

# 일정 일반속력으로 구동되는 다물체계의 정상상태 평형해석

최동환\* · 박정훈\*\* · 유흥희\*\*\*

## Steady-state Equilibrium Analysis of a Multibody System Driven by Constant Generalized Speeds

D. H. Choi, J. H. Park and H. H. Yoo

**Key Words:** Steady-state(정상상태), Equilibrium Position(평형위치), Constrained Multibody Systems(구속 다물체계), Generalized speeds(일반속력), Relative Coordinates(상대좌표), Cut Joint(절단 조인트)

### Abstract

This paper presents an algorithm which seeks steady-state equilibrium positions of constrained multibody systems driven by constant generalized speeds. Since the relative coordinates are employed, the constraint equations at cut joints are incorporated into the formulation. The proposed algorithm leads to nonlinear equations that need to be solved iteratively. This algorithm should satisfy both types of conditions: the force equilibrium equations and the kinematic constraint equations. To verify the effectiveness of the proposed algorithm, two numerical examples are solved and the results are compared with those of a commercial program. This method, compared to the conventional method of using dynamic analysis, has the advantage of computational efficiency and stability.

### 1. 서론

본 논문에서는 다물체계를 구성하는 각 물체간의 상대위치가 정상상태에서 일정한 값으로 수렴하는 평형위치를 구하는 알고리즘을 제시하고자 한다. 제시하는 방법을 이용하면 기존 상용프로그램에서 댐핑(damping)을 주어서 충분한 시간동안 동적해석을 통해서만 얻을 수 있는 정상상태에서의 평형위치를 동적해석 없이 구할 수 있는 이점이 있다. 기존의 정적평형해석은 구속 다물체계의 동적해석을 수행하기 전에 그 초기조건을 구하기 위한 방법으로써 많은 방법이<sup>(1-4)</sup> 제안되어져 왔다. 그러나 이러한 기존의 해석방법으로는 일정 일반속력으로 구동되어 시간에 따라 그

위치가 변하는 다물체계의 정상상태 평형위치를 구할 수 없다. 참고문헌 [5]에서는 일정 일반속력을 가지는 시스템에 대한 정상상태 평형해석방법이 제시되어 있다. 이 방법에 따르면 운동에너지가 명시적으로 시간의 함수가 아닐 때 그 계의 라그랑지안(Lagrangian)을 계의 일반좌표로 편미분한 값이 영이 되게 할 때 그 계의 정상상태에서의 평형위치를 해석적으로 구할 수 있다는 것이다. 이 방법은 그러나 비교적 단순한 동적시스템에 대해서만 적용이 용이하며 효과적인 좌표의 선정은 해석자의 경험과 지식에 의지하여야 한다. 일반적으로 일정 일반속력으로 구동되는 시스템에서 계의 일반좌표로 직교좌표를 사용하게 되면 일정 일반속력에 의하여 그 값이 시간에 따라 변하므로 정상상태 평형위치를 구할 수 없다.

본 논문에서는 계의 일반좌표로 상대좌표를<sup>(6,7)</sup> 사용하였다. 따라서 개방계(open-loop system)에 대해서는 구속조건이 없이 자유도 수만큼의 운동방정식을 유도하였고 폐쇄계(closed-loop system)에

\* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, FunctionBay, Inc. 선임연구원

\*\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

대해서는 절단조인트(cut joint)<sup>(7)</sup> 개념을 도입하여 절단조인트에서의 구속방정식을 고려하였다. 그리고 일정 일반속력을 가지는 좌표와 나머지 일반좌표로 일반좌표들을 분할한 후 정상상태에서의 평형위치를 구하기 위한 알고리즘을 제시하였다. 이 알고리즘은 시스템이 개방계나 폐쇄계에 상관없이 항상 적용가능하며 기존의 정적평형해석과 마찬가지로 시스템의 힘 평형방정식과 구속방정식을 동시에 만족하기 위한 비선형방정식으로 귀결되고 이를 반복적으로 풀어야 한다. 제안된 해석방법의 타당성을 검증하기 위하여 두 가지 예제를 사용해 정상상태 평형위치를 구하였고, 그 해석결과를 기존의 상용해석프로그램<sup>(8)</sup> 사용하여 충분한 시간동안의 동적해석을 통해 구한 정상상태에서의 해석 결과와 비교하여 그 결과들이 서로 일치함을 보였다. 그러나 여기서 제시한 방법은 기존 상용프로그램의 동적해석을 통해 구하는 방법에 비해 미분방정식을 풀 필요가 없다는 점에서 훨씬 효율적인 방법이다.

