

복합재료 회전축의 진동해석

김 원 석*

Vibration Analysis of a Rotating Composite Shaft

Wonsuk Kim

Key Words : Rotating Shaft (회전축), Fiber-Reinforced Composite (섬유강화 복합재), Boring bar (보오링 바), Drive Shaft (구동축)

Abstract

Laboratory tests are conducted to validate the mechanical model of a filament-wound composite shaft. Also, design charts are produced by validated analytical calculations based on the Timoshenko beam model of a layered steel/composite structure. The major results found are that steel/composite hybrid shafts can lead to better dynamic and static performances over steel or pure composite shafts of the same volume, and the most effective composite structures contain some steel in the form of a tubular core. These results can be used in the design process of composite boring bars and automotive drive shafts.

1. 서론

탄소섬유 강화 복합재료 (carbon fiber reinforced composite material) 는 금속재료에 비해 무게가 가볍고 또 강도가 높기 때문에 최근 들어 기계구조물에 널리 사용되고 있으며, 이러한 복합재료 구조물의 동특성을 예측하기 위한 기계적 모델의 개발도 많은 연구의 대상이 되고 있다. Kim 등⁽¹⁾ 은 필라멘트 와인딩 (filament winding) 기법으로 만들어지고, 축방향을 따라 테이퍼진 복합재료 회전축의 동특성 해석을 위한 기계적 모델을 Timoshenko 보 (beam) 이론에 기초하여 개발하였다.

본 연구에서는 참고문헌 (1)에서 개발된 모델의 타당성을 검증하기 위해 탄소섬유를 이용하여 복합재료 축을 제작하고, 고유진동수를 측정하여 모델을 통해 예측한 값과 비교하였다. 또한 검증된 모델을 이용하여 굽힘 (bending) 및 비틀림 (torsion) 변형에 대한 강성 (stiffness) 과 고유 진동수에 관한 기초 해석을 수행하였고, 이는 복합재료 보오링 바 (boring bar)나 자동차 구동축 (drive shaft) 등의 개발에 기초자료로 사용될 수 있다.

2. 기계적 모델과 운동방정식

Fig.1 은 탄소섬유를 사용하여 필라멘트 와인딩 기법으로 만들어진 복합재료 축이다. 축방향을 따라 원형 단면의 지름이 변하고 있고, 일정한 각속도 Ω 로 회전하고 있다. 참고문헌 (1)에서 이에 대한 기계적 모델과 운동방정식이 Timoshenko 보 이론에 기초하여 얻어졌으며, 만약 단면의 지름이 축방향을 따라 일정하고 회전축에 외력이 작용하지 않는 상태라면 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{u}_x - \kappa K_v^s (u'_x - \psi_x)' + K_{vM}^o \psi_y'' = 0 \tag{1}$$

$$m\ddot{u}_y - \kappa K_v^s (u'_y + \psi_y)' + K_{vM}^o \psi_x'' = 0 \tag{2}$$

$$I_y \ddot{\psi}_x - I_z \Omega \dot{\psi}_y - K_M \psi_x'' + \kappa K_{Mv}^o (u'_y + \psi_y)' - \kappa K_v^s (u'_x - \psi_x) + K_{vM}^o \psi_y' = 0 \tag{3}$$

$$I_x \ddot{\psi}_y + I_z \Omega \dot{\psi}_x - K_M \psi_y'' + \kappa K_{Mv}^o (u'_x - \psi_x)' + \kappa K_v^s (u'_y + \psi_y) - K_{vM}^o \psi_x' = 0 \tag{4}$$

$$m\ddot{u}_z - K_p u_z'' - K_{T\tau} \phi'' = 0 \tag{5}$$

$$I_z \ddot{\phi} - K_T \phi'' - K_{T\tau} u_z'' = 0 \tag{6}$$

* 한양대학교 BK21 기계분야사업단

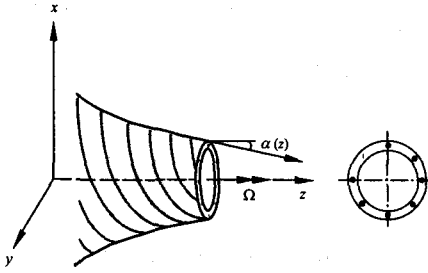


Fig. 1 Single lamina of a rotating, tapered, filament-wound composite shaft.



