

교육적 측면에서의 마찰계수와 누셀트 수

김 찬 중*

The Friction Coefficients and the Nusselt Number from an Educational Point of View

Charn-Jung Kim

Key Words: Moody friction coefficient (무디 마찰계수), Fanning friction coefficient (패닝 마찰계수), Nusselt number (누셀트 수), gradient thickness (구배두께), Chilton-Colburn analogy (칠턴-콜본 상사)

Abstract

In the present study, the friction coefficients (Fanning and Moody coefficients) and the Nusselt number is reviewed from an educational point of view. It is discussed that these dimensionless numbers can be treated with two length scales. Also, the similarity between the momentum and heat transfer is discussed based on the length scales.

1. 서 론

대부분의 열유체분야에서의 교과서에서는 마찰계수와 누셀트 수가 유체의 유동과 열전달과 관련하여 다루어진다. 그러나, 이들 무차원 수의 물리적인 개념을 쉽게 파악하기 위해서는 길이스케일로서 이해하는 것이 훨씬 편리하다^[1]. 본 연구에서는 교육적인 측면에서 마찰계수와 누셀트 수를 재조명하기로 한다. 그리고 전통적으로 사용되어온 열전달계수 뿐만 아니라 구배두께를 이해하는 것이 교육적으로 보다 합리적이라는 토의를 하기로 한다.

2. 마찰계수

유체역학과 관련된 대부분의 교과서에서, 압력 구배가 없고 균일유동이 흐르는 평판위에서 발달하는 유체유동에 대해서 평균마찰계수가

$$\overline{C_f} = \frac{\overline{\tau_w}}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \quad (1)$$

으로 정의된다. 여기서 u_∞ 는 자유흐름의 속도이다. 그러나, 유체역학을 처음 배우는 학생에게는 $\overline{C_f} = 0.001$ 라고 말할 때, 마찰의 크기가 어느 정도인지를 설명하는 것이 쉽지는 않다. 본 연구에서는 Fig. 1에 보인 바와 같이 마찰계수를 평판위를 미끄러지는 고체주사위를 이용하여 설명하는 방법을 택하기로 한다.

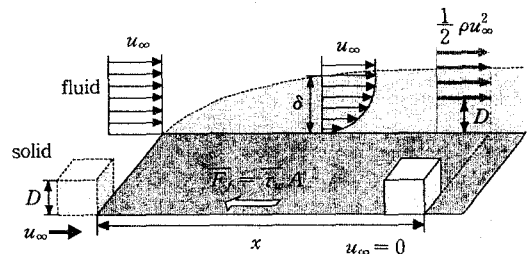


Fig. 1 A solid cube sliding over a flat plate and a velocity boundary layer developing on the plate.

* 서울대학교, 기계항공공학부

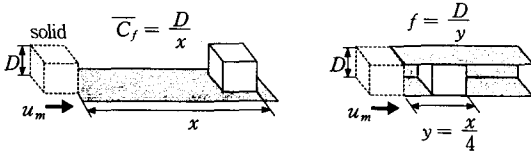


Fig. 2 Solid cubes sliding over a plate and a duct

초기속도 u_m 인 주사위는 마찰에 의해 결국 정지하게 될 것이고, 정지거리는 에너지균형으로부터 다음과 같이 결정된다.

$$x = \frac{\frac{1}{2} m u_m^2}{\overline{F}_f} \quad (2)$$

위에서 m 은 주사위의 질량이고 \overline{F}_f 는 평균마찰력이다. 여기서 $m = \rho D^3$ 과 $\overline{F}_f = \overline{\tau_w} D^2$ 을 윗식에 대입하면

$$\overline{C}_f \equiv \frac{D}{x} = \frac{\overline{\tau_w}}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} \quad (3)$$

을 얻는다. 윗식은 평균마찰계수가 두 개의 길이 스케일 D 와 x 로 나타낼 수 있다는 것을 설명한다. 그러므로, 위의 표현을 이용하면 마찰특성이 $\overline{C}_f = 0.001$ 로 주어진 평판에서는 1cm크기의 주사위가 결국 10m를 미끄러진다는 것을 쉽게 설명할 수 있으며 이러한 방법으로 마찰계수의 물리적인 의미를 훨씬 이해하기 쉽게 이해하도록 설명할 수 있다.

