

# 유체 유동을 갖는 직선관의 진동 해석을 위해 새로운 비선형 모델링

이수일\* · 정진태\*\* · 임형빈\*\*\*

## New Non-linear Modelling for Vibration Analysis of Straight Pipe Conveying Fluid

Soo Il Lee, Jintai Chung, Hyung Bin Im

**Key Words :** Straight Pipe Conveying Fluid(유체 유동을 갖는 직선관), Non-linear Lagrange Strain(비선형 라그랑지 변형률), Extended Hamilton's Principle(확장된 헤밀턴의 원리), Geometric Non-linearity(기하학적 비선형성)

### Abstract

A new non-linear of a straight pipe conveying fluid is presented for vibration analysis when the pipe is fixed at both ends. Using the Euler-Bernoulli beam theory and the non-linear Lagrange strain theory, from the extended Hamilton's principle are derived the coupled non-linear equations of motion for the longitudinal and transverse displacements. These equations of motion for are discretized by using the Galerkin method. After the discretized equations are linearized in the neighbourhood of the equilibrium position, the natural frequencies are computed from the linearized equations. On the other hand, the time histories for the displacements are also obtained by applying the generalized- $\alpha$  time integration method to the non-linear discretized equations. The validity of the new modeling is provided by comparing results from the proposed non-linear equations with those from the equations proposed by Paidoussis.

### 1. 서론

유체유동을 갖는 관의 진동은 냉장고, 에어 컨디셔너, 화학공장, 수력전기 시스템 등의 해석에 필요한 중요한 문제이다. 그러므로, 관의 진동해석은 많은 산업분야에서의 넓은 적용으로 인해 수많은 연구가 있어 왔다. 많은 연구자[1-7]들이 유체유동을 갖는 관의 모델링과 운동 방정식의 유도하고 있다. 그들은 다양한 지지나 하중에 관련된 직선관 혹은 곡관의 진동과 안정성을 연구

했다. 특히, 다양한 관의 모델링과 해석에 대한 광범위한 연구는 Paidoussis[1]에 의해 주어져 있다. 최근에, 몇몇 연구들이 유체유동을 갖는 관의 비선형성의 해석[6-7]을 수행하고 있다. 이전의 비선형 방정식의 대부분은 order-of-magnitude 근사법과 기하학적 비선형성과 미소 변형률을 동시에 고려함[1,2,6,7]으로써 유도되어 왔다. 하지만, 기하학적 비선형성이 Lagrange 변형률로 고려됨은 매우 논리적이다. 그 이유는 미소 변형률은 선형계에 적합한 반면 Lagrange 변형률은 비선형계[8]에 적합하기 때문이다.

본 연구에서는 유체유동을 갖는 직선관의 새로운 비선형 모델이 양단 고정된 상태일 때의 진동해석에 대해 제시되었다. 비선형성을 고려하기 위해 Lagrange 변형률이 적용되었다. 반면, 관은 Euler-Bernoulli 보로 취급하고 응력과 변위 사

\* 한양대학교 BK21 기계사업단

\*\* 한양대학교 공학대학 기계공학과

\*\*\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과 석사과정

이에는 선형관계가 있다고 가정하였다. 위 가정들을 기초로, Extended Hamilton 원리로부터 종방향과 횡방향에 대한 연성된 비선형 운동 방정식이 유도되었다. 운동 방정식들은 Galerkin 법으로 이산화되고 나서 평형위치의 근처에서 선형화된 이후에 횡방향 진동의 고유 진동수들이 계산되고 검증되어졌다. 더욱이, 비선형 동적 응답, 즉, 변위들의 시간응답은 generalized- $\alpha$  시간분법[10]을 사용해서 계산되어졌다. 마지막에는 제시된 비선형 방정식으로부터 나온 계산결과가 Paidoussis의 결과와 비교된다.

## 2. 운동 방정식

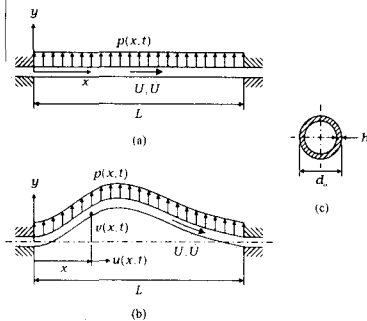


Fig. 1 Schematics of a straight pipe conveying fluid when both ends are fixed: (a) the pipe before deformation; (b) the pipe after deformation; and (c) the cross-section of the pipe.

