

엄밀한 동적 요소를 이용한 유한 요소 동적 모델의 개선

조용주* · 김종욱** · 홍성욱***

Improvement of the finite element dynamic model by using exact dynamic elements

Yong-Ju Cho, Jong-Wook Kim and Seong-Wook Hong

Key Words: Finite elements(유한 요소), Exact dynamic elements(엄밀한 동적 요소), Interpolation function(보간 함수), Discretization(이산화), Laplace variable(라플라스 변수)

Abstract

To improve the modeling accuracy for the finite element method, this paper proposes a method to make a combined use of finite elements and exact dynamic elements. Exact interpolation functions for a Timoshenko beam element are derived and compared with interpolation functions of the finite element method (FEM). The exact interpolation functions are tested with the Laplace variable varied. The exact interpolation functions are used to gain more accurate mode shape functions for the finite element method. This paper also presents a combined use of finite elements and exact dynamic elements in design problems. A Timoshenko frame with tapered sections is tested to demonstrate the design procedure with the proposed method.

1. 서 론

컴퓨터의 비약적인 발전에 힘입어 구조물에 대한 시뮬레이션이 보편화되었으며 특히, 유한 요소법은 가장 널리 사용되는 도구가 되었다. 그러나 유한 요소법을 비롯한 대부분의 이산화 방법들에 의한 동적 해석에서는 오차를 수반하게 되며 그 오차의 정도를 정량적으로 평가하는 것은 매우 어렵고 해석의 정확도가 메쉬의 형성에 크게 의존하게 되는 것으로 알려져 있다. 한편, 최근에는 엄밀한 동적 요소 행렬을 이용하는 방법이 제안되었으며 유한 요소 방법이 갖는 문제점을 개선할 수 있는 방법으로 기대를 모으고 있다⁽¹⁻³⁾. 이 방법은 균일한 부분을 한 개의 요소로 모델링하여도

엄밀한 해를 제공할 뿐만 아니라 메쉬에 따른 차이가 없기 때문에 모델링이 매우 편리하다. 그러나 요소 내에 초월함수를 포함하게 되므로 요소의 수가 너무 많아지면 수치 계산 과정이 길어지고, 특이한 형상을 갖는 요소에 대해서는 아직 요소 행렬이 얻어지지 않았다는 문제점이 있다. 따라서 형상이 복잡한 경우에 대한 적용에는 한계가 있게 된다.

본 연구에서는 보요소의 횡진동 모델을 중심으로 유한 요소 방법이 갖는 특성을 평가하고 단점을 보완하기 위해 엄밀한 동적 요소 방법을 활용하는 방법을 제안하였다. 이를 위해 엄밀한 동적 요소로부터 엄밀한 보간함수를 유도하고, 유한 요소에서의 보간함수와 비교하였다. 또한 이 결과를 근거로 하여 유한요소법에서 보다 정확한 모드형을 얻어내기 위해 엄밀한 보간함수를 활용하는 통합적인 방법을 제안하였다.

다음으로 엄밀한 동적 요소와 유한 요소를 함께 활용하는 모델링 방법을 제시하였다. 즉, 형상이 복잡한 부분을 유한 요소로 모델링하고 균일한 형

금오공과대학교 대학원

** 탐엔지니어링(주)

*** 금오공과대학교 기계공학부

상을 갖는 부분은 엄밀한 동적 요소를 이용하여 모델링한 후 통합하여 해석하는 방법을 제시하였다. 수치예제를 통해 유한 요소법의 개선을 위해 엄밀한 동적 요소 모델이 유용하게 사용될 수 있음을 보였다.

2. 보요소에서의 보간 함수

2.1. 유한 요소법에서의 보간함수

티모센코 보 요소에 대한 유한 요소 행렬(finite element matrix)을 유도하기 위한 보간함수를 먼저 검토해 보도록 한다. 횡변위 $u(x, t)$ 와 회전변위 $\phi(x, t)$ 는 가중 합 관계를 사용하여 절점에서의 변위 q_i 의 항들로 다음과 같이 표현된다⁽⁴⁾.