## 2. 본문

### 2.1 운동방정식

공간운동을 하는 임의의 물체  $i$ 를 절대좌표공간에서 나타내면 Fig. 1과 같다. 그림에서  $X-Y-Z$ 와  $x_i-y_i-z_i$ 는 각각 절대좌표계와 물체  $i$ 에 고정된 좌표계이다. 여기서  $r_i$ 는 시스템의 절대좌표계의 원점  $O$ 에서 물체  $i$ 에 고정된 좌표계의 원점  $O_i$ 까지의 위치벡터이다. 본 논문에서는 절대좌표계에 대한 물체  $i$ 의 자세를 오일러 각을 이용하여 표현하였으며, 물체  $i$ 의 절대좌표  $x_i$ 를 다음과 같이 표현한다.

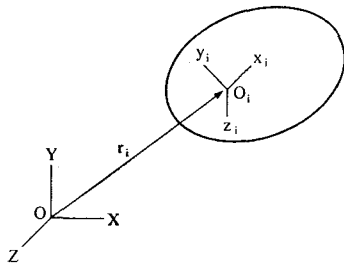


Fig. 1 A moving body in space

$$x_i = [r_i^T \ \theta_i^T]^T \quad (1)$$

여기서  $\theta_i$ 는 물체  $i$ 에 고정된 좌표계의 자세를 표현하기 위해 사용된 오일러각 회전좌표를 나타낸다. 일반적으로 절대좌표계에 대한 구속 다물체계의 운동방정식은 다음과 같은 확장 라그랑지 운동방정식으로 표현된다.

$$M\ddot{x} + \Phi_x^T \lambda = Q \quad (2)$$

위 식에서  $M$ 은 시스템의 관성행렬(system inertia matrix),  $Q$ 는 일반력(generalized force),  $\Phi_x$ 는 절대좌표에 대한 구속방정식 ( $\Phi = 0$ )의 자코비안 행렬(Jacobian matrix), 그리고  $\lambda$ 는 라그랑지 승수(Lagrange multipliers)이다. 여기서 구속방정식은 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\Phi = [\Phi^c \ \Phi^k]^T \quad (3)$$

위 식에서  $\Phi^c$ 는 폐쇄계에서의 절단조인트에 의한 구속방정식이고  $\Phi^k$ 는 나머지 구속방정식을 나타내는데 Fig. 2에 간단한 폐쇄계에 대하여 이를 도시하였다.

본 논문에서는 일반좌표  $q_i$ 를 회전조인트에서는 연결된 두 물체 사이의 상대적 회전각을 병진조인트에서는 두 물체 사이의 상대적 거리를 일반좌표로 하는 상대좌표를 사용하였다. 일반적으로 시스템의 절대속도  $\dot{x}$ 는 시스템의 일반속도  $\dot{q}$ 와 다음과 같은 속도변환관계식을<sup>(6-7)</sup> 가진다.

$$\dot{x} = B\dot{q} \quad (4)$$

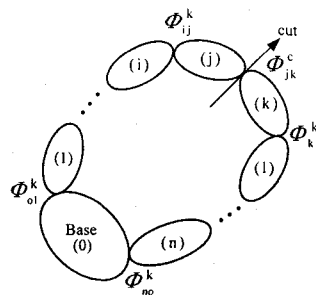


Fig. 2 A schematic representation of a closed loop system

여기서  $B$ 는 시스템의 일반속도를 절대속도로 변환시켜주는 속도변환행렬을 나타내며, 시스템의 절대속도  $\dot{x}$ 와 시스템의 일반속도  $\dot{q}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\dot{x} = [\dot{x}_1^T \dot{x}_2^T \cdots \dot{x}_n^T]^T \quad (5)$$

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cdots \dot{q}_p]^T \quad (6)$$