Fig. 1에서 보는 바와 같이 균일한 내부유동과 외부 조화가진 하중을 가진 늘어날 수 있는 직선관을 고려해 보자. 양단 고정된 직선관은 길이  $L$ , 단면의 외경이  $d_0$  그리고 두께가  $h$ 이다. 만약, 그 관이  $d_0/L < 0.1$ 인 것과 같이 충분히 얇다면, 그것은 Euler-Bernoulli 보로서 모델이 가능하다. 더욱이, 관 안에 유체가 비압축성이라 가정하면 그 유체의 속도가 관 내부에서 일정하다. 그러므로, 축방향 속도  $U(t)$  그리고 가속도  $\dot{U}(t)$ 가 관 안에서 일정하다는 의미와 일치한다.

이 논문에서 관의 기하학적 비선형성을 고려하기 위해 Lagrange 변형률이 사용되었다. 그 관이 Euler-Bernoulli 보로 모델되었기 때문에 관의 어떤 점에 대한  $x$ 와  $y$  방향 변위  $u_x(x,y,t)$ 와  $u_y(x,y,t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$u_x(x,y,t) = u(x,t) - y \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \quad u_y(x,y,t) = v(x,t) \quad (1)$$

여기서  $u(x,t)$ 와  $v(x,t)$ 는 각각 그 관의 중심선 위에 어떤 점의 종방향과 횡방향의 변위를 나타

낸다. 관의 변위와 변형률은 아마도 작지 않을 것이다. 그래서, 횡방향 변위 뿐만 아니라 종방향 변위도 수식 속에 포함된다. 관의 기하학적 비선형성은 변형률-변위 관계에서 제공한 Lagrange 변형률 관계에 의해서 고려될 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

여기서  $\epsilon_x$ 는 종방향의 수직 변형률이다. 식(2)에 식(1)을 대입하여 계산하면 다음과 같다.

$$\epsilon_x = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) - y(1+u')v'' + \frac{1}{2}y^2v''^2 \quad (3)$$

제시된 모델과 전통적인 모델[1,2,6,7]사이에서 비선형 변형률-변위 관계들의 차이를 알아보자. Paidoussis[1,6,7]와 Thurman, Mote[2]는 다음과 같은 근사 비선형 변형률-변위 관계를 사용했다.

$$\epsilon = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1, \quad \kappa = \sqrt{u''^2 + v''^2} \quad (4)$$

여기서  $\epsilon$ 과  $\kappa$ 는 각각 축방향 변형률과 관의 곡률을 나타낸다. 이런 비선형 관계는 기하학적 비선형성과 미소 변형률을 동시에 고려함으로써 유도되었다. 식(4)의 변형률과 비교해서, 식(3)에 의해 주어진 이번 연구의 비선형 변형률은 일반적으로 큰 변형률과 변위를 허용하는 Lagrange 변형률로 유도되었다.

다음으로, 관에서 응력-변형률 관계를 생각해 보자. 관은 균일하고 등방성이고 탄성재질이라고 가정한다. 관은 얇고, 두께  $h$ 가 다른 차원들에 비해 작기 때문에, 축방향 응력  $\sigma_x$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_x = E\epsilon_x^L \quad (5)$$

여기서  $E$ 는 Young의 계수이고  $\epsilon_x^L$ 은 선형 축방향 변형률이다. 선형 변형률  $\epsilon_x^L$ 은 식(3)에 의해 주어진 변형률의 선형화에 의해 얻어진다.

$$\epsilon_x^L = u' - yv'' \quad (6)$$

그러므로, 이 모델링에서, 비선형 변형률과 선형 응력이 운동 방정식을 구하는데 쓰여졌다. 이런 종류의 모델링의 상세한 내용은 Chung et al.[11]을 참고하면 된다. 더욱이, 이런 모델링 기술은 축방향으로 이동하는 현[12]에 대한 운동 방정식을 유도할 때 적용되었다.

위에 묘사된 가정하에, 유체 유동을 갖는 관의 변형 에너지는 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \quad (7)$$

여기서  $V$ 는 관의 부피이다. 식(7)에 식(3)과 (5)를 대입하면 변형 에너지는 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{2}EA \int_0^L \left[ u^2 + \frac{1}{2}u(u^2 + v^2) \right] dx + \frac{1}{2}EI \int_0^L \left( 1 + \frac{3}{2}u' \right) v'^2 dx \quad (8)$$

여기서  $A$ 는 관의 단면적이고,  $I$ 는 면적관성 모멘트이다.

