

# 면내 방향 맥동 운동하는 외팔평판의 동적 안정성 해석

현상학\*·유홍희\*\*

## Dynamic Analysis of Cantilever Plates Undergoing Translationally Oscillating Motion

Sang-Hak Hyun, Hong-Hee Yoo

**Key Words:** Dynamic Stability(매개변수 공진), Cantilever Plate(외팔평판), Translationally Accelerated Motion(병진 가속도 운동), Multiple Time Scale Method(다중시간척도법)

### Abstract

Dynamic stability of an oscillating cantilever plate is investigated in this paper. The equations of motion include harmonically oscillating parameters which originate from the motion-induced stiffness variation. Using the multiple scale perturbation method is employed to obtain a stability diagram. The stability diagram shows that relatively large unstable regions exist when the frequency of oscillation is near twice the frequencies of the 1st torsion natural mode and the 1st chordwise bending mode.

### 1. 서론

평판 형태의 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조형태이다. 대표적인 것으로는 비행기나 로켓의 날개, 인공위성의 태양열 전지판 같은 것들이 있다. 이들 평판 구조물은 비행기나 로켓이 일정 속도로 비행한다면 외부 작용력이 없는 경우 동적 불안정성이 나타나지 않는다. 그러나 비행기나 로켓의 속도는 일정하지 않고 약간의 맥동 성분이 존재한다고 가정하는 것이 더 실제적이므로 이런 경우 맥동 성분은 매개변수 공진(parametric resonance)과 같은 동적 불안정성을 야기할 수 있다. 따라서 이러한 구조물들에 대한 동적 불안정성의 정확한 예측은 이들의 설계를 위해 필수적이라 하겠다.

강체 운동을 수반하는 평판 구조물의 진동에 관한 연구는 주로 회전 운동하는 외팔 평판에 대

하여 이루어져 왔다. 참고문헌[1-4]들은 그들 중 일부이다. 맥동 가속도 운동으로 인해 발생하는 동적 불안정성에 관한 연구는 주로 보 구조물에 대하여 이루어져 왔으며, 참고문헌[5-9]들이 대표적인 것들이다. 이들 대부분은 동적 안정성 해석 방법으로 참고문헌[10]에서 제시된 다중시간척도법을 채택하였다.

본 연구에서는 면내 방향 맥동 가속도 운동을 하는 외팔 평판의 운동방정식을 제시하고 다중시간척도법(the multiple time scales method)을 사용하여 동적 안정성을 해석하였다. 해석 결과로서 면내방향 맥동 가속도의 크기와 주파수에 따른 동적 불안정 영역들을 도시한 안정성 도표를 도출하였고, 직접 수치적분을 사용하여 안정 영역과 불안정 영역에서의 동적 반응을 구함으로써 안정성 도표의 신뢰성을 검증하는 동시에 각 동적 반응의 형태를 살펴보았다. 본 연구에서 도출한 해석 결과들은 비행하는 평판 구조물의 설계

\* 한양대학교 기계설계학과 대학원

\*\* 회원 한양대학교 기계공학부

시 기초 자료로 사용될 수 있다고 사료된다.

## 2. 운동방정식

Fig. 1은 두께가  $h$ , 가로길이  $a$ , 세로길이  $b$  를 갖는 외팔평판이 강체  $A$ 에 부착되어 있고, 강체  $A$ 가 평판의 면내 방향으로 ( $Y$  방향)  $v_2$ 속력으로 운동하고 있는 모습을 보여주고 있다. Fig. 1에서  $\rho$ ,  $\nu$ , 와  $D$ 는 평판의 물성치들을 나타내는데, 각각 단위면적 당 질량, 포아송비, 그리고 굽힘강성계수를 의미한다. 굽힘 변위  $w$ 는 다음과 같이 근사화한다.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (1)$$

여기서  $\phi_i$  와  $q_i$ 는 모드함수와 일반좌표를 나타내고,  $\mu$ 는 일반좌표 수를 나타낸다.