다음으로, Fig.2의 경우처럼 평판을 접어서 사각덕트를 만들어 크기 D 인 주사위가 사각덕트 내부를 미끄러지도록 만든 경우를 생각해본다. 이 경우, 정지거리는 평판의 경우에 비해서 4분의 1로 줄어들 것이다. 다시 말해서, $y = x/4$ 가 된다. 이것은 주사위가 평판에 비해 사각덕트에서는 네 면에 접하기 때문이다. 따라서, 덕트에 대한 마찰계수는

$$f \equiv \frac{D}{y} \quad (4)$$

으로 쓸 수 있다[식 (3)과 비교해보라]. 위에서, y 는 크기가 D 인 사각덕트의 내부에서 주사위가 미끄러지는 정지거리이다. 식 (3)과 (4)를 비교

하면 $y = x/4$ 이므로 다음과 같게 된다.

$$f = 4\overline{C}_f \quad (5)$$

위의 접근방법은 유체유동의 경우에도 바로 적용가능하다. 예를 들어, 완전발달된 덕트유동의 경우, 평균마찰과 국소마찰은 차이가 없으므로 식 (5)는

$$f = 4C_f \quad (6)$$

가 된다. 이것은 바로 무디 마찰계수 f 와 패닝 마찰계수 C_f 사이의 잘 알려진 관계이다.

다시, 무디 마찰계수 f 는 아래와 같이 재해석될 수 있다. 덕트내부에서 고체주사위의 운동을 유지시키기 위해서는 마찰에 상응하는 힘이 계속 가해져야하는데 보통 이 힘은 압력차에 의해 주어진다. 덕트내부에서 D 만큼의 거리에서 나타나는 압력차는

$$(\Delta p)_D = 4\tau_w \quad (7)$$

으로 되어야 한다(위에서, 상수 4는 덕트의 네 면과 접하기 때문에 나타나는 것이다). 여기서, 윗식의 양변을 $\frac{1}{2} \rho u_m^2$ 으로 나누면

$$f = 4C_f = \frac{(\Delta p)_D}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = \frac{D}{L} \frac{(\Delta p)_L}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$

또는

$$(\Delta p)_L = \frac{L}{D} f \frac{1}{2} \rho u_m^2 \quad (8)$$

을 얻는다. 마찬가지로, 어떤 덕트에서 마찰계수가 $f = 0.01$ 이라고 할 때, 마찰의 크기를 쉽게 파악할 수 있는 방법은 덕트크기의 주사위가 $100D$ 만큼 미끄러지고 정지하게 된다는 사실을 이용하는 것이다. 물론 이러한 방법은 초보자에게 매우 유용할 것이다. 사실, 식 (7)의 유도는 역학적인 관점에서 모멘텀균형

$$(\Delta p)_L A = \tau_w P L \quad (9)$$

을 이용하는 것이다. 여기서 수력지름 $D = \frac{4A}{P}$; 덕트면적 A ; 덕트둘레 P 이다. 식 (8)은 주사위를 이용하여 구한 식 (9)와 정확히 일치한다.

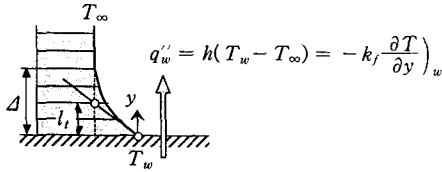


Fig. 3 Definition of the temperature gradient thickness

3. 누셀트 수

열전달을 다루는 대부분의 교과서에서, 누셀트 수는

$$Nu_L = \frac{hL}{k} \quad (10)$$

와 같이 정의된다. 이때, Fig. 3을 참고하여 구배 두께 l_t 를 다음과 같이 정의하기로 한다. 먼저, 고체벽면에서 온도분포의 접선을 그린다. 그리고 온도경계층의 경계에서 직선을 그리고 두 선이 만나는 점에서 벽까지의 거리를 구배두께 l_t 이라고 정의한다. 이와 같이 정의된 구배두께를 이용하면 벽면에서의 열전달은

$$q''_w = k \frac{T_w - T_\infty}{l_t} \quad (11)$$

으로 결정된다. 다음으로 열전달계수 h 를 이용하면

$$q''_w = h(T_w - T_\infty) \quad (12)$$

이므로, 누셀트 수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Nu_L = \frac{hL}{k} = \frac{L}{l_t} \quad (13)$$

이러한 접근방법은 화학공학자들에 의해 흔히 채택되어 왔다(그들은 두께 l_t 을 등가필름두께로 불렀다)^[2].