유체유동을 갖는 관의 운동 에너지를 얻기 위해서, 관을 따라 유동하는 유체와 관의 속도까지 고려해 보자. 우선, 변형된 관의 중심선에서 어떤 점의 변위 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (9)$$

그러면, 관의 속도  $\mathbf{v}_p$  와 관을 따라 유동하는 유체의 속도  $\mathbf{v}_f$  는 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_p = \dot{u}\mathbf{i} + \dot{v}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_f = [\dot{u} + U(1+u')]\mathbf{i} + (\dot{v} + Uv')\mathbf{j} \quad (10)$$

유체속도  $\mathbf{v}_f$  는  $\mathbf{r}$  의 시간에 관한 물질미분으로 얻어진다. 회전 관성 효과와 2차 흐름 효과를 무시하면, 유체유동을 갖는 관에 대한 운동 에너지는 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2A} \int_V (m_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p + m_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_f) dV \quad (11)$$

여기서  $m_p$  와  $m_f$  는 각각, 단위 길이당 관과 유체의 질량 밀도이다. 식(10)을 식(11)에 대입하면, 운동에너지는 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2}m_p \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx + \frac{1}{2}m_f \int_0^L \left\{ \dot{u} + U(1+u') \right\}^2 + (\dot{v} + Uv')^2 dx \quad (12)$$

유체 유동을 갖는 관의 운동 방정식과 그에 부합하는 경계조건은 다음의 확장된 Hamilton의 원리로부터 유도된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta P + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (13)$$

여기서  $\delta W_{nc}$  는 비보존력에 의한 가상일이고,  $\delta M$  은 가상 운동변화량이다. 이 두가지 양들은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = \int_0^L p(x,t) \delta v dx, \quad \delta M = [m_f (v_f \cdot \delta \mathbf{r})(U \cdot \mathbf{n})]_0^L \quad (14)$$

여기서,  $p(x,t)$  는 관의 단위 길이당 횡방향 하중이고,  $\mathbf{n}$  는 경계에서 외부로 향하는 수직벡터이다. 식(8),(12)와 (14)를 식(13)에 대입하면 유체유동을 갖는 관의 연성된 비선형 운동 방정식과 경계 조건은 다음과 같이 나타난다.

$$(m_p + m_f) \ddot{u} + m_f U \dot{u}' + 2m_f U u' \dot{u}' + m_f U^2 u'' - EA \left( u'' + \frac{3}{2} u' u'' + \frac{1}{2} v' v'' \right) - \frac{3}{2} EI v'' v''' = 0 \quad (15)$$

$$(m_p + m_f) \ddot{v} + m_f U \dot{v}' + 2m_f U v' \dot{u}' + m_f U^2 v'' - \frac{1}{2} EA (u' v' + u' v''') + EI \left( v^{(4)} + \frac{3}{2} u' v^{(4)} + 3u'' v^{(3)} + \frac{3}{2} u^{(3)} v'' \right) = p \quad (16)$$

$$u = v = v' = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, L \quad (17)$$

제안된 식과 기존식과의 차이점이 무엇인지를 검토해 보는 것이 본 논문의 관심거리이다. Thurman 과 Mote[2]에 의해 유도된 식은 Païdoussis의

식을 간략화한 형태이기 때문에 이 논문에서 제시된 식들은 Païdoussis의 식과 비교해 본다. 이 논문과 같은 표현을 사용하기 위해서, Païdoussis의 식은 다음과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$(m_p + m_f) \ddot{u} + m_f U \dot{u}' + 2m_f U u' \dot{u}' + m_f U^2 u'' - EA(u'' + v' v'') - EI(v^{(4)} + u' v^{(3)}) = 0 \quad (18)$$

$$(m_p + m_f) \ddot{v} + m_f U \dot{v}' + 2m_f U v' \dot{u}' + m_f U^2 v'' - EA \left( u' v' + u' v'' + \frac{3}{2} v'' v'' \right) + EI \left( v^{(4)} - 2u' v^{(4)} - 4u'' v^{(3)} - 3u^{(3)} v'' - u^{(4)} v'' - 2v'' v^{(4)} - 8v' v'' v^{(3)} - 2v''^2 \right) = p \quad (19)$$

식(18)과 (19)로부터 식(16)과 (17)의 주된 차이는 비선형항에서 나타난다.