평판의 면외 방향 운동방정식은 참고문헌[9]에 제시된 과정을 이용하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} [M_{ij} \ddot{q}_j + K_{ij} q_j - \dot{v}_2 K_{ij}^C q_j] = 0 \quad (2)$$

( $i = 1, 2, \dots, \mu$ )

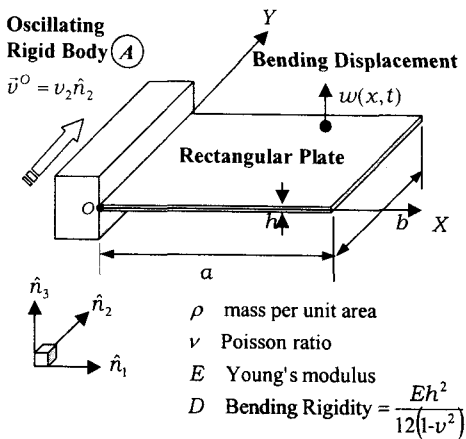


Fig. 1 Configuration of a translationally accelerated rectangular plate

여기서  $M_{ij}$ 는 질량행렬을,  $K_{ij}$ 는 면외방향 강성행렬을 나타내고,  $K_{ij}^C$ 는 면내방향 가속도  $\dot{v}_2$ 와 관련된 기하강성행렬을 나타낸다. 시스템 강성이  $\dot{v}_2$ 에 따라 변함을 알 수 있다. 각 행렬들의 성분들은 다음 식들로부터 얻어진다.

$$M_{ij} = \int_0^b \int_0^a \rho \phi_i \phi_j dx dy \quad (3)$$

$$K_{ij} = \int_0^b \int_0^a D [\phi_{i,xx} \phi_{j,xx} + \phi_{i,yy} \phi_{j,yy} + \nu \phi_{i,xx} \phi_{j,yy} + 2(1-\nu) \phi_{i,xy} \phi_{j,xy}] dx dy \quad (4)$$

$$K_{ij}^C = \int_0^b \int_0^a \rho (b-y) \phi_{i,y} \phi_{j,y} dx dy \quad (5)$$

여기서 아래첨자 표시 중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이에 대한 편미분으로 예를들어  $\phi_{i,xx}$ 는  $\phi_i$ 를  $x$ 로 두번 편미분한 것을 의미한다.

식(2)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수와 매개변수, 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad (6)$$

$$\zeta \equiv \frac{x}{a}, \quad (7)$$

$$\eta \equiv \frac{y}{b}, \quad (8)$$

$$\delta_j \equiv \frac{q_j}{a}, \quad (9)$$

$$\delta \equiv \frac{a}{b} \quad (10)$$

여기서

$$T = \sqrt{\frac{\rho a^4}{D}} \quad (11)$$

식들 (6-11)을 이용하면 식(2)는 다음과 같이 무차원 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} [\bar{M}_{ij} \delta_j + \bar{K}_{ij} \delta_j - \dot{\bar{v}}_2 \bar{K}_{ij}^C \delta_j] = 0 \quad (12)$$

( $i = 1, 2, \dots, \mu$ )

여기서 위 첨자에 사용된 점은 무차원 시간  $\tau$ 에 대한 미분을 의미한다.  $\dot{\bar{v}}_2$ 는 면내 방향 무차원

가속도로서  $v_2(T^2/b)$ 이다. 사용된 무차원 행렬들은 다음과 같다.

$$\bar{M}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi d\eta \quad (13)$$

$$\bar{K}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 [\varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\xi\xi} + \delta^4 \varphi_{i,\eta\eta} \varphi_{j,\eta\eta} + \nu \delta^2 \varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\eta\eta} + 2(1-\nu) \delta^2 \varphi_{i,\xi\eta} \varphi_{j,\xi\eta}] d\xi d\eta \quad (14)$$

$$\bar{K}_{ij}^C = \int_0^1 \int_0^1 (1-\eta) \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta} d\xi d\eta \quad (15)$$

여기서  $\varphi_i(\xi, \eta)$ 는 무차원 모드함수로서  $\phi_i(x, y)$ 와 동일 값을 갖는 함수이다.

