

# 와점성 변화가 회전곡면으로 이루어진 마이크로 슬롯 유동장에 미치는 영향

최근우\* · 김윤제\*\*

## Effects of Vortex Viscosity Variation on the Flowfields in a Micro-slot between Rotating Surfaces of Revolution

G.-W. Choi and Youn J. Kim

**Key Words:** Micropolar fluid(미세극성유체), Microrotation(미세회전), Microelement(미세요소), Vortex viscosity(와점성계수)

### Abstract

Micron-size mechanical devices are becoming more prevalent, both in commercial applications and in scientific inquiry. Within the last decade, a dramatic increase in research activities has taken place, mostly due to the rapidly expanding growth of applications in areas of MEMS(Micro-Electro-Mechanical Systems), bioengineering, chemical systems, and advanced energy systems.

In this study, we have described the effects of vortex viscosity variation on the flowfields in a micro-slot between rotating surfaces of revolution using a micropolar fluid theory. In order to solve this problem, we have used boundary layer equations and applied non-zero values of the microrotation vector on the wall. The results are compared with the corresponding flow problems for Newtonian fluid. Results show that the coefficient  $\delta$  controls the main part of velocity  $v_x$  and the coefficient  $M$  controls the main part of microrotation component  $\Omega_\theta$ .

#### 기호설명

- $A$  : 무차원변수 ( $A = 1 + \frac{(2+\delta)\zeta}{2+\delta(2+\zeta)}$ )
- $h$  : 유로 중심에서 벽면까지 거리
- $M$  : 미세 극성 매개변수 ( $M = mh$ )
- $m$  : 점성 매개변수 ( $m = \sqrt{\frac{x(2\mu+x)}{\gamma(\mu+x)}}$ )
- $R$  : 회전축으로부터 유로 중심까지 거리
- $s$  : 회전비 ( $s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ )
- $v$  : 속도성분

#### 그리스문자

- $\alpha, \beta, \gamma$ : 회전점성계수 (spin gradient viscosity)
- $\delta$  : 무차원 점성계수 비 ( $\delta = \frac{x}{\mu}$ )
- $\zeta$  : 미세 회전 경계변수
- $\eta$  :  $y$  방향의 무차원수 ( $\eta = \frac{y}{h}$ )
- $x$  : 와점성계수 (vortex viscosity)
- $\mu$  : 절대점성계수
- $\rho$  : 밀도
- $\Phi$  : 무차원수 ( $\frac{\delta}{1+\delta}$ )
- $\Omega$  : 미세 회전성분

\* 성균관대학교 대학원  
 \*\* 성균관대학교 기계공학부

하첨자  
 $x, y, \theta$ :  $x, y, \theta$  방향

## 1. 서론

Micro System Technologies(MST)는 마이크로 스케일의 전기적/기계적 장치 등의 구성을 위한 관련 기술로 최근 들어 급속히 확장되고 있는 최신 기술분야이다. Micromachining technologies는 70년대 후반에 집적 회로(integrated circuit) 산업에서 출발한 이래, 전자산업, 기계, 광전자, 그리고 의공학 분야 등으로의 응용범위가 확장되고 있다.

현재 마이크로 채널과 미세 기계 등의 유체 시스템에서 유체 유동은 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 해석하고 있다. 그러나, 많은 문헌에서 마이크로 스케일에서 유동은 매크로 스케일(macro-scale)의 그것과는 다르며, Navier-Stokes 방정식으로는 그 현상을 설명할 수 없는 것으로 발표되고 있다. 더욱이, 현재 사용 가능한 실험 데이터는 이론상의 값보다 50~100%이상의 값의 차이가 나타나기 때문에 결론에 도달할 수가 없다. 그러므로, 그러한 미세 기기를 효과적으로 설계하고 제작하기 위해서는 마이크로 스케일에서의 유체 유동을 이해해야만 한다.