### 3. 이산화 방정식

이산화된 방정식에 대한 근사해는 유한차원의 함수공간에서 찾을 수 있다. 종방향과 횡방향 변위들은 기초함수들의 급수로서 표현된다.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^N U_n(x) T_n^u(t), \quad v(x,t) = \sum_{n=0}^N V_n(x) T_n^v(t) \quad (20)$$

여기서  $N$  은 기초함수의 총수,  $U_n(x)$  와  $V_n(x)$  는 비교함수,  $T_n^u(t)$  와  $T_n^v(t)$  는 임의의 시간함수이다. 식(20)에 부합하는 가중함수는 다음과 같다.

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{n=0}^N U_n(x) \bar{T}_n^u(t), \quad \bar{v}(x,t) = \sum_{n=0}^N V_n(x) \bar{T}_n^v(t) \quad (21)$$

여기서  $\bar{T}_n^u(t)$  와  $\bar{T}_n^v(t)$  는 임의의 시간함수이다. 종방향과 횡방향 변위들에 대한 비교함수를 다음과 같이 선택한다.

$$U_n(x) = a_n x^{n+1} (L-x), \quad V_n(x) = b_n x^{n+2} (L-x)^2 \quad (22)$$

여기서  $a_n$  과  $b_n$  은 임의의 상수이고, 다음의 정규화 조건으로 구할 수 있다.

$$\int_0^L U_n dx = \int_0^L V_n dx = 1 \quad (23)$$

앞 절에서 유도된 운동방정식은 Galerkin 법에 의해 다음과 같은 이산화방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{m=0}^N [m_{mn}^u \bar{T}_n^u + 2U g_{mn}^u \bar{T}_n^u + (k_{mn}^u + U^2 h_{mn}^u + \dot{U} g_{mn}^u) \bar{T}_n^u + \sum_{j=0}^N (\alpha_{jmn}^u T_j^u T_n^u + \alpha_{jmn}^v T_j^v T_n^v)] = f_m^u, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (24)$$

$$\sum_{m=0}^N [m_{mn}^v \bar{T}_n^v + 2U g_{mn}^v \bar{T}_n^v + (k_{mn}^v + U^2 h_{mn}^v + \dot{U} g_{mn}^v) \bar{T}_n^v + \sum_{j=0}^N (\alpha_{jmn}^{uv} T_j^u T_n^v)] = f_m^v, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (25)$$

여기서

$$m_{mn}^u = (m_p + m_f) \int_0^L U_m U_n dx, \quad m_{mn}^v = (m_p + m_f) \int_0^L V_m V_n dx,$$

$$\begin{aligned}
g_{mn}^u &= m_f \int_0^L U_m \frac{dU_n}{dx} dx, \quad g_{mn}^v = m_f \int_0^L V_m \frac{dV_n}{dx} dx, \\
h_{mn}^u &= m_f \int_0^L U_m \frac{d^2 U_n}{dx^2} dx, \quad h_{mn}^v = m_f \int_0^L V_m \frac{d^2 V_n}{dx^2} dx, \\
k_{mn}^u &= -EA \int_0^L U_m \frac{d^2 U_n}{dx^2} dx, \quad k_{mn}^v = EI \int_0^L V_m \frac{d^4 V_n}{dx^4} dx, \\
\alpha_{jmn}^u &= -\frac{3}{2} EA \int_0^L U_m \frac{dU_j}{dx} \frac{d^2 U_n}{dx^2} dx, \quad (26) \\
\alpha_{jmn}^v &= -\frac{1}{2} EA \int_0^L U_m \frac{dV_j}{dx} \frac{d^2 V_n}{dx^2} dx - \frac{3}{2} EI \int_0^L U_m \frac{dV_j}{dx} \frac{d^3 V_n}{dx^3} dx, \\
\alpha_{jmn}^{uv} &= -\frac{1}{2} EA \int_0^L V_m \frac{d}{dx} \left( \frac{dU_j}{dx} \frac{dV_n}{dx} \right) dx \\
&+ \frac{3}{2} EI \int_0^L V_m \left( \frac{dU_j}{dx} \frac{d^4 V_n}{dx^4} + 2 \frac{d^2 U_j}{dx^2} \frac{d^3 V_n}{dx^3} + \frac{d^3 U_j}{dx^3} \frac{d^2 V_n}{dx^2} \right) dx, \\
f_m^u &= m_f \dot{U} \int_0^L U_m dx, \quad f_m^v = \int_0^L V_m p dx
\end{aligned}$$