여기서  $n$ 은 시스템의 총 물체 수를 나타내고  $p$ 는 상대좌표 수를 나타낸다. 일정 일반속력으로 구동되어지는 시스템의 운동방정식을 구하기 위하여 일반좌표를 다음과 같이 분할하였다.

$$q = [q_D^T \quad q_R^T]^T \quad (7)$$

여기서  $q_D$ 는 일정 일반속력의 구동구속조건 (driving constraints)을 갖는 좌표를,  $q_R$ 은 나머지 일반좌표를 나타내는데, Fig. 3에 간단한 시스템을 이용하여 예를 도시하였다. 따라서 시스템의 절대속도  $\dot{x}$ 는 다음과 같다.

$$\dot{x} = B_D \dot{q}_D + B_R \dot{q}_R \quad (8)$$

여기서  $\dot{q}_D$ 는 일정 일반속력을 나타내며  $B_D$ 와  $B_R$ 은 다음과 같이  $B$ 를 구성한다.

$$B = [B_D \quad B_R] \quad (9)$$

마찬가지로 식 (8)을 시간에 대하여 미분하면 시스템의 절대속도  $\dot{x}$ 는 다음과 같다.

$$\dot{x} = B_D \dot{q}_D + B_R \dot{q}_R + \dot{B}_D \dot{q}_D + \dot{B}_R \dot{q}_R \quad (10)$$

식 (3)과 (10)을 운동방정식 (2)에 대입하고 식의 좌·우변에  $B_R^T$ 를 곱하면 다음과 같다.

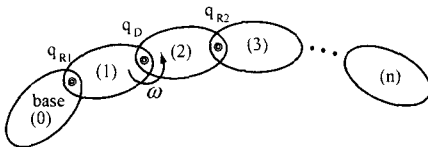


Fig. 3 Generalized coordinates  $q_D$  and  $q_R$

$$B_R^T [M(B_D \ddot{q}_D + B_R \ddot{q}_R + \dot{B}_D \dot{q}_D + \dot{B}_R \dot{q}_R) + \Phi_x^c \lambda^c + \Phi_x^k \lambda^k] = B_R^T Q \quad (11)$$

여기서  $\dot{q}_D$ 는 일정 값을 가지므로  $\ddot{q}_D$ 는 0의 값을 가지게 된다.

일반좌표  $q_R$ 에 대한 구속방정식의 자코비안 행렬  $\Phi_{q_R}$ 은 미분의 연쇄법칙을 이용하여 절대좌표에 대한 구속방정식의 자코비안행렬  $\Phi_x$ 와 다음과 같은 관계식<sup>(9)</sup> 가진다.

$$\Phi_{q_R} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_R} = \Phi_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_R} = \Phi_x B_R \quad (12)$$

그런데  $q_R$ 에 대한 속도변환행렬  $B_R$ 은 절대좌표에 대한 구속방정식  $\Phi^k$ 의 자코비안행렬  $\Phi_x^k$ 의 영공간이 되므로 (상세과정은 참고문헌 [6]을 참조할 것) 다음의 식이 성립한다.

$$B_R^T \Phi_x^k = 0 \quad (13)$$

식 (13)을 이용하면 식 (11)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$M^* \ddot{q}_R + \Phi_{q_R}^c \lambda^c = Q^* \quad (14)$$

여기서

$$M^* = B_R^T M B_R \quad (15)$$

$$Q^* = B_R^T Q - B_R^T (M \dot{B}_D \dot{q}_D + M \dot{B}_R \dot{q}_R) \quad (16)$$

그런데 일반좌표  $q_R$ 에 대한 구속방정식의 2차 시간미분식은 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi_{q_R}^c \ddot{q}_R = \gamma^c \quad (17)$$

여기서

$$\gamma^c = -(\Phi_{q_R}^c \dot{q}_R)_{q_R} \dot{q}_R - 2 \Phi_{q_R t}^c \dot{q}_R - \Phi_{tt}^c \quad (18)$$

위 식 (17)과 식 (14)를 결합하면 다음과 같은 미

분대수방정식형태의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^* & \boldsymbol{\phi}_{q_R}^{cT} \\ \boldsymbol{\phi}_{q_R}^c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_R \\ \lambda^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* \\ \boldsymbol{\gamma}^c \end{bmatrix} \quad (19)$$

일정 일반속력으로 구동되는 구속 다물체계의 동적해석은 식 (19)를 이용하여 수행될 수 있다.

