불균형으로 인하여 분기(bifurcation)하는 현상을 보이게 된다.

임계 Reynolds number 를 구하는 것은 매우 중요하며 다양한 연구자들에 의하여 그 방법이 제안된 바 있다. 특히, 매우 작은 amplitude 를 갖는 disturbance 의 운동을 normal mode 로 해석하여 안정성을 나타내는 지표가 growth rate β 이다. Growth rate 의 부호에 따라 disturbance 의 안정성을 결정하는데 $\beta = 0$ 에 해당하는 Reynolds number 가 critical Reynolds number 이다.

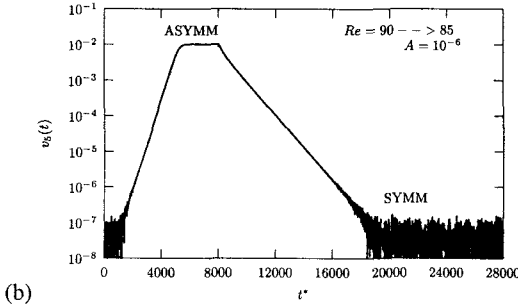
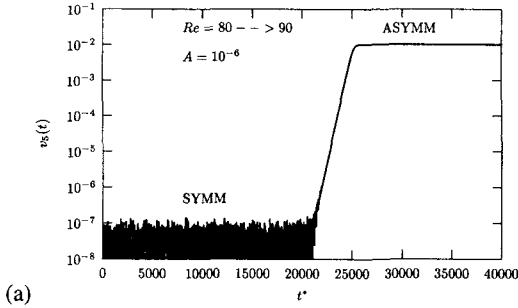


Fig. 4. History of v signal at $(x,y) = (5,0)h$ in simulations at Reynolds number near the critical Reynolds number: (a) Re from 80 to 90; and (b) Re from 90 to 85. (A is the amplitude of disturbance.)

5.1 Disturbance의 선형수치해석 및 bifurcation

Figure 4(a)와 (b)는 $(x,y)=(5,0)h$ 인 위치에서 초기 조건으로 $Re = 80$ 을 가한 경우에 수렴할 때까지 계산하고 이 계산 결과를 초기조건으로 하면서 Reynolds number 만 90 으로 높였을 때와 $Re = 90$ 을 준 경우에 수렴할 때까지 계산하고 이 계산 결과를 초기조건으로 하면서 Reynolds number 만 80 으로 낮추었을 때 시간에 따른 수직 방향속도 v 의 plot 이다. 이 때 v 의 slope 를 계산하면 growth rate 을 구할 수 있는데 임의의 Reynolds number 를 초기조건으로 이용하여도 같은 기울기를 얻을 수 있었다. 즉, bifurcation 이 생기는 $Re = 100$ 의 경우는 $Re = 90$ 을 초기조건으로 이용하여 $Re = 100$ 으로 증가시킬 때 생기는 기울기와 초기조건을 $Re = 100$ 으로 하여 처음부터 계산한 결과와 growth rate 을 비교하여 보면 같다. 또한, bifurcation 이 생기지 않는 $Re = 80$ 의 경우는 $Re = 100$ 으로 수렴한 유동을 초기조건으로 하고 $Re = 80$ 으로 감소시킬 때와 $Re = 80$ 으로 수렴한 유동에서 disturbance 를 제거한 후 감소할 때 생기는 기울기를 계산한 것과 같다. $Re = 85$ 가 만약 임계 Reynolds number 이 상이라면 $Re = 90$ 에서 $Re = 85$ 로 낮추었을 때에도

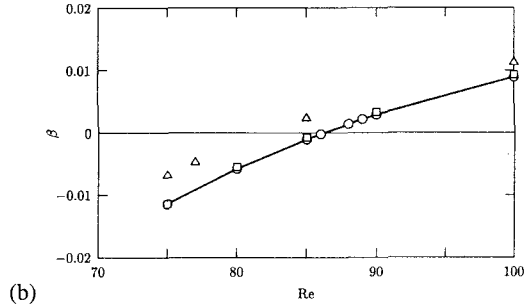
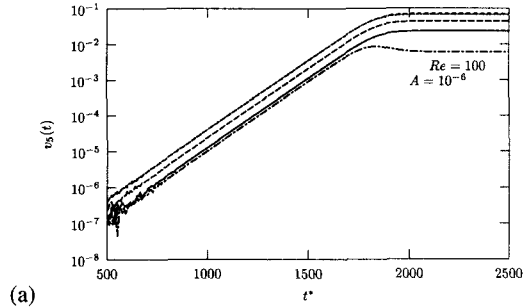