### 3. 동적 안정성 해석 방법

본 장에서는 면내 방향 가속도가 맥동 성분을 포함하고 있을 때, 시스템의 동적 안정성을 해석하기 위한 안정성 해석모델을 제시하고 다중시간척도법을 사용한 안정성 해석 방법에 대해 설명한다. 면내 방향 속도  $v$ 가 다음과 같다고 가정한다.

$$v = v_0 + \gamma \sin \omega \tau \quad (16)$$

여기서  $v_0$ 는 평균 속도를 나타내고,  $\gamma$ 와  $\omega$ 는 각각 맥동 속도 성분의 진폭 및 진동수를 나타낸다. 식 (16)을 미분하여 가속도를 구하고 이를 식 (12)에 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^4 [\bar{M}_{ij} \delta_j + (\bar{K}_{ij} + \gamma \omega \cos \omega \tau \bar{K}_{ij}^C) \delta_j] = 0 \quad (17)$$

위 식으로부터 맥동 가속도 성분  $\gamma \omega \cos \omega \tau$ 는 시스템 강성을 주기적으로 변화케 하는 매개변수 진동 성분임을 알 수 있다.

다중시간척도법을 사용하여 식 (17)의 동적 안정성 해석을 수행하고자 한다. 우선, 식들 (13-15)에서 모드함수  $\varphi_i$ 를 맥동 가속도 성분이 없을 때의 고유정규모드들로 사용하면, 행렬  $\bar{M}_{ij}$ ,  $\bar{K}_{ij}$ , 그리고  $\bar{K}_{ij}^C$ 들은 다음과 같이 나타난다.

$$[\delta_{ij}] = [\bar{M}_{ij}] \quad (18)$$

$$[\omega_i^2 \delta_{ij}] = [\bar{K}_{ij}] \quad (19)$$

$$[F_{ij}] = [\bar{K}_{ij}^C] \quad (20)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 크로벡터 델타함수이다. 식들 (18-20)을 식 (17)에 대입하면 다시 써보면 다음과 같다.

$$\delta_j + \omega_i^2 \delta_i + 2\epsilon \cos \omega \tau \sum_{j=1}^4 F_{ij} \delta_j = 0 \quad (21)$$

여기서  $2\epsilon$ 은  $\gamma \omega$ 를 나타내며, 충분히 작다고 가정한다.

다중시간척도법은 식 (21)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\delta_i = \delta_i^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon \delta_i^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 \delta_i^{(2)}(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (21)$$

여기서  $T_0, T_1, T_2$ 는 시간척도(time scales)를 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$T_0 = \tau, T_1 = \epsilon \tau, \text{ and } T_2 = \epsilon^2 \tau \quad (22)$$

식 (22)에 의해 시간 미분은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 \quad (23)$$

여기서  $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}$ 이다. 식 (22)와 식 (23)을 식 (21)에 대입하고,  $O(\epsilon^2)$ 까지 고려하면 다음과 같은 전개식들이 나타난다.

$O(1)$ :

$$D_0^2 \delta_i^{(0)} + \omega_i^2 \delta_i^{(0)} = 0 \quad (24)$$

$O(\epsilon)$ :

$$D_0^2 \delta_i^{(1)} + \omega_i^2 \delta_i^{(1)} = -2D_0 D_1 \delta_i^{(0)} - 2\cos \omega \tau \sum_{j=1}^4 F_{ij} \delta_j^{(0)} \quad (25)$$

$O(\epsilon^2)$ :

$$D_0^2 \vartheta_i^{(2)} + \omega_i^2 \vartheta_i^{(2)} = -D_1^2 \vartheta_i^{(0)} - 2D_0 D_2 \vartheta_i^{(1)} - 2 \cos \omega \tau \sum_{j=1}^n F_{ij} \vartheta_j^{(1)} \quad (26)$$

위 식들의 해를 해석적으로 구할 수 있는데, 먼저 식 (24)의 일반해를 구하면 다음과 같다.

$$\vartheta_i^{(0)} = A_i(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + \overline{A}_i(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0} \quad (27)$$