## 2.2 평형해석

일정 일반속력으로 구동되는 시스템의 경우  $\dot{\mathbf{q}}_D$ 는 일정 값을 가지므로  $\ddot{\mathbf{q}}_D$ 는 0이 되고, 정상상태에서  $\ddot{\mathbf{q}}_R$ 과  $\dot{\mathbf{q}}_R$ 은 0이 되므로 이를 운동방정식 (14)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{B}_R^T [\mathbf{M} \dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q}] + \boldsymbol{\phi}_{q_R}^{cT} \lambda^c = 0 \quad (20)$$

정상상태의 평형위치를 구하기 위해서는 식 (20)과 구속방정식 ( $\boldsymbol{\phi}^c = 0$ )을 동시에 풀어야 한다. 따라서 평형해석을 위한 방정식은 시스템의 힘평형방정식과 구속방정식을 동시에 만족하기 위한 비선형방정식으로 귀결되고 이를 풀기 위하여 뉴턴-랩슨 방법(Newton-Raphson method)을 사용하는데 그 과정은 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_z \Delta \mathbf{z}^i = -\mathbf{f} \quad (21)$$

$$\mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i + \Delta \mathbf{z}^i \quad (22)$$

여기서

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_R^T [\mathbf{M} \dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q}] + \boldsymbol{\phi}_{q_R}^{cT} \lambda^c \\ \boldsymbol{\phi}^c \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{q}_R^T \quad \lambda^{cT}]^T \quad (24)$$

여기서  $\mathbf{f}_z$ 는  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ 를 나타낸다.

## 3. 수치예제

### 3.1 일정 각속도를 가지는 2자유도 강체시스템

Fig. 4는 일정 각속도  $\omega = 20$  rad/s로 구동되어지는 평면운동을 하는 2자유도 강체시스템을

나타낸다. 이 시스템에서 지면과 물체 1 그리고 물체 1과 물체 2는 각각 회전조인트(revolute joint)로 연결되어 있으며 물체 2와 물체 3은 병진조인트(translational joint)로 연결되어 있다. 그리고 물체 1과 2는 스프링상수 값이  $k_r = 300$  Nm/rad인 회전스프링으로, 물체 2와 물체 3은 스프링상수 값이  $k_t = 50000$  N/m인 병진스프링으로 각각 연결되어 있으며, 회전 스프링의 변형전 각도는 1.0472 rad이고 병진스프링의 변형 전 길이는 1 m이다. 초기상태에서 물체 1과 물체 2가 이루는 상대각  $\theta$ 는 0 rad, 물체 2와 물체 3 사이의 상대거리  $d$ 는 1.1 m이다. 그리고 물체 1의 길이는 1 m이고 이 외에 이 시스템에 관한 물성치들은 Table 1에 나타나 있다. 평형해석결과로부터 Fig. 5는 정상상태에서 물체 1과 물체 2사이의 상대회전각  $\theta$ 를, Fig. 6은 물체 3의 정상상태에서의 상대변위  $d$ 를 나타내는데, 이들 결과는 모두 상용해석프로그램에서 댐핑을 주고 해석한 결과와 정상상태에서 잘 일치한다. 그림에서  $c_r$ 과  $c_t$ 는 각각 회전 및 병진방향 감쇠상수를 나타낸다.

그러나 상용프로그램에서 댐핑을 주지 않았을 경우에는 시간이 지나도 그 결과 값이 수렴하지 않고 불안정함을 알 수 있다. 특히 위 시스템에서 회전스프링에 댐핑을 주지 않았을 경우에는

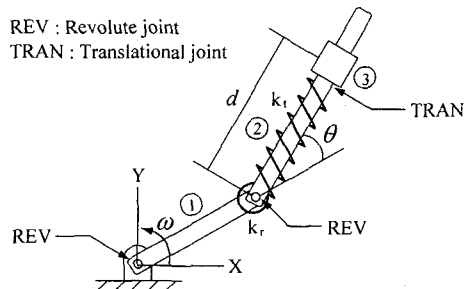


Fig. 4 2-DOF swing pendulum driven by constant angular velocity

Table 1 Inertia properties of the swing pendulum

Body	Mass [ kg ]	Moment of inertia $I_{zz}$ [ kg m <sup>2</sup> ]
Body 1	1.0	0.1
Body 2	0.0	0.0
Body 3	1.0	0.0