Fig. 5. (a) Comparison of the v -signal at $x/h = 0.5, 1, 2, 3$ and 5 along the centerline; and (b) growth rate β as a function of the Reynolds number: \circ , v -signal slope; \square , energy balance; \triangle , Shapira *et al.*⁽⁶⁾.

bifurcation flow 를 유지하고 임계 Reynolds number 이하라면 bifurcation flow 를 유지하지 못할 것으로 예측하였다.

Figure 5(a)는 centerline 위의 여러 지점 $x/h = 0.5, 1, 2, 3, 5$ 에서의 y 방향 속도 v 의 비교를 나타낸다. 다양한 지점에서의 기울기가 같은 값을 나타내므로 어떠한 지점을 선택하여도 같은 growth rate 을 얻을 수 있다. 이때 growth rate β 는 linear growth 하는 구간에서 임의의 시간에서의 속도 $v(t)$ 와 Δt 시간후의 속도 $v(t+\Delta t)$ 를 이용하여 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$\beta = \frac{1}{\Delta t} \ln \left[\frac{v(t+\Delta t)}{v(t)} \right] \quad (6)$$

Figure 5(b)에 보이는 바와 같이 $Re = 90$ 에서의 growth rate 은 양으로 나타나고 $Re = 85$ 인 경우는 음으로 나타나므로 $Re = 85$ 와 $Re = 90$ 사이에 임계 Reynolds number 가 존재하는 것을 알 수 있으며 이 구간에서의 growth rate 를 interpolation 하여 bifurcation diagram 에서 얻은 값과 거의 같은 $Re_c = 86.27$ 을 구하였다. 이는 Shapira *et al.*⁽⁶⁾에서 보고된 값 $Re_c = 82.6$ 보다는 매우 큰 값이다.

5.2 Energy balance

전 domain 에 대하여 mean velocity 를 제거한

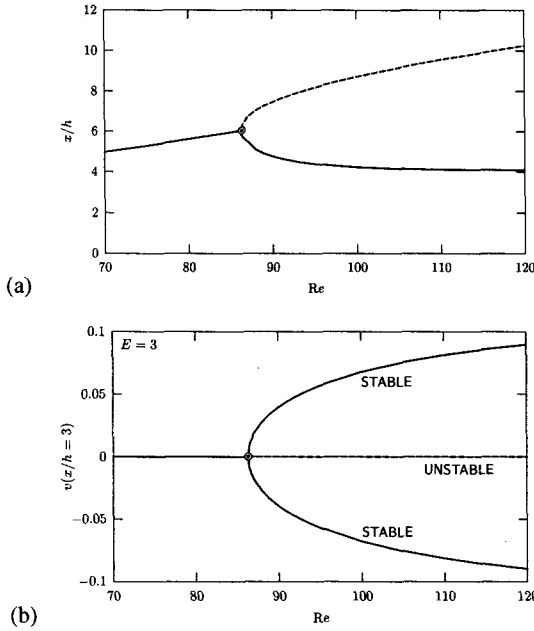


Fig. 6. Bifurcation diagram: (a) reattachment length along the top (solid line) and the bottom (dotted line) boundary; (b) v signal at $x/h = 3$.

disturbance field 의 kinetic energy 의 transport equation (kinetic energy 와 dissipation rate 및 production rate)을 이용하여 growth rate 을 구할 수 있다.

$$\beta = \frac{1}{2k} \frac{dk}{dt} = \frac{P - \varepsilon}{2k} \quad (7)$$

여기서, k , P 및 ε 은 각각 kinetic energy of the disturbance field, production rate, 그리고 dissipation ratio 를 나타낸다.