Fig. 2 Carbon fiber (Mitsubishi's K13A10) reinforced composite shaft.

여기서 xyz 는 관성 좌표계이며, u_x, u_y, u_z 는 각각 x, y, z 방향으로의 중립축 변위이다. ψ_x 와 ψ_y 는 각각 y 축과 x 축에 대하여 굽힘변형에 의한 회전각도를 의미하며, ϕ 는 z 축에 대한 비틀림 각도이다. m 은 단위길이 당 질량, I 는 단위길이 당 질량 관성 모멘트, 그리고 κ 는 Timoshenko 전단계수 (shear coefficient) 를 나타내며, 프라임 ($'$) 과 점 (\cdot) 은 각각 z 와 시간 t 에 대한 미분을 의미한다.

$K_v^s, K_{vm}^s, K_m^s, K_{mv}^s, K_p, K_{pv}, K_r, K_{rp}$ 는 축의 기하학적 형상과 재료의 물성치에 대한 함수로 표현되며, 자세한 것은 참고문헌 (1)에 설명되어 있다.

굽힘운동과 관련된 식(1)-(4)는 회전에 의한 자이로스코프 효과 (gyroscopic effect) 와 비등방성 물질에 따른 영향으로 서로 연성 되어 있으나, 인장 및 비틀림 운동과 관련된 식(5), (6) 과는 연성 되어 있지 않다. 인장과 비틀림 운동은 복합재료의 특성에 의해 서로 연성 되어 있다.

3. 모델의 검증

3.1 복합재료 축의 제작 및 실험

기계적 모델의 검증을 위해 필라멘트 와인딩 기법을 사용하여 복합재료 축이 제작되었다. 탄소 섬유로는 Mitsubishi Chemical의 K13A10이 사용되었으며 에폭시 (epoxy) 에 의해 섬유간의 간격이

채워졌다. 상용 보링바의 제원을 기초로하여 외경 (OD, Outer Diameter) 31.75mm, 내경 (ID, Inner Diameter) 19.05mm인 중공축 (hollow shaft) 이 제작되었으며, 각 복합재료 층의 섬유각도는 축 중심에 가까운 층부터 시작하여 $0^\circ/\pm 45^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ$ 이다. 여기서 $\pm 45^\circ$ 로 이루어진 층은 전체 두께의 약 10% 정도이다.

Fig.2 는 제작된 복합재료 축이며 고무밴드에 의해 공중에 매달린 상태에서 임팩트 햄머 (impact hammer) 와 가속도계를 사용하여 진동신호를 측정하였다. OROS data-acquisition 시스템이 사용되었고, 모달 댐핑과 모드형상 해석을 위해 LMS 소프트웨어가 사용되었다.

3.2 수치해석

주어진 운동방정식에 대한 해석적 해를 구하는 것이 거의 불가능하기 때문에 Galerkin 근사해법⁽²⁾ 이 사용되었다. 경계조건은 실험시의 상황과 같도록 자유-자유조건 (free-free boundary condition) 이 사용되었고, 시뮬레이션을 위한 물리적 성질은 탄소 섬유와 에폭시의 특성으로부터 rule of mixture 를 이용하여 계산되었다. 제작된 복합재료축의 탄소 섬유 체적비는 약 55%이며 이에 따른 기계적 성질은, 밀도 $\rho=1732\text{kg/m}^3$, 탄성계수 $E_1=435\text{GPa}$, $E_2=9.0\text{GPa}$, 전단탄성계수 $G_{12}=3.1\text{GPa}$, $G_{23}=3.2\text{GPa}$, 프와송비 (Poisson's ratio) $\nu_{12}=0.31, \nu_{23}=0.39$ 이다.