식(24)와 (25)는 행렬 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{T}}(t) + 2\mathbf{UG}\dot{\mathbf{T}}(t) + (\mathbf{K} + U^2\mathbf{H} + \mathbf{UG})\mathbf{T}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{T}(t)) = \mathbf{F}(t) \quad (27)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 은 질량 행렬,  $\mathbf{G}$ 는 자이로스코픽 힘에 관련된 행렬,  $\mathbf{K}$ 는 구조 강성 행렬,  $\mathbf{H}$ 는 유체에 대한 원심력에 관련된 행렬,  $\mathbf{N}(\mathbf{T}(t))$ 는 비선형 내력 벡터,  $\mathbf{F}(t)$ 는 외력 벡터이다.

#### 4. 고유 진동수

이산화방정식은 관의 고유 진동수를 계산함으로써 검증할 수 있다. 이것을 하기 위해서, 평형 위치의 근처에서 선형방정식을 얻는 것이 필요하다. 그 관이 정상상태이고 외력이 무시될 때, 식(27)의 선형식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{T}}(t) + 2\mathbf{UG}\dot{\mathbf{T}}(t) + (\mathbf{K} + U^2\mathbf{H})\mathbf{T}(t) = \mathbf{0} \quad (28)$$

식(28)로부터 고유 진동수를 얻기 위해서, 다음과 같은 식으로 변환한다.

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{0} \quad (29)$$

여기서

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{UG} & \mathbf{K} + U^2\mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \mathbf{T}(t) \end{Bmatrix} \quad (30)$$

식(29)의 해를  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 e^{\lambda t}$ 로 가정하여, 복소 고유치  $\lambda_n$ 을 계산한다. 관에 대한 고유진동수의 수렴특성을 생각해 보자. 이번 연구에서 사용되는 물성치는  $m_p = 0.05636 \text{ kg/m}$ ,  $m_f/(m_p + m_f) = 0.1$ ,  $E = 10 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $L = 2.0 \text{ m}$ ,  $d_o = 20 \text{ mm}$  그리고  $h = 0.1 \text{ mm}$ 이다.

Table 1은 관이 정적 상태에 있을 때, 기초함수의 수  $N$ 에 따른 고유진동수의 수렴 특성을 나타낸다.  $N$ 이 증가함에 따라 계산된 고유진동수는 Blevins[13]에 의해 제시된 엄밀해에 접근한

다. 고유진동수에 대한 또다른 검증은 유체가 일정 속도를 가지고 있을 때 제공된다.

Table 1. Convergence characteristics of the natural frequencies (rad/s) when  $U = \dot{U} = 0$ .

N	Transverse vibration			Longitudinal vibration		
	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
1	131.84	369.57	N/A	5252.81	10765.0	N/A
2	131.40	369.57	749.56	5218.49	10765.0	16786.8
3	131.40	362.31	749.56	5218.49	10440.0	16786.8
4	131.40	362.31	711.38	5218.45	10440.0	15685.9
5	131.40	362.19	711.38	5218.45	10436.9	15685.9
6	131.40	362.19	710.06	5218.45	10436.9	15655.6
Exact [13]	131.39	362.19	710.04	5218.40	10436.4	15653.5

Table 2. Convergence characteristics of the natural frequencies (rad/s) when  $U = 15.0 \text{ m/s}$  and  $\dot{U} = 0$ .

N	Transverse vibration			Longitudinal vibration		
	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
1	48.206	295.92	N/A	5251.5	10762.8	N/A
2	38.288	291.86	680.41	5217.2	10762.5	16783.6
3	38.172	276.50	675.22	5217.2	10437.4	16783.2
4	38.070	275.78	625.28	5217.2	10437.4	15682.3
5	38.069	275.46	623.20	5217.2	10434.3	15682.1
6	38.069	275.46	621.11	5217.2	10434.3	15651.7
7	38.069	275.44	621.01	5217.2	10434.3	15651.7

Table 2에서 보듯이,  $U = 15.2 \text{ m/s}$ 이고  $\dot{U} = 0$ 일 때, 계산된 고유 진동수는 기초함수의 수  $N$ 에 따라 수렴한다. 또한 이산화 방정식은 유체속도에 따른 다양한 복소 고유치를 조사함으로써 검증할 수 있다. 계산결과와의 비교를 위해, 무차원 고유치  $\bar{\lambda}_n$ 와 무차원 유체속도  $\bar{U}$ 를 다음과 같이 소개한다.