미세 극성유체 이론(micropolar fluid theory)은 Eringen<sup>(1)</sup>에 의해 처음 소개된 유체 미세 연속체 역학의 일반이론을 간략화한 것이다. 미세 극성유체 이론에서, 작은 유체 체적요소에 포함된 입자(rigid particles)들은 미세회전 벡터로 묘사되는 체적요소의 중심에 대한 회전으로 한정되어 있다. 이러한 입자들의 국소 회전은 모든 체적요소의 일반적인 강체 움직임이다. 미세 극성유체 이론에서는 고전 연속체역학 법칙에 재료의 미세구조에 대한 고려 때문에 야기되는 microinertia 모멘트 보존과 일차 응력 모멘트 평형을 고려하여 추가적인 식을 추가하였다<sup>(2)</sup>. 그러므로, 회전 텐서와 micro-inertia 모멘트 텐서, 그리고 체적모멘트, 응력 모멘트, 그리고 미세응력의 개념과 같은 새로운 역학적인 값들이 고전연속체 역학에 조합되어 있다.

Ariman<sup>(3)</sup>은 미세 극성유체 이론을 적용하여 100  $\mu\text{m}$ 의 크기를 갖는 작은 동맥에서의 혈액유동을 해석하였다. 그는 벽면에서의 미세 회전 성분이 없다는 가정 하에서 속도구배 값을 해석하였다. Nigam 등<sup>(4)</sup>은 관절(human joint)에 작용하는 하중을

적용한 두개의 얇은 평판을 모델로 하여 평판사이의 유체, 즉 관절 윤활액(synovial fluid)을 미세 극성유체로 묘사하였다.

Papautsky 등<sup>(5)</sup>은 미세 극성유체 이론에 기초하여 폭이 30 $\mu\text{m}$ 인 미세 채널 내의 유동특성을 예측하였다. 또한, 미세한 피펫 배열(pipette arrays)을 사용하여 마이크로 채널내의 압력에 따른 유량을 측정하였고, 마이크로 채널의 경우 미세 극성유체 이론에 기초한 모델이 실험결과에 좀더 근접함을 보였다.

Walicka<sup>(6)</sup>는 미세 극성유체 이론을 이용하여 회전 곡면체 슬롯(slot)사이의 비압축성 미세 극성유체의 정상상태, 층류 유동에 대해 마이크로 채널내의 유동특성을 벽면 경계조건이 제로 조건이라는 가정 하에 해석적인 해를 구하고 Newton 유체와 비교하였으며, 축대칭으로 회전하는 두개의 곡면사이의 얇은 틈에서 비압축성 미세 극성유체가 갖는 가압 층류 유동(pressurized laminar flows)에 대해 고찰하였다.

또한, Kim<sup>(7)</sup>은 상사해법을 이용하여 평판유동과 쉘기형 물체 주위의 비압축성, 미세 극성유체의 정상, 층류유동에 대하여 고찰하였으며, 속도구배는 고찰된 값의 범위 내에서 미소하게 변화하였지만 회전 장과 조합응력(couple stress)은 크게 변함을 확인하였다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 일반적인 축대칭으로 이루어져 있는 회전 곡면체 슬롯(slot)사이의 비압축성 미세 극성유체의 정상상태, 층류 유동에 대해 속도 구배 값에 일정한 비례관계를 가지는 벽면에서의 미소회전 경계조건을 적용하여 해를 구하고 이에 따른 유동특성을 Newton 유체와 비교 고찰하고자 한다.

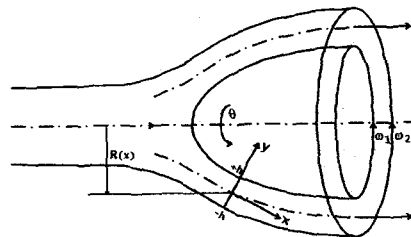


Fig. 1 Slot between rotating curvilinear surfaces.

## 2. 이론적 배경

미세 극성유체의 운동방정식을 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot V = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + x \nabla \times \Omega - (\mu + x) \nabla \times \nabla \times V + (\lambda + 2\mu + x) \nabla \nabla \cdot V + \rho f \quad (2)$$

$$\rho_j \frac{d\Omega}{dt} = x \nabla \times V - 2x \Omega - \gamma \nabla \times \nabla \times \Omega + (a + \beta + \gamma) \nabla (\nabla \cdot \Omega) + \rho l \quad (3)$$

여기서,  $l$  은 미세관성(microinertia),  $f$  는 체적력(body force)을  $j$  는 body couple을 나타낸다. 특히,  $x = a = \beta = \gamma = 0$ 이라 하면,  $l$  과  $f$  그리고 회전성분  $\Omega$ 는 0이 되어 소거되고, 식 (2)은 우리가 잘 알고 있는 Navier-Stokes 방정식으로 표현된다. 또한,  $x = 0$ 에 대해서는 속도성분  $V$ 와 미세 회전성분  $\Omega$ 는 서로 독립적 관계가 되고, 전체적인 거동(global motion)은 미세 회전(micro-rotations)에 영향을 받지 않는다.