여기서  $\overline{A}_i$ 는  $A_i$ 의 켈레 복소수를 나타낸다. 식 (27)을 식 (25)에 대입하고  $\vartheta_i^{(1)}$ 를 구한다. 그 과정은 참고문헌 [10]에 자세히 수록되어 있으므로 여기서는 생략한다. 이 과정에서  $A_i$ 는 다음과 같이 복소 지수 함수로 나타난다.

$$A_i = a_i e^{i\lambda T_1} \quad (28)$$

여기서  $a_i$ 와  $\lambda$ 는 복소수 상수이다.  $\lambda$ 가 음의 허수부를 가지면  $A_i$ 는 시간이 지남에 따라 발산하게 되므로, 결과적으로 식 (27)의  $\vartheta_i^{(0)}$ 는 불안정해가 된다. 식 (25)와 식 (26)으로부터 유도된  $\lambda$ 에 대한 특성방정식은 다음과 같다.

[Case 1]  $2\omega = \omega_k + \omega_l + \varepsilon^2 \sigma$

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma - \chi_l + \chi_k) + \chi_k(\sigma - \chi_l) + \mu_{kl}\mu_{lk} = 0 \quad (29)$$

여기서  $\sigma$ 는  $\omega$ 가  $\omega_k + \omega_l$  근치임을 나타내는 파라미터이며,  $\chi_k$ 와  $\mu_{kl}$ 은 다음과 같다.

$$\chi_k = \sum_{r=1}^n \frac{F_{kr} F_{rk}}{2\omega_k} \left[ \frac{1}{(\omega_k + \omega)^2 - \omega_r^2} + \frac{1}{(\omega_k - \omega)^2 - \omega_r^2} \right] \quad (30)$$

$$\mu_{kl} = \sum_{r=1}^n \frac{F_{kr} F_{rl}}{2\omega_k} \left[ \frac{1}{(\omega_l - \omega)^2 - \omega_r^2} \right] \quad (31)$$

[Case 2]  $\omega = \omega_p + \omega_q + \varepsilon \sigma$

$$(\lambda - \sigma)^2 + \lambda(\sigma + \varepsilon \gamma_1) + \frac{1}{4} \frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q} + \varepsilon \sigma \gamma_2 = 0 \quad (32)$$

여기서

$$\gamma_1 = \frac{1}{8} \frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q} \left( \frac{1}{\omega_q} - \frac{1}{\omega_p} \right) + \widehat{\chi}_q - \widehat{\chi}_p \quad (33)$$

$$\gamma_2 = \widehat{\chi}_q - \frac{1}{8\omega_p} \frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q} \quad (34)$$

여기서

$$\widehat{\chi}_p = \sum_{r=1}^n \frac{F_{pr} F_{rp}}{2\omega_p} \left[ \frac{1}{(\omega_p + \omega)^2 - \omega_r^2} \right] + \sum_{r=q}^n \frac{F_{pr} F_{rp}}{2\omega_p} \left[ \frac{1}{(\omega_p - \omega)^2 - \omega_r^2} \right] \quad (35)$$

식 (29)와 식 (32)는  $\lambda$ 에 대한 2차 방정식이며,  $\omega$ 와  $\varepsilon$ 가 변함에 따라  $\lambda$ 는 실수근을 갖기도 하고 복소근을 갖기도 한다. 따라서  $\omega$ - $\varepsilon$  평면 상에서 실수근을 갖는 안정 영역과 복소근을 갖는 불안정 영역들을 도출할 수 있다.

#### 4. 수치 해석결과 및 토의

Table 1과 Fig. 2은 안정성 해석시 사용한 고유모드의 고유진동수들과 모드형상을 보여준다. 이들은  $\delta=1$ 로 정사각형 모양의 평판이며, 포와 송비  $\nu$ 가 0.3인 경우이다. 첫 번째 모드는 1st Bending, 두 번째 모드는 1st Torsion, 세 번째 모드는 2nd Bending, 네 번째 모드는 Chordwise Bending, 그리고 다섯 번째 모드는 Bending과 Torsion의 조합모드이다. 참고로 이들 고유모드들은 다음과 같이 미리 35개 가상 모드들을 가지고 수렴성을 확인한 모드들이다.