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x)q_i(t), \quad (1-1)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_{4+i}(x)q_i(t) \quad (1-2)$$

여기서 $N_i(x)$ 는 요소의 경계조건을 만족하는 임의의 보간함수이다. 이러한 보간함수의 평가는 보정적 처짐에 관한 표현을 이용하여 유도할 수 있으며 다음과 같다⁽⁴⁾.

$$N_1 = \frac{1}{(1+\gamma)}(1 + \gamma - \gamma g_e - 3g_e^2 + 2g_e^3),$$

$$N_2 = \frac{\ell}{2(1+\gamma)}(2g_e + \gamma g_e - 4g_e^2 - \gamma g_e^2 + 2g_e^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{(1+\gamma)}(\gamma g_e + 3g_e^2 - 2g_e^3),$$

$$N_4 = \frac{\ell}{2(1+\gamma)}(-\gamma g_e - 2g_e^2 + \gamma g_e^2 + 2g_e^3)$$

$$N_5 = \frac{1}{\ell(1+\gamma)}(-6g_e + 6g_e^2),$$

$$N_6 = \frac{1}{(1+\gamma)}(1 + \gamma - 4g_e - \gamma g_e + 3g_e^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{\ell(1+\gamma)}(6g_e - 6g_e^2),$$

$$N_8 = \frac{1}{(1+\gamma)}(-2g_e + \gamma g_e + 3g_e^2)$$

여기서 $\gamma = \frac{12EI_d}{kGA\ell^2}$, $g_e = \frac{x}{\ell}$ 이다. 또, ρ, G, E

는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영률(Young's modulus)을 의미하며, A 는 단면적, k 는 단면 형상 보정계수(shape factor), I_d 는 단면 관성 모멘트(area moment of inertia)를 의미한다.

2.2. 엄밀한 동적 요소 방법에서의 보간함수
Timoshenko 보의 운동방정식을 시간에 관한 라플

라스 변환 후 보의 종축 좌표(x)에 대한 상태공간 형식으로 쓰면 다음과 같다⁽²⁾.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = B\Psi \quad (2)$$

여기서

$$\Psi = \begin{Bmatrix} u^* \\ \phi^* \\ f^* \\ m^* \end{Bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a = \rho I_d s^2, b = \frac{1}{EI_d}, c = \rho A s^2, d = \frac{1}{kAG}.$$

여기서, u, ϕ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고 f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 그리고 s 는 시간에 관한 라플라스 변수이며 상첨자 *는 해당 변수의 라플라스 변환 결과식을 의미한다.

식(2)를 공간 좌표 x에 관하여 라플라스 변환한 후 관련식을 정리하고 이를 다시 라플라스 역변환한 후 그 결과식을 Fig. 1과 같은 경계치의 값을 부가한 후, 식을 재배치하면 다음 식을 얻을 수 있다⁽²⁾.

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f^*(\xi) \\ m^*(\xi) \end{Bmatrix} = d(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$d(s, \xi) = \begin{bmatrix} d_{11}(s, \xi) & d_{12}(s, \xi) \\ d_{21}(s, \xi) & d_{22}(s, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(s, \xi) & d_2(s, \xi) & d_4(s, \xi) & d_5(s, \xi) \\ d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) & -d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) \\ d_4(s, \xi) & -d_5(s, \xi) & d_1(s, \xi) & -d_2(s, \xi) \\ d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) & -d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) \end{bmatrix}$$

여기서, $d_{ij}(s, \xi)$ 는 각각 2x2의 부분 행렬이다. 행렬의 각 요소는 부록에 주어진 바와 같다.

따라서 임의의 균일한 유한 길이 보 요소에 대해 다음과 같은 방정식을 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f_2^* \\ m_2^* \end{Bmatrix} = d(s, \ell) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u_2^* \\ \phi_2^* \end{Bmatrix} \quad (4)$$

식(3)과 (4)를 조합하고 힘과 모멘트에 관련된 항을 소거하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} = N(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u_2^* \\ \phi_2^* \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서,

$$N^*(s, \xi) = \begin{bmatrix} N_1^*(s, \xi) & N_2^*(s, \xi) & N_3^*(s, \xi) & N_4^*(s, \xi) \\ N_5^*(s, \xi) & N_6^*(s, \xi) & N_7^*(s, \xi) & N_8^*(s, \xi) \end{bmatrix} \\ = d_{12}^{-1}(s, \xi) [\{ d_{11}(s, \ell) - d_{11}(s, \xi) \} \quad d_{12}(s, \ell)]$$