본 연구에서는, 누셀트 수를 두 개의 길이스케일로 표현하는 방법이 국소적인 열적상황을 나타내는데 유용하다는 점을 강조할 것이다. 누셀트 수를 $Nu_L = \frac{hL}{k}$ 로 정의하고 사용하는 경우에는

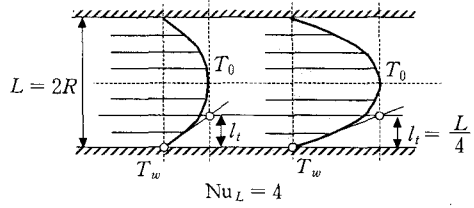


Fig. 4 Sketch of the temperature profile with the aid of the Nusselt number, $Nu_L = \frac{L}{l_t} = 4$

단지 열전달량을 $q''_w = h(T_w - T_\infty)$ 으로부터 결정할 수 있다는 것 이외에는 그다지 큰 도움을 주지 않는다.

반면에, $Nu_L = \frac{L}{l_t}$ 로 정의되는 누셀트 수는 열전달의 두 가지 측면을 동시에 설명해준다. 첫째로, 열전달량은 단순히

$$q''_w = k \frac{T_w - T_\infty}{l_t} \quad (14)$$

으로부터 결정된다(구배두께 l_t 은 이미 알고 있는 누셀트 수로부터 주어진다). 둘째로, 벽면에서 온도분포의 기울기가 알려져 있으므로 온도분포를 개략적으로 그리는 것이 가능하다. 이러한 점을 Fig. 4에 잘 설명되어 있다.

Fig. 4에 보인 원형덕트에서는 누셀트 수가 $Nu_L = 4$ 로 주어져 있고, 온도차 $T_w - T_0$ 가 열전달량을 계산하는데 사용된다고 한다. 다시 말해서, 열전달량은 $q''_w = h(T_w - T_0)$ 으로 된다. 이

경우, $Nu_L = \frac{L}{l_t} = 4$ 인 표현으로부터 벽면근처에서의 온도기울기가 Fig. 4에 보인 것처럼 나타나는 것을 알 수 있다. 그러나, 어떤 교과서에서는 조금은 애매모호한 표현으로 누셀트 수를 이해하기 어렵게 한다; “누셀트 수는 전도열전달에 대한 대류열전달의 비”라고 표현하는 경우이다.

이러한 표현을 잘못 이해하면 Fig. 4에 보인 경우, 유체가 정지할 때 일어나는 전도열전달에 비해 유체의 유동으로 인한 열전달이 4배가 되는 것으로 잘못 설명하게 된다.

미분방정식의 관점에서 보면, 누셀트 수는

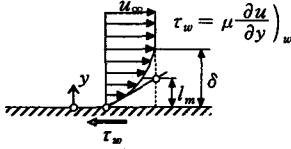


Fig. 5 Definition of the velocity gradient thickness

$$Nu_L = \frac{hL}{k} = \frac{L}{l_t} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (15)$$

와 같이 무차원온도구배로 표현되기도 한다. 위에서

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, \quad y^* = \frac{y}{L} \quad (16)$$

4. 레이놀즈 수

벽면에서의 열전달과 마찬가지로, 평판위에서 발달하는 속도경계층에 대해서도 같은 과정을 반복할 수 있다. 다시 말해서, Fig. 5에 보인 것처럼, 속도구배두께 l_m 을 온도구배두께 l_t 와 같은 방법으로 정의하면 벽면에서의 전단응력은

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{u_\infty}{l_m} \quad (17)$$

으로 되고, 마찰계수는

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \frac{\mu \frac{u_\infty}{l_m}}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \quad (18)$$

즉

$$\frac{C_f}{2} Re_L = \frac{L}{l_m}$$

으로 된다. 위에서, L 은 유동에 관련된 특성길이이다. 또한, 뒷식은 무차원속도구배와 다음과 같이 관련되는 것을 쉽게 보일 수 있다.

$$\frac{C_f}{2} Re_L = \frac{L}{l_m} = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (19)$$

위에서, $y^* = y/L$, $u^* = u/u_\infty$.