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \varphi_j^X(\xi) \varphi_k^Y(\eta) \quad (36)$$

( $j=1, 2, \dots, 5, \quad k=1, 2, \dots, 7$ )

여기서  $i$ 는  $j$ 와  $k$ 가 변할 때마다 증가한다.  $\varphi_i^X$ 는 외팔보 고유함수들로, 그리고  $\varphi_i^Y$ 는 강체모드를 포함한 양단 자유보 고유함수들로 구성하였다.

Fig. 3은 안정성 해석을 수행하여 얻은 안정성 지표이다. 가로 축은 맥동 가속도의 주파수  $\omega$ 이

**Table 1 dimensionless natural frequencies ( $\delta=1$ )**

dimensionless natural frequencies ( $\omega_i$ )				
1st	2nd	3rd	4th	5th
3.502	8.567	21.473	27.579	31.886

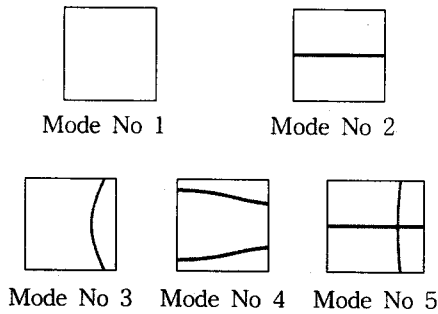


Fig. 2 Natural Modes of a cantilever plate with nodal line patterns

고 세로 축은 맥동 가속도의 크기  $\varepsilon$ 이다. 빗금친 영역이 불안정 영역으로서 이 영역에서 굽힘 변위가 발생하면 매개변수 공진에 의해 그 크기가 무한대로 발산한다.  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_4$  그리고  $\omega_2 + \omega_4$ 에서 시작하는 불안정 영역이 다른 영역들보다 훨씬 크게 나타난다. 특히  $2\omega_1$ 에서 시작하는 불안정 영역은 매우 협소하여 마치 직선처럼 보인다. 이러한 결과들은 Y방향 즉 고정단의 길이 방향으로 가해지는 매개변수 진동이 1st Bending 모드에는 거의 영향을 주지 못하고, 1st Torsion과 Chordwise Bending 모드에 큰 영향을 줌으로써 나타난다고 할 수 있다.

Fig. 4는 Fig. 3의 안정성 도표에 표시한 A, B, C, 그리고 D 점들에 대한 각각의 동적 반응들을

보여준다. A와 B점은 안정 영역에 속하고 C와 D점은 불안정 영역에 속하는데, B와 C점은 각각 경계 영역에 가까이 위치하고 있다. 동적 반응들은 직접 수치적분을 통해 얻었으며, 모든 경우에 초기치는  $\dot{\theta}_2(0) = 0.1$ , 나머지 초기치들은 모두 0으로 설정하였다. Fig. 4(a)와 (b)는 A와 B점의 동적 반응으로서 안정된 모양인 반면, Fig. 4(c)와 (d)는 C와 D점의 동적 반응들로 불안정하여 발산하는 모양을 보인다. 이들은 Fig. 3의 안정성 도표와 일치하는 결과들이다. 경계 영역에 가까운 B와 C점은 각각 특징을 갖는데, B점은 맥놀이 현상과 비슷한 형태를 띠고, C점은 D점과 같은 진동의 크기가 지수적으로 발산하지만 그 정도가 D점의 경우보다는 느리게 진행되고 있음을 볼 수 있다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 맥동 가속도 운동하는 외팔 평판 구조물에 대한 동적 안정성 해석을 수행하였다. 안정성 해석은 평판의 무차원 운동방정식로부터 가속도를 단순 조화 함수로 가정하고, 다중 시간척도법을 사용하여 수행하였다. 해석결과로 안정성 도표를 도출하였으며, 여기서 맥동 가속도의 주파수가 고유진동수들의 값  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_4$  그리고  $\omega_2 + \omega_4$ 의 근처에서 폭