Table 1. The lowest natural bending frequency

L/OD (길이/외경)	1차 굽힘 고유 진동수 (Hz)	
	실험	수치해석
6.4	5047	4865
9.6	3069	2950

3.3 결과비교

Table 1 은 길이가 각각 203.2mm (L/OD=6.4) 와 304.8mm (L/OD=9.6) 인 두축의 1차 굽힘 고유진동수에 대한 실험과 수치해석 결과이다. 실험과 수치해석의 차이는 약 4%로서 오차 범위 내에서 기계적 모델의 타당성이 검증되었다고 볼수 있다. 참고로 전단 변형이 고려되지 않은 Rayleigh 보 이론을 사용하여 수치해석을 수행하였을 경우 Timoshenko 보 이론과의 차이는 L/OD=6.4인 경우 약 123%, L/OD=9.6인 경우 약 68%이다. 동일한 형상과 크기를 갖는 강철축의 경우 두 이론에 의한 고유진동수의 차이가 L/OD=6.4, 9.6인 경우에 각각 약 5%와 2%인 것과 비교할 때 복합재료 축

에서 보여지는 두 이론 간의 차이는 상당히 크다. 이는 복합재료의 전단탄성계수가 강철에 비해 매우 적음에 기인한 것으로, 복합재료 축의 해석에 있어서는 비록 직경에 비해 길이가 긴 축이라 하더라도 Timoshenko 보 이론을 사용하는 것이 안전함을 보여준다.

측정된 진동신호로부터 LMS를 이용하여 감쇠비를 구하였다. 실험에 사용된 복합재료 축의 경우 감쇠비는 약 1.1% - 1.8% 정도였으며, 강철축의 실험결과 (약 0.2%) 와 비교할 때 매우 높은 값이다. 이는 안정성을 위해 높은 감쇠비가 요구되는 구조물에 복합재료가 효과적으로 사용될 수 있음을 보여준다.

4. 단면 설계

4.1 굽힘

강철과 비교해 볼 때 복합재료의 장점 중 하나는 질량에 비해 탄성계수가 매우 큰 것이다. 본 연구에 사용된 탄소섬유/에폭시 복합재료의 경우는 강철에 비해 밀도가 약 22% 정도로 매우 가볍고, 반면 탄성계수는 약 2배 정도 큰 값을 갖는다. 따라서 복합재료 축의 경우 강철 축에 비해 높은 고유진동수와 굽힘강성이 기대된다. 그러나 이러한 기대가 항상 만족되는 것은 아니며, 대부분의 경우 최적의 고유진동수와 굽힘강성을 얻기 위해서는 복합재료와 강철을 같이 사용하여 축을 제작하는 것이 효과적이다. 이는 기본적으로 복합재료의 전단탄성계수가 매우 작음에 기인한다.

실제로 Nagano 등⁽³⁾은 섬유각도 (fiber angle) 가 모두 0° 인 회전하지 않는 복합재료 보어링 바를 제작하여 실험했으며, 전단변형에 의한 고유진동수의 감소를 막기위해 몇 가지 형태의 강철코어 (steel core) 을 사용하여 그 효과를 증명하였다. 그들의 연구에 의하면 십자형과 직사각형의 강철축이 좋은 효과를 보여주나, 이는 필라멘트 와인딩 기법으로는 제작이 불가능한 형상의 복합재료 축이다. 따라서 본 논문에서는 각 층별로 섬유각도를 자유롭게 변화시켜 축의 기계적 성질을 조절하는 것이 가능한 필라멘트 와인딩 기법으로 제작이 가능하고, 또한 자동차의 구동축이나 회전하는 보어링 바 등에 사용되도록 원형 또는 중공의 축대칭 단면형상을 대상으로 하여, 최적의 고유진동수와 굽힘강성을 갖는 강철/복합재료 혼합 축 (steel/composite hybrid shaft) 을 설계하기 위한 기초 연구를 수행하였다.