Figure 5(b)은 수직방향속도 v 의 성장기울기를 이용한 경우와 energy balance 를 이용하여 growth rate 를 계산한 경우 그리고 Shapira *et al.*⁽⁶⁾의 계산 결과를 비교한 결과를 나타낸다. 그림에서 확인할 수 있듯이 growth rate 을 구하는데 있어서 수직방향속도 v 의 기울기를 이용한 방법과 energy balance 를 이용한 방법은 동일한 임계 Reynolds number $Re_c = 86.27$ 을 보이고 있다. 그러나, 문헌상의 값들 중 하나인 Shapira *et al.*⁽⁶⁾의 계산 결과는 82.6 정도의 임계 Reynolds number 를 가진다. 이러한 차이가 나타나는 것은 비압축성 유동내 divergence-free 속도장에 상응하는 압력구배항을 계산하기 위하여 대부분의 연구에서는 time-accurate 하지 않은 SIMPLE method 를 이용하였기 때문이라고 사료된다. 이와 같이 timestep 에 따라 정확하지 않은 solution 을 mean flow 조건으로 하여 계산

을 수행한 경우 eigensolution 의 정확도를 보장하지 못하여 time-accurate 한 계산방법인 fractional-step method 에 비해 낮은 임계 Reynolds number 가 나타난 것으로 추측되었다. 따라서, 이와 같이 불안정한 유동의 선형해석시에는 time-accurate 한 fractional-step method 의 사용을 권장한다.

5.3 Bifurcation diagram

Figure 6(a)는 Reynolds number 에 따른 top 과 bottom boundary 에서 reattachment length ($du/dy = 0$) 의 변화를 나타내고 있다. 이 그림에서 알 수 있듯이 reattachment length 는 bifurcation 이 생기는 임계 Reynolds number 가 될 때까지는 top boundary 와 bottom boundary 에서 동일한 값을 가지며 Re 에 따라 증가하나 임계 Reynolds number 이상이 되면 Reynolds number 가 증가함에 따라 top boundary 에서는 오히려 줄어들고 bottom boundary 에서는 늘어나는 경향을 나타내었다. 위의 그림에서 알 수 있듯이 top boundary 와 bottom boundary 에서 reattachment length 가 달라지는 $Re_c = 86.3$ 이 임계 Reynolds number 임을 알 수 있다.

유동내 일정한 지점에서의 수직방향속도 성분 v 값이 Re 에 따라 변화하는 양상으로 bifurcation diagram 을 그릴 수 있다. Figure 6(b)는 $(x,y) = (3,0)h$ 에서의 v 가 수렴하는 값을 이용하여 각 Reynolds number 에 대하여 도식화 해 봄으로써 완성한 bifurcation diagram 이다. Expansion ratio $E = 3$ 인 경우에는 $x/h = 3$ 인 지점이 y 방향 속도 v 의 크기 변화가 가장 커지는 부근이며 가장 flow 의 특성을 잘 나타낸다고 생각되어 이 위치를 정하여 bifurcation diagram 을 그려 보았다. 그 결과 reattachment length 의 top boundary 와 bottom boundary 를 이용하여 구한 Figure 6(a)의 bifurcation diagram 과 같은 지점에서 bifurcation 하는 현상이 나타나 임계 Reynolds number 가 86.3 임을 확인할 수 있었다. 이와 같은 v -signal 을 이용한 diagram 은 급확장유동시 비교적 낮은 Reynolds number 에서의 pitchfork bifurcation 을 나타낸다.

5.4 Least stable mode (disturbance field)

Figure 7(a, b, c, d)는 $Re = 100$ 인 유동에서 비대칭 유동으로의 전이가 선형적으로 생기는 구간동안의 한 시점인 dimensionless time $t = 1500$ 에서 mean velocity 를 제거한 disturbance field 의 least stable mode 에 대응하는 streamlines 와 속도 벡터 및 iso-vorticity contours 그리고 isobaric contours 을 나타낸다. 이 때 Fig. 7(b)의 속도벡터는 쉽게 알아볼 수 있도록 실제 격자점중 x 방향으로 하나씩 건너 표

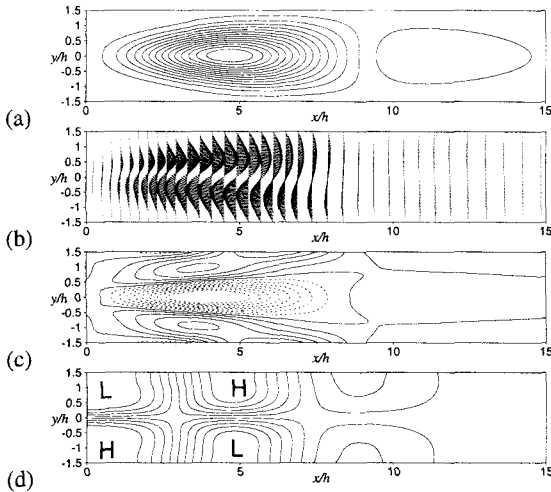


Fig. 7. (a) Streamlines; (b) velocity vectors; (c) iso-vorticity contours; and (d) isobaric contours showing the flow field corresponding to the least stable mode for expansion ratio of 3 at $Re = 100$. (Only half of the streamwise extent is shown.)