또는

$$u^*(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i^*(\xi) q_i^* \quad (6-1)$$

$$\phi^*(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_{4+i}^*(\xi) q_i^* \quad (6-2)$$

따라서 요소의 두 절점에서의 값이 주어지면 임의의 위치에서의 변위를 엄밀하게 구할 수 있다. 결국 식(1-1), (1-2)와 비교해보면 $N_i^*(s, \xi)$ 는 유한 요소법에서 사용되는 보간함수에 대응되며, 유한 요소법에서 사용되는 보간함수가 공간좌표만의 함수인 것과는 달리 여기서 얻어지는 보간함수는 공간좌표와 시간에 대한 라플라스 변수 s 의 함수이다.

3. 엄밀한 보간함수를 이용한 모드형상 개선

3.1 엄밀한 보간함수와 유한요소 보간함수의 비교
먼저 엄밀한 동적 요소 행렬에 대해 얻어진 보간함수와 유한 요소법에서 사용되는 보간함수를 비교하였다. 여기서 사용된 보의 사양은 Table 1에 주어진 바와 같다. 동적 특성 비교를 위해 요소의 길이와 단면은 일정하게 유지하였으며 s 를

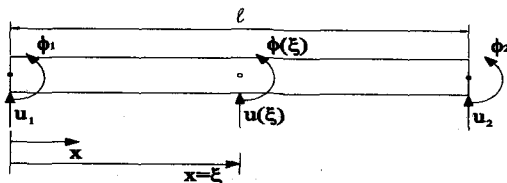


Fig. 1 A uniform beam and the sign conventions.

Table 1 Specifications of numerical model 1

Property	Data
Length, m	0.25
Thickness, m	0.025
Width, m	0.025
Young's modulus, GN/m^2	200
Poisson's ratio (ν)	0.3
Shear coefficient (k)	$10(1+\nu)/(12+11\nu)$
Density, kg/m^3	8000

변화시키면서 보간함수를 비교하였다. Fig. 2는 보 요소에 대해 유한요소의 보간 함수와 식(5)와 같이 얻어진 엄밀한 보간함수에 대해 주파수를 증가시키면서 주요 4개 보간함수의 변화를 나타낸 것이다. 조건을 일정하게 유지하기 위해 요소의 첫 번째 고유진동수의 $1/2(993.6 \text{ Hz})$ 까지 증가시키면서 변화를 관찰하였다. 그림에서 화살표 방향은 주파수의 증가에 따른 변화를 지시하고 있다. $\omega=0$ 에서 유한요소 보간함수와 일치하던 엄밀한 보간함수가 주파수의 증가에 따라 모두에서 많은 변화가 나타나고 있다. 이와 같은 변화는 궁극적으로 오차의 증가를 의미하게 된다. 일반적으로 주파수의 증가에 따라 오차가 급격히 증가하며, 주파수가 요소의 고유진동수와 일치하면 무한히 큰 오차를 발생시키게 된다.

요소 내부에 감쇠가 포함된 경우, 감쇠에 의해 야기되는 성분에 의해 라플라스 변수에서 σ 의 변화에 대해서도 주파수와 마찬가지로 보간함수를 변화시킬 수 있다. Fig. 3은 보간함수가 σ 값의 변화에 대해 변화하는 양상을 보여주고 있다. 그림에서는 $\sigma=0 \sim -1000$ 의 범위에서 살펴본 것이다. 주파수에 의한 특성파는 달리 실수부의 영향은 거의 없고, 허수부의 효과가 점차로 커짐을 알 수 있다.

3.2 엄밀한 보간함수를 이용한 모드형상의 개선

유한 요소법에서 모드형상을 구현하기 위해서는 절점에서의 값과 보간함수를 이용한다. 그러나 이미 확인한 바와 같이 엄밀한 보간함수는 라플라스 변수의 실수값과 허수값에 따라 차이가 발생하게 된다. 여기서는 유한요소법에 의해 얻어진 고유치와 고유벡터의 후처리 과정에서 엄밀한 동적 요소에서 얻어진 보간함수를 이용하여 보다 정확한 모

드 형상을 얻어내는 방법을 제안하고자 한다. 여기서 다루어진 예제는 Fig. 4와 같이 양단이 고정된 보이며 보의 사양은 Table 1에 주어진 바와 같다.