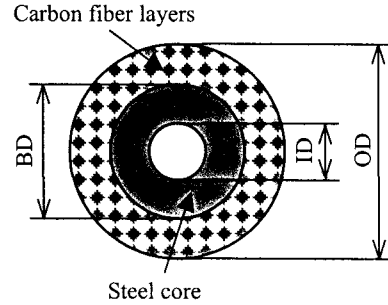


Fig. 3 Cross-section of a steel/composite hybrid shaft.

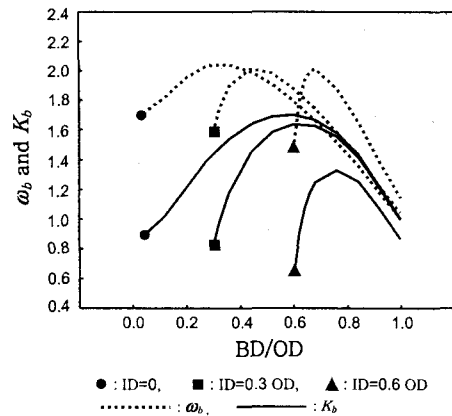


Fig. 4 ω_b and K_b versus BD/OD ($L/OD = 4.16$).

Fig.3 은 수치해석 및 최적설계의 대상인 강철/복합재료 혼합축의 단면이다. OD는 축의 외경, ID는 내경, BD는 강철코어와 복합재료의 경계에 해당하는 직경이며, 복합재료 부분의 섬유각도는 (0°), / ±45° 이다. Fig.4 는 OD가 고정되어 있고 (=31.75mm, L/OD =4.16) ID가 서로 다른 세 종류의 값 (=0, 0.3OD, 0.6OD) 을 가질 때, BD의 변화에 따른 굽힘 고유진동수와 굽힘 강성을 나타낸 것이다. 수평축은 BD를 OD로 나뉜 값으로, 1은 강철로만 제작된 축을 나타내고 0에 가까울수록 복합재료로 만들어진 부분이 강철코어에 비해 많음을 의미한다. 점선은 굽힘 고유진동수를 (ω_b), 실선은 굽힘강성을 (K_b) 나타내며, 각각 강철로만 만들어진 축 (OD= 31.75mm, ID=0)의 값에 대하여 무

차원화 되어 있다. 고유진동수는 식 (1)-(4) 로 부터 수치해석을 통해 구해졌으며, 회전속도 Ω 는 0 으로 가정하였다 (회전속도에 의한 영향은 다음에 논의 될 것이다). 굽힘강성은 축의 끝단에 가해진 일정한 하중에 대한 그점의 변위로부터 계산되었으며 Castigliano 의 이론을 사용하였다. 그림으로부터 최대의 진동수와 강성을 갖는 최적 BD 값이 각각 존재함을 알 수 있으며, 이와 같은 자료는 복합재료를 이용하여 보어링 바나 자동차 구동축 등을 설계/제작 할때 기초자료로 사용될 수 있다. 예를 들어, $BD/OD=0.6$ 인 경우 $ID=0.3OD$ 인 중공축 (hollow shaft)과 $ID=0$ 인 중실축 (solid shaft)이 거의 비슷한 굽힘강성과 진동수를 보이거나 무게는 중공축이 훨씬 가볍고, 따라서 중공축의 사용이 좀더 좋은 설계가 될 것이다.