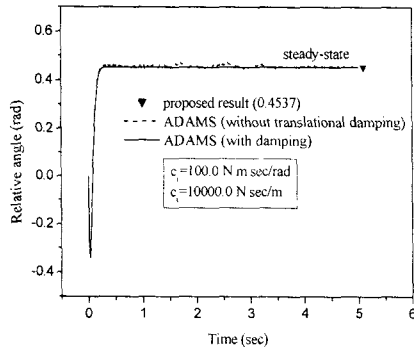


Fig. 5 Relative angle between body 1 and body 2

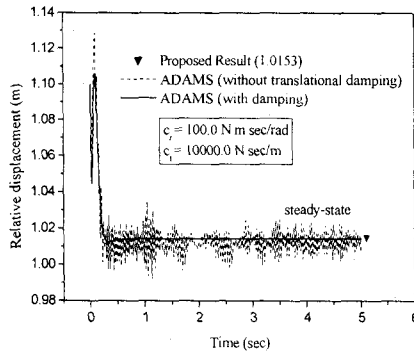


Fig. 6 Relative displacement between body 2 and body 3

발산하였다. 이상의 결과가 보여주듯이 본 논문에 제시된 알고리즘은 개방계 시스템의 정상상태 평형위치를 효율적이며 안정적으로 정확하게 찾아냄을 알 수 있다.

### 3.2 일정 각속도를 가지는 자동조심기구

Fig. 7은 일정 각속도  $\omega = 11.0174 \text{ rad/s}$ 로 구동되는 스피들을 갖는 자동조심기구를 나타낸다. 그림에서 물체 1, 2, 3, 그리고 4는 각각 스피들(spindle), 볼(ball), 볼, 그리고 칼러(collar)를 나타낸다. 위 시스템은 1 자유도 강체시스템으로 지면과 물체 1, 물체 1과 물체 2, 그리고 물체 1과 물체 3은 각각 회전조인트로, 물체 1과 물체 4는 병진조인트로 연결되어 있으며, 물체 2와 물체 4 그리고 물체 3과 물체 4는 각각 거리가 0.10922 m인 일정거리 조인트(distance joint)로 연결되어 있다. 그리고 물체 1과 물체 4는 스프링 상수 값이  $k_s = 1000 \text{ N/m}$ 인 병진스프링으로 연결되어 있으며 초기상태에서 변형전 길이는 0.15 m이다. 초기상태에서 스피들과 칼러의 상대거리는

0.0744 m, 스피들과 볼과의 상대각은 0 rad이며, 초기에 각 물체의 자세는 모두 절대좌표계의 자세와 일치한다. 이 시스템에 관한 관성 특성치는 Table 2에 나타나 있다. Table 3은 초기상태에서 이 시스템을 구성하는 각 물체의 질량중심점의 위치와 일정거리 조인트의 조인트 정의점들의 위치를 나타낸다. Fig. 8은 위 시스템의 위상구조를 나타낸다. 그림에서 원안의 숫자는 물체번호로 0은 기초물체(base body)인 지면을 그리고 나머지 숫자 1~4는 물체 1~4를 나타내며, 직선으로 표현

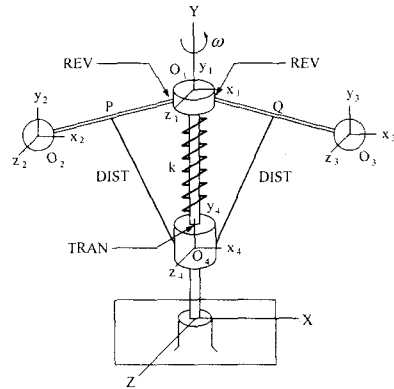


Fig. 7 Governor mechanism driven by constant angular velocity

Table 2 Inertia properties of the governor mechanism

Body	Mass [ kg ]	Moment of inertia [ kg · m <sup>2</sup> ]		
		I <sub>x'x'</sub>	I <sub>y'y'</sub>	I <sub>z'z'</sub>
Spindle	200.0	25.0	50.0	25.0
Ball 1	1.0	0.1	0.1	0.1
Ball 2	1.0	0.1	0.1	0.1
Collar	1.0	0.15	0.125	0.15