Table 2에는 8개의 요소로 나눈 경우의 유한요소 방법과 엄밀한 동적 요소방법에 의해 얻어진 고유진동수를 비교해서 보여주고 있다. 전체적으로 유한요소법에 의한 결과가 높게 평가되고 있으며 특히 8번째 모드에서는 매우 큰 차이를 보이고 있으며 그 이상의 모드는 예측치로서 의미가 없다. Fig. 5에는 엄밀한 모드형상과 유한요소법에 의한 모드형상 그리고 유한요소법에 의해 얻어진 모드 벡터와 엄밀한 보간함수를 이용하여 그려낸 모드 형상을 비교하고 있다. 저차모드에서 비교적 잘 일치하던 모드형상이 고차모드에서는 차이를 보이고 있다. 특히 유한요소법에 의해 얻어진 모드형상은 고차모드에서 상당한 차이를 나타내고 있다. 반면에 유한요소법과 엄밀한 보간함수를 이용한 모드형상은 매우 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

4. 엄밀한 동적 요소와 유한 요소를 이용한 복합적 모델링

Fig. 6(a)는 본 예제에서 고려한 프레임 구조물이다. 1개의 상단보(span)를 2개의 기둥(pillar)으로 지

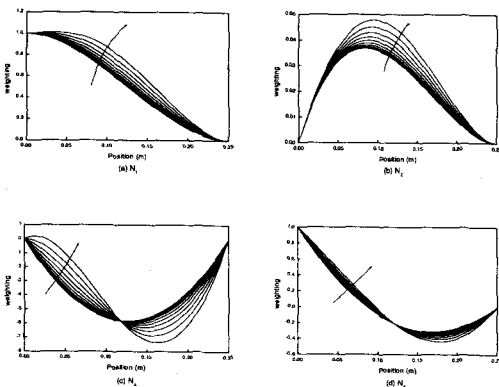


Fig. 2 Variation of shape functions with changing the frequency.

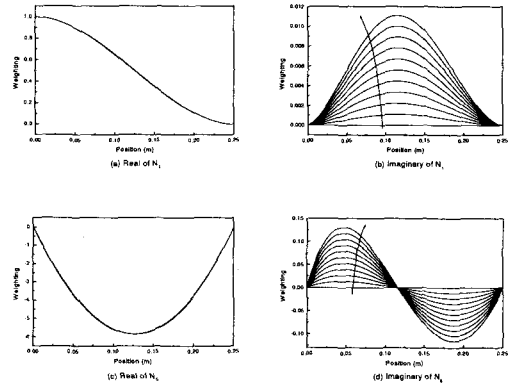


Fig. 3 Variation of shape functions with changing the real part of s

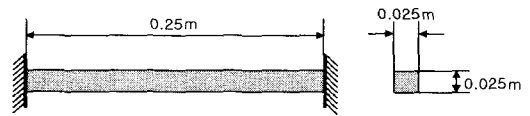


Fig. 4 Numerical model 2

Table 2 Natural frequencies of numerical model 2

Mode #	Natural frequency(rad/s)	
	FEM	Exact
1	12131.165	12121.475
2	31254.974	31094.516
3	57179.990	56250.625
4	88657.826	85480.915
5	125378.351	117457.691
6	166881.102	151296.023
7	209336.743	186417.470
8	341185.243	222426.327

지하는 형태의 프레임 구조물로서 구조물의 하단은 테이퍼가 있는 보 형상의 기둥이다. 이와 같은 구조물에 대해 보의 길이 변화에 따른 고유진동수를 조사하는 문제를 고려하였다. 여기서, 기둥부분은 테이퍼 형상이므로 엄밀한 동적 요소로 모델링하게 되면 계산오차가 커질 가능성이 있어 유한요소로 모델링하였다. 그러나 상단보의 길이를 변경시켜야 하므로 유한 요소를 이용할 경우 변경에 따른 요소 재생성 및 이에 따른 계산 오차 등이 발생할 수 있다. 따라서 상단보 부분은 엄밀한 동적 요소를 이용하였다. 고려한 프레임 구조물은