Fig. 2는 Fig. 1에 대한  $x, \theta, y$ 의 직교 곡선 좌표계이다. 여기서  $h(x) \ll R(x)$ 이고, 축대칭(axi-symmetric)이므로  $\partial/\partial\theta = 0$ 이라 가정하고 크기분석법(order of magnitude)을 이용하여 식을 단순화시킨다<sup>(8)</sup>. 또한, 채널 내의 유동을 등은 비압축성 층류 유동이라 가정하고 식 (1)~(3)을 간략화 시키면 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$(\mu + x) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - x \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$(\mu + x) \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + x \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

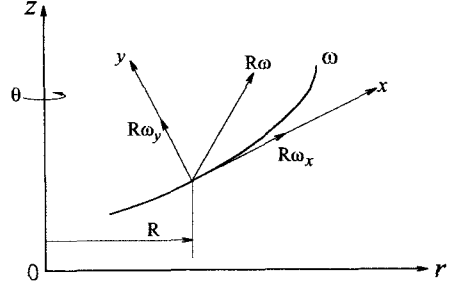


Fig. 2 Curvilinear orthogonal coordinate systems.

$$x \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + 2\Omega_x \right) - \gamma \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$x \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega_\theta \right) + \gamma \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

$$2x\Omega_y - (a + \beta + \gamma) \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

위의 지배방정식 (4)~(9)의 해를 구하기 위한 속도와 미세회전장의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_x(x, \theta, \pm h) &= 0 \\ v_y(x, \theta, \pm h) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$v_\theta(x, \theta, \pm h) = R\omega_{1,2}$$

$$\Omega_i(x, \theta, \pm h) = \frac{1}{2} \zeta \nabla \times V$$

여기서,  $\zeta$ 는 미세 회전 경계변수이며,  $\zeta$ 는  $0 \leq \zeta \leq 1$ 의 범위를 가진다. 특히  $\zeta = 0$ 인 경우  $\Omega = 0$ 가 되고 벽면에 근접한 미세요소(microelements)가 회전하지 않는 질은 입자 농도의 흐름을 나타낸다.  $\zeta = 0.5$ 인 경우 약한 입자 농도를 나타내며,  $\zeta = 1$ 인 경우에는 난류경계층 유동의 모델로 사용되고 있다<sup>(9)</sup>.

식 (10)의 마이크로채널 벽면의 새로운 경계조건으로부터 각 방향의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\Omega_\theta = -\frac{fh}{2\mu} f_1(\eta) \quad (11)$$

$$v_x = -\frac{f h^2}{2\mu} f_2(\eta) \quad (12)$$

$$\Omega_x = \frac{Rw}{h} f_3(\eta) \quad (13)$$

$$v_\theta = Rw f_4(\eta) \quad (14)$$

$$M = mh \quad (23)$$

$$\eta = \frac{y}{h} \quad (24)$$

$$\phi = \frac{\delta}{1+\delta} \quad (25)$$

여기서,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ 와  $f_4$ 는 다음과 같다.

$$f_1(\eta) = \frac{2}{2+\delta} \left[ A \frac{\sinh(M\eta)}{\sinh M} - \eta \right] \quad (15)$$

$$f_2(\eta) = \frac{2}{2+\delta} \left[ \{1-\eta^2 - \phi A \frac{\cosh M - \cosh(M\eta)}{M \sinh M}\} \right] \quad (16)$$

$$f_3(\eta) = \frac{(1-s)M}{2} \frac{\cosh(M) - A \cosh(M\eta)}{\phi A \sinh(M) - 2M \cosh(M)} \quad (17)$$

$$f_4(\eta) = \frac{1}{2} \left[ (1+s) + (1-s) \left\{ \eta - \phi A \frac{\eta \sinh(M) - \sinh(M\eta)}{\phi A \sinh(M) - 2M \cosh(M)} \right\} \right] \quad (18)$$

여기서,  $\delta$ 는 무차원 점성비로서 와점성계수( $x$ )와 유체가 갖는 절대점성계수( $\mu$ )의 비로 다음과 같이 정의된다.