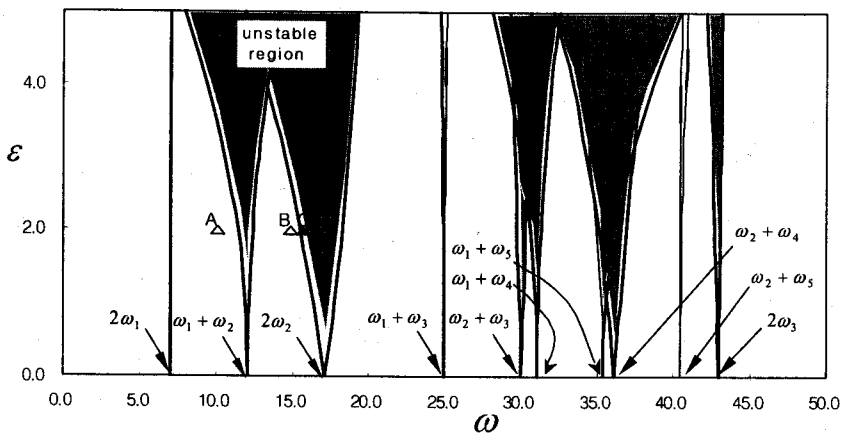


Fig. 3 Dynamic stability of a cantilever plate undergoing in-plane directional oscillating motion

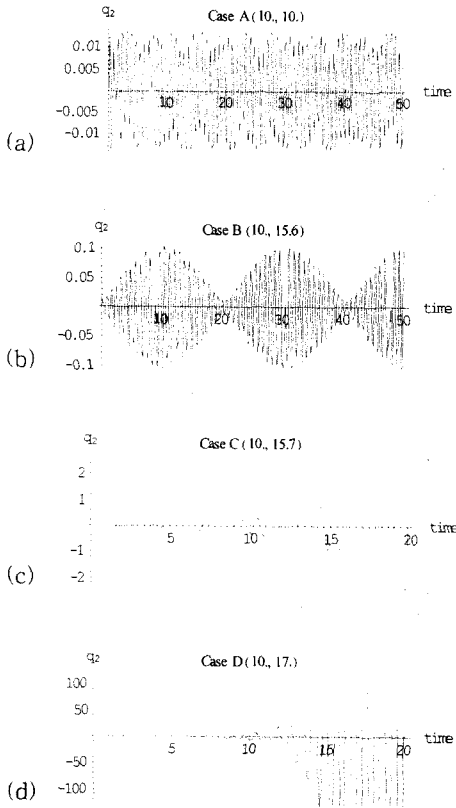


Fig. 4 Dynamic responses of A, B, C and D point in Fig. 3

넓은 불안정 영역이 나타남을 볼 수 있었다. 이 불안정 영역들은 1st Torsion 고유모드와 Chordwise Bending 고유모드와 연관되며, 1st 와 2nd Bending 모드와는 크게 관련이 없음을 알았다. 안정성 도표의 신뢰성은 직접 수치적분에 의해 동적 반응들을 구함으로써 확인하였다. 이러한 해석 결과들은 비행 평판 구조물 설계에서 유용한 참고자료가 될 것이며, 이와 유사한 구조물의 안정성 해석에도 도움이 될 것으로 사료된다.

### 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

- (1) M. Dokainish and S. Rawtani, 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 233-248.
- (2) V. Ramamurti and R., Kielb, 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429-449.
- (3) 유흥희, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석", *대한기계학회논문집*, 제17권, 제3호, pp. 652-657.
- (4) H. H. Yoo and J. Chung, 2001, "Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motion," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 1, pp. 123-137.
- (5) T. Beal, 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," *J. AIAA*, 3, pp.486-494.
- (6) D. G. Beale and R. A. Scott, 1990, "The stability and response of a flexible rod in a quick return mechanism," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 141, No. 2, pp. 277-289
- (7) J. H. Kim and Y. S. Choo, 1998, "Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, pp. 623-636.
- (8) T. H. Tan, H. P. Lee, G.S.B. Leng, 1997, "Dynamic stability of a radially rotating beam subjected to base excitation," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 146, pp. 265-279.
- (9) Hyun, H. H. and Yoo, H. H., 1999, "Dynamic modelling and stability analysis of axially oscillating cantilever beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 3, pp. 543-558.
- (10) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 62, pp. 375-381.