참고로, Fig.5 는 $ID=0.3OD$ 인 중공축의 경우에 Timoshenko 보 이론과 Rayleigh 보 이론을 비교한 것이다. 복합재료로 이루어진 부분이 많아 질수록 (즉, BD/OD 가 작아질수록) 두 이론사이의 차이가 커짐을 알 수 있다. 또한, 그림에서 알 수 있듯이 Rayleigh 보 이론을 사용한 경우에는 최대 진동수와 강성을 갖는 최적 BD의 값을 예측할 수 없으므로, 복합재료축의 해석에는 Timoshenko 보 이론을 사용하는 것이 권장된다.

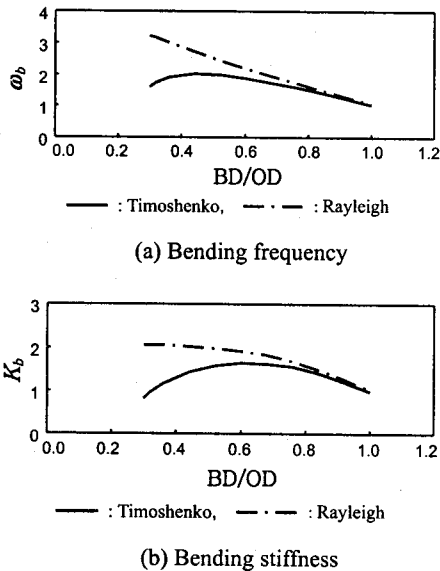


Fig. 5 Timoshenko beam versus Rayleigh beam .

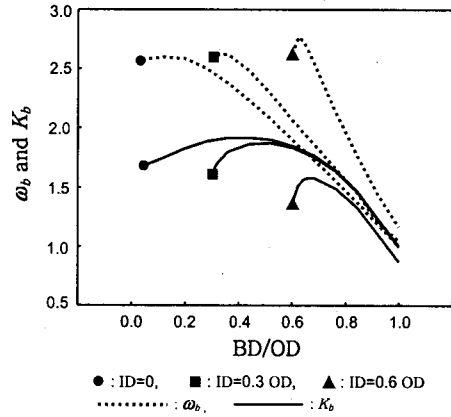


Fig. 6 ω_b and K_b versus BD/OD ($L/OD=10.6$).

Fig.6 은 Fig.4 와 같은 의미를 가지나 축의 길이가 늘어나 $L/OD=10.6$ 인 경우이다. 일반적으로 강철 축에서는 $L/OD>10$ 인 경우 전단변형의 영향을 무시할 수 있고, 따라서 Rayleigh 보 이론을 사용해도 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 Fig.6 에 의하면 100% 복합재료로 이루어진 축이 최적설계 값이 아님을 알 수 있고 이러한 결과는 Rayleigh 보 이론으로부터는 얻어지지 않는다. 이는 앞장에서도 언급했듯이 복합재료 축의 경우 $L/OD>10$ 이라도 전단변형의 영향을 무시할 수 없으며, 따라서 Timoshenko beam 이론이 사용되어야 함을 의미한다.

4.2 비틀림

보어링 바나 구동축 같은 회전축의 설계시에는 굽힘 뿐만 아니라 비틀림 변형도 고려되어야 한다. Fig.7 은 $OD=31.75\text{mm}$, $L/OD=4.16$ 이고, $ID=0.3OD$ 인 중공축에 대하여 BD 의 변화에 따른 비틀림 고유진동수(ω_t), 강성(K_t)을 나타낸 것이다. 점선은 진동수를 실선은 강성을 나타내며, 각각 강철로만 만들어진 축의 값에 대하여 무차원화 되어 있다. BD/OD 의 값이 작아짐에 따라 (즉, 복합재료의 비율이 높아짐에 따라) 진동수와 강성 모두 저하됨을 알 수 있고, 이는 앞서 언급했듯이 복합재료의 전단탄성계수가 작음에 기인한다. 이는 단점이 될 수 있으며, 따라서 복합재료를 이용하여 회전축을 설계 할 경우, 굽힘 운동뿐만 아니라 Fig.7 과 같은 결과를 바탕으로 비틀림 운동의 해석에도 세심한 주의가 요구된다.