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n L^2 \sqrt{\frac{m_p + m_f}{EI}}, \quad \bar{U} = UL \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \quad (31)$$

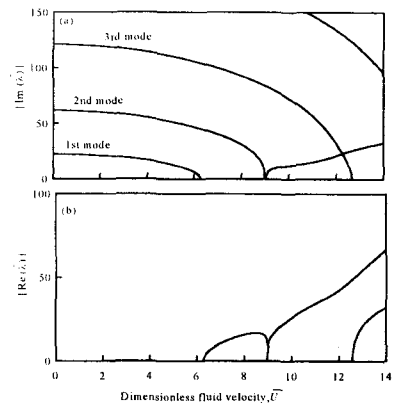


Fig. 2 Variation of the complex eigenvalues for the dimensionless fluid velocity: (a) the imaginary part; and (b) the real part.

$U = 0$ 일 때, 다양한 무차원 고유치 대 무차원 유체 속도는 Fig.2로 도시하였다. 여기서 고유치

의 허수 부분은 관의 고유진동수를 나타낸다. 이 그림은 Païdoussis[1]에서와 거의 같다. Fig.2 에서 보는 바와 같이, 식(30)으로부터 계산된 임계 유체 속도는  $\bar{U}_c = 6.283$  이다. 그리고, 그것은 Païdoussis[1]의 임계 속도  $\bar{U}_c = 2\pi$  와 거의 같다.

### 5. 시간 응답

식(27)에 의해 주어진 이산화된 비선형 운동 방정식으로부터, 변위의 시간응답은 generalized- $\alpha$  시간 적분법[10]에 의해 얻어진다. generalized- $\alpha$  법을 적용하기 위해서, 이산화된 식(27)을 다음과 같이 바꾼다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} + 2\mathbf{U}\mathbf{G}\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} + (\mathbf{K} + \mathbf{U}^2\mathbf{H} + \mathbf{U}\mathbf{G})\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{N}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} \quad (32)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\mathbf{d}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{d}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\mathbf{v}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{v}_n, \\ \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} &= (1-\alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n, \\ \mathbf{F}_{n+1-\alpha_m} &= \mathbf{F}((1-\alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + (1/2 - \beta)\Delta t^2\mathbf{a}_n + \beta\Delta t^2\mathbf{a}_{n+1}, \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + (1-\gamma)\Delta t\mathbf{a}_n + \gamma\Delta t\mathbf{a}_{n+1} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서  $\alpha_m, \alpha_f, \beta$  와  $\gamma$  는 수치 소산 매개변수에 의해 결정되는 연산 매개 변수들이다.  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  은 시간 단계이다.  $\mathbf{d}_n, \mathbf{v}_n$  와  $\mathbf{a}_n$  는 각각  $\mathbf{T}, \mathbf{T}$  와  $\ddot{\mathbf{T}}$  의 근사값이다. 식(32)는 비선형 벡터 방정식이고 종방향과 횡방향의 변위들은 서로 연성되어 있기 때문에, 비선형 방정식의 solver (예를 들어, Newton-Raphson 법)를 사용한다.

관의 중심선에 어떤 점의 횡방향 변위의 시간 응답은 식(32)-(34)로부터 계산된다. 그리고 그때의 외부 횡방향 하중  $p(x, t)$  는 주파수  $\Omega$  와 일정 크기인  $P_0$  를 가지는 조화 가진으로 주어진다. 이 논문에서 모든 시간응답은  $P_0 = 1.0 \text{ N/m}$  이고  $\Omega = 24\pi \text{ rad/s}$  일 때로 계산되어졌다.

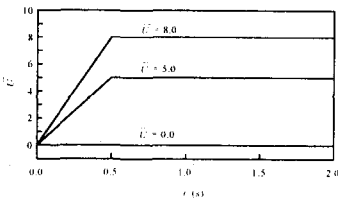


Fig. 3 Fluid velocity profiles in the pipe.