5. 칠턴-콜본 상사

식 (19)를 (13)으로 나누면

$$\frac{C_f}{2} \frac{Re_L}{Nu_L} = \frac{l_t}{l_m} = \frac{\partial u^*/\partial y^*}{\partial T^*/\partial y^*} \quad (20)$$

으로 되고, 압력구배가 없이 평판위에서 발달하는 유동에서 $Pr = 1$ 인 경우에는 온도와 속도분포가 무차원의 관점에서 동일하므로, 다음의 잘 알려진 레이놀즈 상사

$$\frac{C_f}{2} \frac{Re_L}{Nu_L} = 1 \quad (21)$$

가 얻어진다. 그러나, 뒷식은 구배두께의 관점에서 식 (20)에서 단지 $l_m = l_t$ 인 사실에 대응한다. 적당한 크기의 프란틀 수 $Pr \geq 1$ 에 대해서는, 다음의 관계

$$\frac{l_t}{l_m} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim Pr^{-1/3} \quad (22)$$

가 성립하므로, 식 (20)과 (22)를 결합하면 칠턴-콜본 상사

$$Nu_L = \frac{C_f}{2} Re_L Pr^{1/3} \quad \text{or} \quad \frac{C_f}{2} = St Pr^{2/3}$$

를 얻게 된다. 위에서 St 는 스탠턴 수이다. 프란틀 수가 $Pr \ll 1$ 인 액체금속에 대해서는

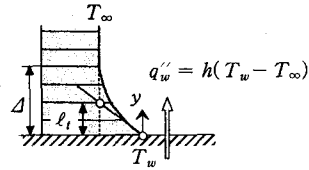
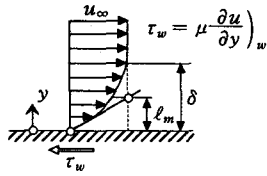
$$\frac{l_t}{l_m} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim Pr^{-1/2}$$

또는

$$\frac{C_f}{2} = c St Pr^{1/2} \quad (Pr \ll 1)$$

으로 된다. 위에서 상수 c 는 10의 어림크기를 가진다^[3]. 지금까지, 우리는 두 개의 중요한 구배두께 l_m 과 l_t 에 기초하여 논의를 하였다. Table 1에는 두 개의 길이스케일을 이용하여 모멘텀경계층과 열경계층 사이의 유사구조를 비교하였다. 특히, 상사함수 $\frac{u}{u_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ 가 두 개의 길이스케일을 이용하여 벽면에서의 기울기 $f'(0) = \frac{\delta}{l_m}$ 가 되는 점은 매우 흥미있다.

Table 1 Analogy between momentum transfer and heat transfer



velocity boundary layer thickness
velocity gradient thickness l_m

temperature boundary layer thickness
temperature gradient thickness l_t

$$\frac{C_f}{2} \text{Re}_L = \frac{L}{l_m} = \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$$

$$\text{Nu}_L = \frac{hL}{k} = \frac{L}{l_t} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*}$$

$$\tau_w = \mu \frac{u_\infty}{l_m}$$

$$q''_w = k_f \frac{T_w - T_\infty}{l_t}$$

$$f'(0) = \frac{\delta}{l_m}, \quad \frac{u}{u_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$g'(0) = \frac{\Delta}{l_t}, \quad \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = g\left(\frac{y}{\Delta}\right)$$

6. 구배두께와 열전달계수

대류열전달을 표현할 때 중요하게 사용되는 열전달계수 h 는

$$q''_w = h(T_w - T_\infty), \quad \text{Nu}_L = \frac{hL}{k} \quad (23)$$

으로 결합되어 해석된다. 그러나, 구배두께를 사용하여도 윗식과 동일하게

$$q''_w = k \frac{T_w - T_\infty}{l_t}, \quad \text{Nu}_L = \frac{L}{l_t} \quad (24)$$

으로 처리하여도 열전달률을 결정하는 데에는 차이가 나지 않는다. 그러나, 식 (24)는 앞에서 설명한 바와 같이 교육적으로 보다 유용하다. 예를 들어 Table 2에서 열전달계수 h 를 이용하여 현상을 나타낼 때는 값들의 차이가 매우 크게 나타나지만 구배두께 l_t 를 사용할 때는 그 차이가 훨씬 작게 나타난다. 이러한 이유는 열전달계수에서 나타나는 값의 차이는 실제로 열전도율 k 의 차이에서 기인하기 때문이다.

참고문헌

Table 2 Comparison between the heat transfer coefficient and the gradient thickness

조건		h [W/m ² · K]	l_t [mm]
자연대류	공기	5~12	2.5~6
	물	100~1200	0.5~6
강제대류	공기	10~300	0.1~3
	물	300~12000	0.05~2

- (1) 김찬중, 길잡이 열전달의 기초, 문운당, 2001.
- (2) Eckert, E. R. G. and Drake, Jr., R. M., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1972.
- (3) Bejan, A., Convection Heat Transfer, 2nd ed., John Wiley, 1984.