$$\delta = \frac{x}{\mu} \quad (19)$$

또한,  $m$ 은 와점성계수와 회전 점성계수( $\gamma$ )의 조합으로 이루어졌으며,  $A$ 는 변수  $\xi$ 와 무차원 점성비  $\delta$ 를 포함하고 있는 변수이고,  $s$ 는 안쪽 면과 바깥 면의 회전속도의 비이며,  $\eta$ 와  $M$ ,  $\phi$ , 그리고  $f$ 는 각각 다음과 같이 정의된 변수들이다.

$$m = \sqrt{\frac{x(2\mu+x)}{\gamma(\mu+x)}} \quad (20)$$

$$A = 1 + \frac{(2+\delta)\xi}{2+\delta(2+\xi)} \quad (21)$$

$$f = \frac{dp}{dx} \quad (22)$$

$$s = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_{2,x}}{w_{1,x}} = \frac{w_{2,y}}{w_{1,y}} \quad (26)$$

### 3. 결과 및 고찰

본 연구에서 유도한 식의 검증을 위해 벽면 경계조건이 제로 조건이라는 가정 하에서 연구를 수행한 선행연구자<sup>(6)</sup>의 결과와 비교하였다. 여기서 제로 조건이라는 것은 본 연구에서 도입한 미세회전 경계변수  $\xi$ 값이 제로일 때를 의미하는 것으로 그 결과는 선행연구자의 결과와 잘 일치하였다.

식 (15)과 (16)의  $f_1$ 과  $f_2$ 은 채널의 주 유동성분인  $\Omega_\theta$ 와  $v_x$ 를 정규화 한 식을 나타내고 있으며 이렇게 구한 식을 Fig. 3과 Fig. 4에 도시하였다. 미세회전요소 성분인  $\Omega_\theta$ 를 나타내고 있는 Fig. 3에서 y축과 x축은 각각 채널 폭과  $\Omega_\theta$ 을 정규화 시킨 값을 나타내고 있으며, Fig. 4에서 x축은  $v_x$ 를 정규화 시킨 값을 나타내고 있다.  $\delta$ 값이 0일 때 미세회전요소  $\Omega_\theta$ 는  $\xi$ 값이 증가함에 따라 증가하는 경향을 보이고 있지만(Fig. 3), 속도성분  $v_x$ 은 변화가 없음을 알 수 있다(Fig. 4). 또한, 각 그

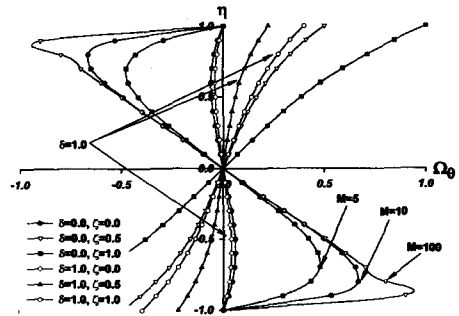


Fig. 3 Distribution of the microrotation component  $\Omega_\theta$ .

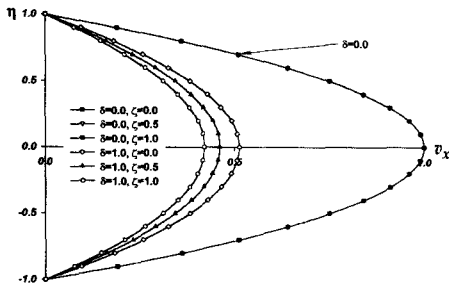


Fig. 4 Distribution of the velocity component  $v_x$ .

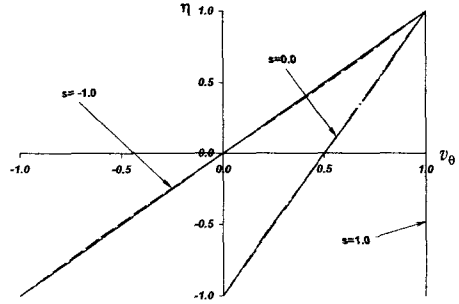


Fig. 7 Distribution of the velocity component  $v_\theta$ .