관련된 유체속도는 Fig.3 에서 보는 것처럼 무차원 유체속도  $\bar{U}$  가 0 에서부터 0.5s 까지는 선형으로 증가하다가, 그 이후의 속도는 일정하다. 수치 계산을 위해서, 기초함수의 수와 시간 단계

의 크기를 각각  $N=5$  와  $\Delta t=0.001\text{s}$  로 선택한다.

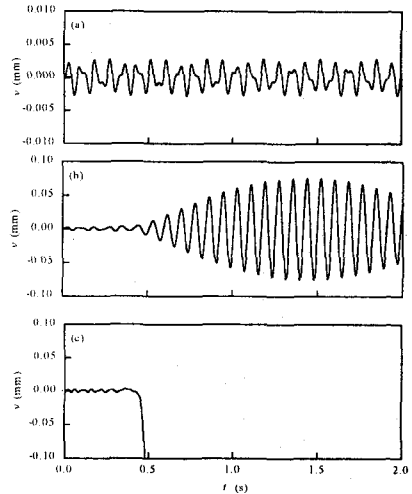
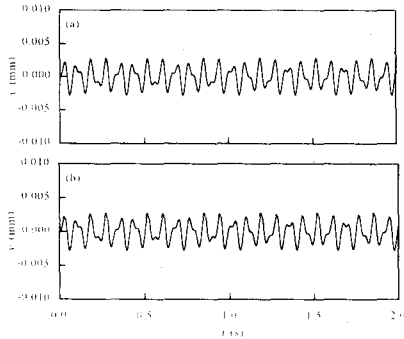


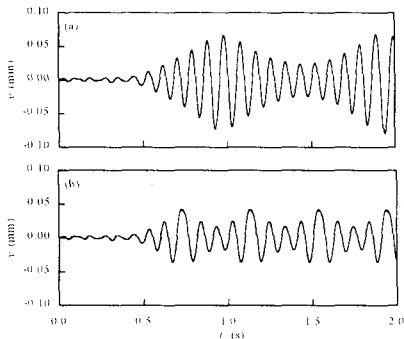
Fig. 4 Dynamic responses of the transverse displacements for the linear model at  $x = L/2$  when the fluid velocity is given by the profile corresponding to (a)  $\bar{U} = 0.0$ , (b)  $\bar{U} = 5.0$  and (c)  $\bar{U} = 8.0$  in Figure 3.

Fig. 2 에서 주어진 안정성을 검증하기 위해, 식(32)의 선형화된 경우에 대한 동특성 해석이 요구되어진다.  $x = L/2$  에서 선형모델의 횡방향 변위의 계산된 시간응답은 Fig. 4 에 도시되었다. Fig. 4(a)는 유체속도가 0 일 때 횡방향 변위의 동특성 해석을 나타낸다. 반면에, Fig. 4(b)와 4(c)는 각각 Fig. 3 에서  $\bar{U} = 5.0$  과  $\bar{U} = 8.0$  에 부합되는 횡방향 변위의 시간응답을 나타낸다. Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)에서 보여지는 것과 같이,  $\bar{U} = 0$  또는  $\bar{U} = 5.0$  일 때, 동적 응답은 안정하다. 그 안정한 응답들은 Fig. 2 에 나타난 안정성과 일치한다. 그리고 거기에서 고유치의 실수부는 0 이다. 하지만, Fig. 4(c)는 유체속도가 임계속도를 초과할 때는 응답이 불안정하다는 결과를 보여준다. 이는 또한  $\bar{U} = 8.0$  일 때, 고유치의 실수부가 양수이기 때문에, 관이 불안정하다는 것을 묘사한 Fig. 2 에서도 확인된다. 이제, 이 논문에서 제시한 비선형 모델에 대한 동적응답과 다른 비선형 모델과 비교해 보자. Païdoussis 의 식은 식(20)에서 주어진 같은 기초함수를 사용하여 이산화했고, 같은 매개변수와 물성치를 가진 generalized- $\alpha$  법을 사용함으로써 동특성을 계산했다. 우선, 유체속도  $\bar{U} = 0$  일 때, 횡방향 변위의 동특성을 살펴보자. 이 경우 비록 새로운 모델과 Païdoussis 의 모델은 다른 비선형항을 가지지만, 식(15),(16),(18)과 (19)에서 보여진 것처럼  $\bar{U} = 0$  일 때, Fig. 5 에서

보는 바와 같이, 두 모델에서 얻어진 시간응답은 거의 차이가 없다. 하지만, 유체속도가 0 이 아닐 때, 이 동특성은 Fig. 6 에서 보는 것처럼 서로 약간의 차이를 보인다. 이는 Païdoussis 의 모델에 대한 응답이 새로운 모델과 비교했을 때 더 긴 주기와 더 작은 크기를 가진다는 것을 보여준다.