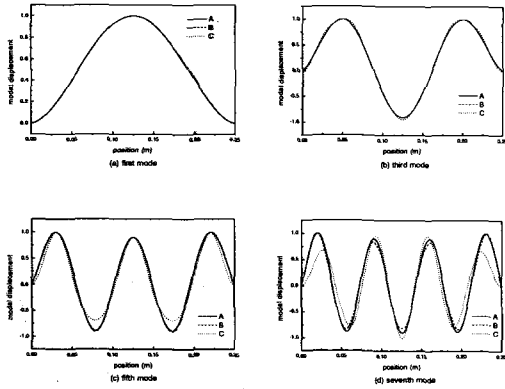


Fig. 5 Comparison of mode shapes synthesized by EDEM(A), FEM+EDEM(B) and FEM(C)

Fig. 6(b)와 같이 요소를 나누어 고려하였다. 보 부분을 엄밀한 동적 요소를 이용함으로써 보의 길이가 변하더라도 모델링을 다시 할 필요가 없으므로 아주 효과적이다. 이와 같이 객체지향적인 모델링이 가능하기 때문에 특히 형상설계문제에 아주 유용하다.

Fig. 7은 보의 길이 변화에 따른 아래 고유진동수 6개를 보여주고 있다. 가로지르는 두 개의 선(■로 표시)은 종진동이 주가 되는 모드의 고유진동수이고 나머지 네 개의 그래프는 횡진동이 주가 되는 고유진동수이다. 횡방향의 고유진동수가 종방향의 고유진동수보다 길이 변화에 의한 영향을 더 받는 것을 알 수 있다. 이것은 프레임 구조물에서 보의 길이가 짧아질수록 상대적으로 종진동의 영향이 커져 가는 것을 보여준다.

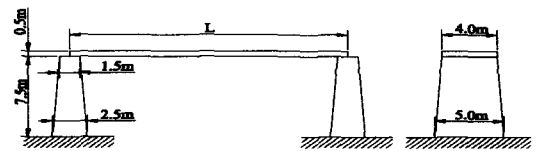
5. 결론

본 연구에서는 엄밀한 동적 요소를 이용하여 유한 요소 모델을 보완하는 두 가지 방법을 제안하였다. 유한 요소법에서 사용되는 정적 변형 함수를 보간함수를 대체할 수 있는 엄밀한 보간함수를 유도하여 정적 보간함수와 비교하였다. 이 결과를 근거로 유한요소법에서 모드형상을 개선할 수 있는 방법을 제안하였고 검증하였다. 또한 유한 요소법을 이용한 해석에 어려움이 있는 형상 설계문제에 엄밀한 동적 요소와 유한 요소를 동시에 활용하는 방법을 제안하였으며 프레임 형태의 구조물 설계

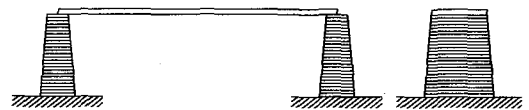
에 활용하는 예를 제시하였다. 예제를 통해 제안된 방법이 실용적으로 활용될 수 있음을 확인하였다.

Table 2 Specifications of numerical model 3.

Property		Data
pillar (tapered)	Length	7.5 m
	Thickness	top:1.5 m, bottom:2.5 m
	Width	top:4.0 m, bottom:5.0 m
span	Length	L m
	Thickness	0.5 m
	Width	4.0 m
Young's modulus		200 GN/m ²
Poisson ratio(ν)		0.3
Shear coefficient(k)		$10(1+\nu)/(12+11\nu)$
Density		8000 kg/m ³



(a) single span system.



(b) mesh

Fig. 6 Numerical model 3.

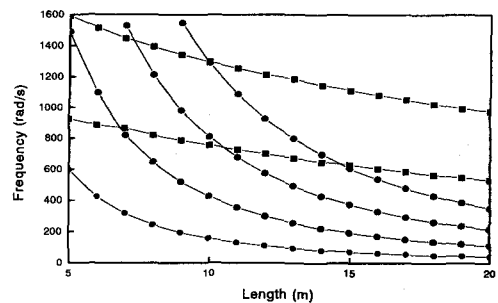


Fig. 7 First six natural frequencies with changing the length of span.