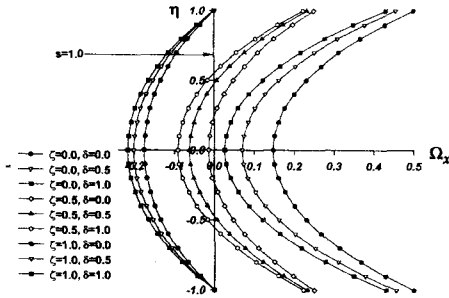


Fig. 5 Distribution of the microrotation component  $\Omega_x$  with  $s = -1.0$ .

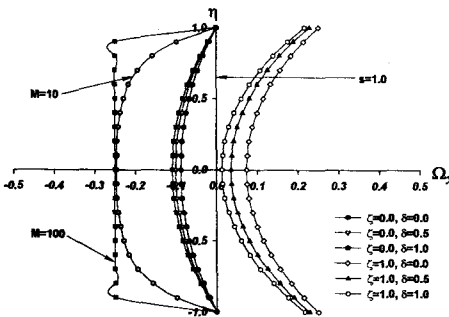


Fig. 6 Distribution of the microrotation component  $\Omega_x$  with  $s = 0.0$ .

림에서  $\delta$ 값이 1.0일 때를 살펴보면  $\xi$ 에 변화에 따른 미세 극성유체의  $x$ 방향 속도 크기 분포가  $\delta$ 값이 0일 때에 비해 작아지는 경향을 나타내었으며,  $\xi$ 가 증가함에 따라 속도 크기의 분포는 감소하는 경향을 나타내었는데, 이 때 미세 회전요소 분포를 살펴보면  $\delta$ 값이 0일 때에 비해 작아졌으며,  $\xi$ 가 증가함에 따라 그 크기는 속도 분포의 크기와는 달리 점차 증가하였다. 다음으로 점성계수의 조합으로 이루어진 변수  $M$ 값에 대한 영향을 살펴보면  $M$ 값이 증가할 수록 벽면에서의 미세 회전요소 ( $\Omega_\theta$ )의 영향이 증가함을 나타내고 있다. 여기서, 와점성계수 ( $\chi$ )가 0일 때  $\delta$ 값과  $M$ 값은 0이 되며 회전이 없는 뉴턴 유체를 나타내고,  $\xi$ 은 입자농도와 관련되며, 입자 농도가 감소할수록 채널내의 속도는 감소하였고, 회전성분은 증가함을 보이고 있다.

회전속도의 비  $s$ 가 -1.0,  $M$ 이 1.0일 때의  $x$ 방향 미세 회전요소  $\Omega_x$ 를 Fig. 5에 도시하였다.  $s$ 가 -1.0이라는 것은 안쪽 면과 바깥 면이 크기는 같고 방향이 반대인 각 속도로 회전하고 있음을 의미한다. 유로 중심에서  $x$ 방향의 미세 회전요소의 영향이 증가하고 있으며, 점성비  $\delta$ 값이 증가할수록 더욱 증가하는 경향을 나타내고 있다. 또한, 미세 회전 경계변수  $\xi$ 의 영향으로 그래프가 오른쪽으로 점차 이동하고 있다.  $\xi$ 값이 1.0에 가까워질수록 다시 말해, 입자 농도가 감소할 수록  $x$ 방향 미세 회전요소  $\Omega_x$ 의 변화에 점성비  $\delta$ 의 변화의 영향이 커지는 것을 알 수 있다.  $s$ 가 1.0일 때, 즉 안쪽 면과 바깥 면이 같은 속도로 회전할 때,  $x$ 방향의

미세 회전요소인  $\Omega_x$ 의 영향은 없어지게 되고,  $M$  값이 0일 때(와점성계수  $x$ 가 0)와 같은 결과를 보인다(Fig. 5, 6 참조). Fig. 6은 한 면만 회전하는 경우인  $s$ 가 0,  $M$ 이 1.0일 때의 미세 회전요소  $\Omega_x$ 의 분포를 나타내고 있으며,  $s$ 가 1.0일 때 비해 그 영향은 줄어들었지만 경향은 일치한다. 또한, 또 다른 점성계수의 비인  $M$ 값이 미세 회전요소  $\Omega_x$ 에 미치는 영향을 살펴보면,  $M$ 값이 증가할수록 유로 내의 미세 회전요소  $\Omega_x$ 의 영향이 더욱 증가하며, 유로 전체에 고르게 분포함을 알 수 있고, 결국에는 일정한 값에 도달함을 보이고 있다. Fig. 7은 각  $s$ 에 대해  $\theta$ 방향의 속도 성분  $v_\theta$ 의 분포를 나타내고 있다.  $v_x$ 의 경우에 비해  $\delta$ 와  $\zeta$ 에 대한 영향이 거의 없음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

벽면에서의 미세 회전성분에 대한 경계조건을 속도 구배 값에 일정한 비례관계를 가진다는 가정 하에 미세 극성 유체인론의 경계층 방정식을 이용하여 비압축성 정상상태, 층류 유동에 대한 해를 구하였다.