**Fig. 5** Dynamic responses of the transverse displacements for the non-linear model at  $x = L/2$  when the fluid velocity is zero: (a) the new model; and (b) Païdoussis' model.



**Fig. 6** Dynamic responses of the transverse displacements for the non-linear model at  $x = L/2$  when the fluid velocity is given by the profile corresponding to  $\bar{U} = 5.0$  in Figure 3: (a) the new model; and (b) Païdoussis' model.

## 6. 결론

새로운 비선형 모델은 양단이 고정되었을 때 유체유동을 갖는 직선관의 진동해석이다. 이번 연구에서의 결과들을 다음과 같이 간략히 요약할 수 있다.

첫째, 제시된 모델은 Païdoussis 의 모델보다 더 합리적이다. 왜냐하면, 제시된 식은 단지 응력만 선형화하였지만, Païdoussis 의 식은 order-of-magnitude 근사법과 미소 변형률을 사용해서 유도하였기 때문이다.

둘째, 유체속도가 0 일 때, 새로운 모델과

Païdoussis 의 모델 양쪽이 비록 비선형항은 다르지만, 양쪽 모델의 비선형식으로 얻어진 동특성 응답에는 거의 차이가 없다.

셋째, 유체속도가 0 이 아닐 때, 새로운 모델과 Païdoussis 의 모델의 비선형 동특성 해석이 약간의 차이가 생긴다.

## 참고문헌

- (1) PAÏDOUSSIS, M. P., 1998, "Fluid-Structure Interactions, Volume 1: Slender structures and axial flow,," San Diego, CA: Academic Press Inc.
- (2) THURMAN, A. L. and MOTE, C. D., JR. 1969, "Non-linear oscillation of a cylinder containing flowing fluid,," *Journal of Engineering for Industry*, **91**, pp. 1147-1155.
- (3) DUPUIS, C. and ROUSSELET, J. ,1992, "The equations of motion of curved pipes conveying fluid,," *Journal of Sound and Vibration* ,**153**, pp. 473-489.
- (4) LEE,U., PAK,C.H., and HONG,S.C., 1995, "The dynamics of a piping system with internal unsteady flow,," *Journal of Sound and Vibration* ,**180**, pp. 297-311.
- (5) GORMAN,D.G., REESE,J.M., and ZHANG, Y. L., 2000, "Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow,," *Journal of Sound and Vibration*, **230**, pp. 379-392.
- (6) SEMLER,C., LI, G. X., and PAÏDOUSSIS, M. P., 1994, "The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid,," *Journal of Sound and Vibration*, **169**, pp. 577-599.
- (7) SEMLER,C. and PAÏDOUSSIS,M.P., 1996, "Non-linear analysis of the parametric resonances of a planar fluid-conveying cantilevered pipe,," *Journal of Fluids and Structures* ,**10**, pp. 787-825.
- (8) FUNG, Y. C., 1977, "A First Course in Continuum Mechanics,," Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc.
- (9) MCIVER, D. B., 1972, "Hamilton's principle for systems of changing mass,," *Journal of Engineering Mathematics*, **7**, pp. 249-261.
- (10)CHUNG, J. and HULBERT G.M., 1993, "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method,," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **60**, pp. 371-375.
- (11)CHUNG, J.,KANG, N.C.,and LEE, J.M., 1996, "A Study on Free Vibration of a Spinning Disk,," *KSME International Journal*, **10**, pp. 138-145.
- (12)CHUNG, J., HAN, C.S., and YI, K., 2001, "Vibration of an axially moving string with geometric non-linearity and translating acceleration,," *Journal of Sound and Vibration* ,**240**, pp. 733-746.
- (13)BLEVINS, R.D.,1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape,," Van Nostrand Reinhold.