시하였다. Figure 7(a, b)에서 x/h 가 10 이상이 되면 disturbance 가 거의 없어 완전발달된 channel flow 와 같게 된다. Fig. 7(c)는 eigensolution 이 x/h 가 7-8 이하의 구간에서 시계방향의 와도를 갖는 main vortex 가 존재하고 이보다 강도가 훨씬 작은 2 개의 counterclockwise vortices 가 main vortex 의 위아래에 형성되고 있음을 보이고 있다. 또한, Figure 7(d)의 isobars 는 main vortex 를 중심으로 좌상 및 우하부는 low pressure 그리고 좌하 및 우상부는 high pressure 를 형성하고 있음을 보인다.

6. 결론

본 논문에서는 확장비가 3 인 평면급확장내 층류의 유동에 관한 연구를 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다. 일정한 expansion ratio 를 갖는 평면급확장유동은 Reynolds number 를 증가시켜 감에 따라서 임계 Reynolds number 이상이 되면 비대칭적인 유동으로 전이가 생긴다. 이와 같은 bifurcation 은 least stable mode 가 vortex 를 유지시켜 주기 때문이며 bifurcation diagram 이나 growth rate 을 구함으로써 결정이 가능해진다. 본 논문에서는 time-accurate 한 fractional-step method 를 사용하여 정확한 임계 Reynolds number $Re_c = 86.27$ 를 결정할 수 있었다.

본 연구에서는 expansion ratio 를 $E = 3$ 으로 제한하였지만 다양한 expansion ratio 에서 임계

Reynolds number 를 결정함으로써 급확장유동에 영향을 주는 중요한 요소인 expansion ratio 와의 상관 관계를 밝히는 것은 매우 중요할 것으로 판단된다. 또한, 낮은 Reynolds number 에서의 pitchfork type 의 bifurcation 과 다르게 high Reynolds number 에서 생기는 Hopf bifurcation 을 해결하기 위해 3 차원으로 계산을 확장하여 그 효과를 보는 것 또한 흥미로운 문제가 될 것이다.

참고문헌

- (1) Durst, F., Melling, A. and Whitelaw, J. H. 1974 Low Reynolds number flow over a plane symmetrical sudden expansion. *J. Fluid Mech.* **64**, 111-128.
- (2) Chedron, W., Durst, F. and Whitelaw J. H. 1978 Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansion. *J. Fluid Mech.* **84**, 13-31.
- (3) Sobey, I. J. 1985 Observation of waves during oscillatory channel flow. *J. Fluid Mech.* **151**, 395-426.
- (4) Sobey, I. J. and Drazin, P. G. 1986 Bifurcations of two-dimensional channel flows. *J. Fluid Mech.* **171**, 263-287.
- (5) Fearn, R. M., Mullin, T. and Cliffe, K. A. 1990 Non-linear flow phenomena in a symmetric sudden expansion. *J. Fluid Mech.* **211**, 595-608.
- (6) Shapira, M., Degani, D. and Weihs, D. 1990 Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channels. *Computers & Fluids* **3**, 239-258.
- (7) Durst, F., Pereira, J. C. F. and Tropea, C. 1993 The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **248**, 567-581.
- (8) Drikakis, D. 1996 Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows. *Phys. Fluids* **9**, 76-87.
- (9) Battaglia, F., Tavener, S. J., Kulkarni, A. K. and Merkle, C. L. 1997 Bifurcation of low Reynolds number flows in symmetric channels. *AIAA J.* **35**, 99-105.
- (10) Alleborn, N., Nandakumar, K., Raszillier, H. and Durst, F. 1997 Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion. *J. Fluid Mech.* **330**, 169-188.
- (11) Mizushima, J. and Shiotani, Y. 2000 Structural instability of the bifurcation diagram for two-dimensional flow in a channel with a sudden expansion. *J. Fluid Mech.* **420**, 131-145.
- (12) Lee, M. J., Oh, B. D. and Kim, Y. B. 2001 Canonical fractional-step method and consistent boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **168**, 73-100.