채널내의 주유동인  $v_x$ 와  $\Omega_\theta$ 의 경우  $\delta$ 값이 커질수록 속도성분과 미세 회전성분은 작아지는 경향을 나타내었다. 또한  $\zeta$ 값 증가는 채널내의 미세 회전성분의 증가를 가져왔으며,  $\delta$ 값이 0이 아닐 때  $\zeta$ 값이 증가하면 채널 내 속도성분이 점차 감소하는 경향을 나타내었다.  $\Omega_\theta$ 의 경우  $M$ 값에 의해,  $v_x$ 의 경우  $\delta$ 값에 의해 좌우됨을 알 수 있고, 뉴턴 유체( $x=0$ )의 경우인  $M$ ,  $\delta$ 이 0일 경우에 비해 속도성분은 줄어들었으며, Navier-Stokes 방정식으로는 표현할 수 없었던 채널 내의 미세 회전의 영향을 표현하였다.

$\Omega_x$ 의 경우  $\delta$ 값이 증가할수록 더욱 증가하는 경향을 보이고 있으며,  $\zeta$ 의 영향으로 그래프가 오른쪽으로 점차 이동하고,  $\zeta$ 값이 1.0에 가까워질수록 다시 말해, 입자 농도가 감소할수록  $\Omega_x$ 의 변화에  $\delta$ 의 변화의 영향이 커지는 것을 알 수 있다. 또한,  $M$ 값이 증가할수록 유로 내의  $\Omega_x$ 의 영향이 더욱 증가하며, 유로 전체에 고르게 분포하였다.  $v_\theta$ 의 경우,  $\delta$ 와  $\zeta$ 에 대한 영향이 거의 없고, 단지 회전

비인  $s$ 의 영향에 의해 다른 분포를 보이고 있다. 이 경우에 뉴턴유체와 비교하여 속도성분의 경우 차이가 거의 없었으며, 단지 채널 내의 미세 회전  $\Omega_x$ 의 영향을 알 수 있었다.

#### 후기

본 연구는 두뇌한국 21(BK 21)사업 핵심분야인 "고효율 차세대 에너지 기기 설계 사업팀"의 지원 하에 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Eringen, A. C., 1964, "Simple microfluids," Int. J. Engng. Sci., Vol. 2, pp. 205~217.
- (2) Eringen, A. C., 1966, "Theory of Micropolar Fluids," J. Math. Mech., Vol. 16, No.1, pp. 1~18.
- (3) Ariman, T., 1971, "On the Analysis of Blood Flow," J. Biomech., Vol. 4, pp. 185~192.
- (4) Nigam, K. M., Manohar, K. and Jaggi, J., 1982, "Micropolar Fluid Film Lubrication between Two Parallel Plates with Reference to Human Joints," Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, No. 11, pp. 661-671.
- (5) Papautsky, I., Brazzle, J., Ameel, T. and Frazier, A. B., 1999, "Laminar Fluid Behavior in Microchannels Using Micropolar Fluid Theory," Sensors and Actuators, Vol. A73, pp. 101~108.
- (6) Walicka, A., 2000, "Pressurized Flows of A Micropolar Fluid Between Surfaces of Revolution : The Fixed One and The Rotating One," Chemical and Processing Eng., Vol. 21, No 2.
- (7) Kim, Y.-J., 1999, "상사해법을 이용한 췌기형 물체 주위의 미세 극성유체 유동 특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집 B권, 제23권 제8호, pp. 969~977.
- (8) Walicka, A., 1994, "Micropolar Flow in A Slot between Rotating Surfaces of Revolution," TU Press, Zielona Góra.
- (9) Rees, D. A. S. and Bassom, A. P., 1996, "The Blasius Boundary-Layer Flow of Micropolar Fluid," Int. J. Engng. Sci., Vol. 34, No. 1, pp. 113~124.