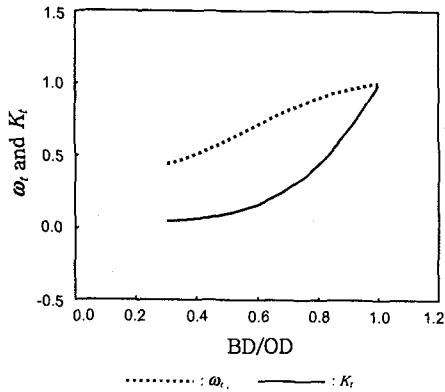


Fig. 7 ω_n and K , versus BD/OD ($L/OD=4.16$).

4.3 회전속도의 영향

Fig.8 은 $OD=31.75\text{mm}$, $L/OD=4.16$, $ID=0.3OD$ 인 복합재료 증공축에 대한 Campbell diagram 으로서, 회전속도가 증가함에 따라 굽힘 고유진동수가 두 개의 값으로 갈라지는 현상을 보여준다 (축의 회전속도와 고유진동수는 회전하지 않는 경우의 고유진동수에 의해 무차원화 되어있다). 기존 등방성재료의 Campbell diagram 과 비교해 볼 때 특별한 현상은 관측되지 않았다.

그러나 축이 회전함에 따라, 원심력에 의해 반경방향과 원주방향의 응력이 발생하고 이는 회전속도의 제곱에 비례하여 커진다. 탄소섬유로 만들어진 축의 경우 섬유 각도에 따라서, 원심력에 의해 생긴 응력을 견디지 못하는 층이 생길 가능성이 매우 높으므로, 고속 회전하는 경우 이에 대한 해석 또한 요구된다⁽⁴⁾.

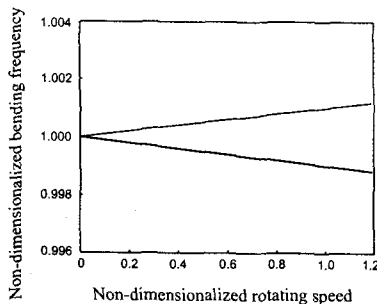


Fig. 8 Campbell diagram.

5. 결론

탄소섬유와 에폭시를 사용하여 복합재료 축을 제작하고, 이로부터 굽힘 고유진동수와 감쇠를 측정하였다. 측정된 고유진동수는, 복합재료 회전축의 진동특성 해석을 위해 개발된 기계적 모델로부터 계산된 값과 잘 일치 하였다. 검증된 기계적 모델을 이용하여 강철/복합재료 혼합축의 단면설계를 위한 수치해석을 수행하였고, 이를 근거로 하여 축 중심에 강철 튜브가 있고 이를 탄소섬유가 감싸고 있는 형태가, 굽힘 진동수와 굽힘 강성의 관점에서 볼 때 가장 효과적인 구조임을 보였다. 또한 복합재료의 사용에 따른 비틀림 진동수와 강성의 변화를 해석했으며, 이와 같은 결과들은 복합재료 축의 설계에 기초 자료로 사용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Kim, W., Argento, A., and Scott, R. A., 1999, "Free Vibration of a Rotating Tapered Composite Timoshenko Shaft," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, pp.125-147.
- (2) Leipholz, H., 1987, *Stability Theory: An Introduction to the Stability of Dynamic Systems and Rigid Bodies*, pp.120-135, New York: John Wiley & Sons, second edition.
- (3) Nagano, S., Koizumi, T., Fujii, T., and Tsujiuchi, N., 1995, "Development of a CFRP Boring Bar," *27th International SAMPE Technical Conference*, Vol. 27, pp.397-408.
- (4) Kim, W., Argento, A., and Scott, R. A., 2001, "Rotating Tapered Composite Shafts: Forced Torsional and Extensional Motions and Static Strength," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.123, pp.24-29.