Table 3 Initial values of the governor mechanism

Point	Initial Position [m]
O <sub>1</sub>	[0.0, 0.2, 0.0]
O <sub>2</sub>	[-0.16, 0.2, 0.0]
O <sub>3</sub>	[0.16, 0.2, 0.0]
O <sub>4</sub>	[0.0, 0.1256, 0.0]
P	[-0.08, 0.2, 0.0]
Q	[0.08, 0.2, 0.0]

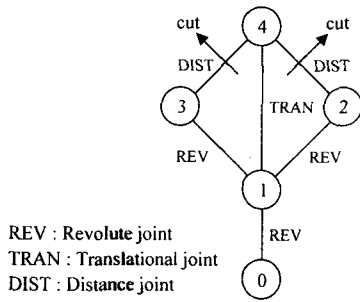


Fig. 8 Tree structure of the governor mechanism

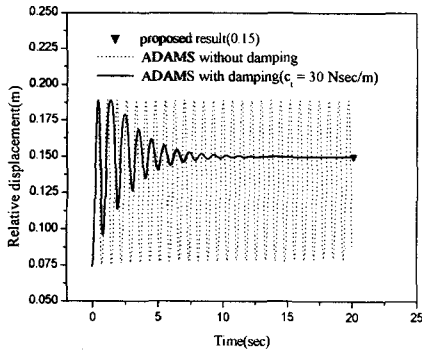


Fig. 9 Relative displacement between spindle and collar

된 부분은 각 물체들을 연결하는 조인트를 나타낸다. 위 시스템은 2개의 폐루프를 가지는 폐쇄계로, 개방계로 만들기 위하여 볼과 칼러를 연결하는 두 개의 일정거리 조인트를 절단하였다. 평형해석결과로부터 Fig. 9는 스펀들과 칼러사이의 상대거리를 나타내며, 정상상태에서 댐핑을 준 상용해석프로그램의 해석결과와 잘 일치함을 보여준다. 그러나 댐핑이 없는 경우는 수렴하지 않고 계속 진동함을 볼 수 있다. 따라서 이상의 결과는 폐쇄계에 대해서도 본 논문에서 제시한 정상상태 평형해석 알고리즘이 효율적이고 정확한 결과를 제공함을 보여준다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 일정 일관속력을 가지는 구속 다물체계의 정상상태 평형위치를 찾기 위한 해석 방법을 제시하였다. 본 논문에서 제안된 해석 방법을 이용하면 기존 상용프로그램에서 동적해석으로부터 구해야 했던 정상상태 평형위치를 운동방정식을 풀지 않고 바로 구할 수 있는 이점이

있다. 대표적인 기존 상용해석프로그램에 의한 정상상태 동적해석결과와 비교하여 본 논문에 제시된 방법의 정확성과 우수성을 검증하였다.

#### 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) Nikravesh, P. E., 1988, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall International Editions.
- (2) Haug, E. J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Volume I: Basic Method, ALLYN AND BACON.
- (3) Nikravesh, P. E. and Srinivasan, M., 1985, "Generalized Coordinate Partitioning in Static Equilibrium Analysis of Large-Scale Mechanical Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 451~464.
- (4) 김종인, 박정훈, 유홍희, 배대성, 1999, "구속다물체계의 정적 평형 및 선형 진동해석," 대한기계학회논문집 A권, 제 23권, 제 5호, pp. 871~880.
- (5) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, *Dynamics : Theory and Applications*, McGraw-Hill.
- (6) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I. Open Loop Systems," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 15, No. 3, pp. 359~382.
- (7) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II. Closed Loop Systems," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 15, No. 4, pp. 481~506.
- (8) *ADAMS(Version 10.1) User's Guide*, 2000, Mechanical Dynamics, Inc.
- (9) Rosenberg, R. M., 1977, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press.