후기

이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2000-041-E00062)

참고문헌

- (1) 홍성욱, 김종욱, 박종혁, 1998, "감쇠가 있는 일 반적인 보 구조물을 위한 엄밀한 모드 해석," 한국정밀공학회지, 제15권 제12호, pp.202-211.
- (2) Hong, S.W. and Kim, J.W., 1999, "Modal analysis of multi-span Timoshenko beams connencted or supported by resilient joints with damping," Journal of Sound and Vibration, Vol.227, No.4, pp.787-806.
- (3) 김종욱, 홍성욱, 1999, "엄밀한 동적 요소를 이 용한 프레임 구조물의 모델링 및 모드 해석," 한국소음진동공학회지, 제9권 제5호, 1999, pp. 966-974.
- (4) Hashish, E. and Sanker, T.S., 1984, "Finite element and modal analyses of rotor bearing systems under stochastic loading conditions," Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol.106, pp.890-898.

부록: 요소 행렬

식(1)과 (2)를 요소에 관한 위치에너지와 운동에너 지 식에 각각 대입하여 요소의 길이에 대한 적분 을 수행하고, 라그랑쥐 방정식을 적용하면 아래와 같은 유한 요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{m}_t + \mathbf{m}_r) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (\text{A1})$$

여기 첨자 t, r 은 각각 병진운동과 회전운동을 의미한다. 모든 요소 행렬은 대칭이고 아래와 같다⁽⁴⁾.

$$\mathbf{m}_t = \frac{\rho A \ell}{420(1+\gamma)^2} \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ a_2 & a_5 & & & \\ a_3 & -a_4 & a_1 & & \\ a_4 & a_6 & -a_2 & a_5 & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_r = \frac{\rho I_d}{30 \ell (1+\gamma)^2} \begin{bmatrix} 36 & & & & \\ a_7 & a_8 & & & \\ -36 & -a_7 & 36 & & \\ a_7 & a_9 & -a_7 & a_8 & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k} = \frac{EI_d}{\ell^3(1+\gamma)} \begin{bmatrix} 12 & & & & \\ 6 \ell & a_{10} & & & \\ -12 & -6 \ell & 12 & & \\ 6 \ell & a_{11} & -6 \ell & a_{10} & \end{bmatrix},$$

여기서, 행렬 내부에 포함되는 요소들은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= 156 + 294\gamma + 140\gamma^2, & a_2 &= (22 + 38.5\gamma + 10\gamma^2) \ell, \\ a_3 &= 54 + 126\gamma + 70\gamma^2, & a_4 &= -(13 + 31.5\gamma + 10\gamma^2) \ell, \\ a_5 &= (4 + 7\gamma + 3.5\gamma^2) \ell^2, & a_6 &= -(3 + 7\gamma + 3.5\gamma^2) \ell^2, \\ a_7 &= (3 - 15\gamma) \ell, & a_8 &= (4 + 5\gamma + 10\gamma^2) \ell^2, \\ a_9 &= (-1 - 5\gamma + 5\gamma^2) \ell^2, & a_{10} &= (4 + \gamma) \ell^2, \\ a_{11} &= (2 - \gamma) \ell^2 \end{aligned}$$

한편 티모센코 보요소에 대한 엄밀한 동적 요소 행렬에 포함된 개별 요소들은 다음과 같이 표현된 다.

$$\Delta = \frac{1}{a^2 - \beta^2} (2b(1 - \cosh a\xi \cosh \beta\xi) + \frac{a\beta}{c} \{\mu^2 + \nu^2\} \sinh a\xi \sinh \beta\xi)$$

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \{-\mu \sinh a\xi \cosh \beta\xi + \nu \sinh \beta\xi \cosh a\xi\}$$

$$d_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{(\beta\mu + a\nu)}{a^2 - \beta^2} \sinh a\xi \sinh \beta\xi - \frac{ab - cd}{a^2 - \beta^2} (1 - \cosh a\xi \cosh \beta\xi) \right\}$$

$$d_3 = \frac{1}{\Delta} \frac{a\beta}{bc} \{\nu \sinh a\xi \cosh \beta\xi - \mu \sinh \beta\xi \cosh a\xi\}$$

$$d_4 = \frac{1}{\Delta} \{\mu \sinh a\xi - \nu \sinh \beta\xi\}$$

$$d_5 = \frac{1}{\Delta} \{\cosh a\xi - \cosh \beta\xi\}$$

$$d_6 = \frac{1}{\Delta} \frac{a\beta}{bc} \{-\nu \sinh a\xi + \mu \sinh \beta\xi\}$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\mu = \frac{(cd - a^2)}{a}, \quad \nu = \frac{(cd - \beta^2)}{\beta}$$