

병진 가속도 운동을 하는 외팔평판의 진동해석

김성균* · 유홍희**

Vibration Analysis of Cantilever Plates Undergoing Translationally Accelerated Motion

Sung-Kyun Kim, Hong-Hee Yoo

Key Words: Vibration Analysis(진동해석), Cantilever Plate(외팔평판), Translationally Accelerated Motion(병진 가속도 운동), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape Variation(모드 형상 변화), Natural Frequency Loci Veering(고유진동수 휨현상)

Abstract

A structure which is accelerated in the chordwise direction induces variation of the bending stiffness due to inertia force. Thus, the characteristic of natural vibration is also changed. This paper presents a modeling method for the vibration analysis of translationally accelerated cantilever plates. The dependence of natural frequencies and modes on the acceleration changes of the plate is investigated. Particularly, a natural frequency loci veering is observed and discussed in the present study.

1. 서론

평판 형태의 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조형태이다. 대표적인 것으로는 비행기나 로켓의 날개, 인공위성의 태양열 전지판 같은 것들이 있다. 특히 비행기나 로켓의 날개는 지상에서 이륙이나 발사될 때 가속도를 받는데, 이러한 가속도는 관성력을 유발시켜 시스템 강성의 변화를 가져오며, 이는 다시 구조물의 진동특성 변화로 연계된다. 따라서 이러한 구조물들에 대한 진동특성의 정확한 예측은 이들의 설계를 위해 필수적이며 진동해석을 위한 모델링 개발을 위한 연구가 필요하다.

블레이드의 진동에 관한 연구는 일찍이 1920년대 초부터 시작된 것으로 알려져 있으며 참고문헌[1~6]은 이 분야의 많은 문헌 중 대표적 일부를 나타내고 있다. 그러나 이러한 연구는 주로

보 형태로 구조물을 이상화하여 다루고 있고, 회전하는 형태의 구조물만을 다루고 있다. 하지만 로켓이나 최근의 항공기는 고속운동을 하므로 가속시 발생하는 병진 가속도에 의한 진동특성 변화 연구가 필요하다고 판단된다.

본 연구의 목적은 외팔평판의 평판면에 평행한 방향의 가속도에 따른 고유진동수와 모드의 변화를 조사하기 위한 모델링을 개발하고 해석을 수행하는데 있다. 본 연구는 평판의 가속도등 시스템의 특성을 결정하는 무차원 매개변수들의 변화에 따른 고유진동수 변화와 그에 따른 모드형상의 독특한 변화에 관찰의 초점을 맞추고 있다.

서론에 이어 2장에는 참고문헌[9]에 근거한 진동방정식을 제시하고, 무차원화 과정을 보여주었다. 3장에서는 2장에서 제시된 진동방정식에 근거하여 Rayleigh-Ritz 가상모드법을 사용해 수치 해석을 실시하고 결과를 설명하였다. 마지막으로 4장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

* 2001년 2월 10일 접수

** 회원 한양대학교 기계설계학과

* 한양대학교 기계설계학과 대학원

2. 진동방정식

2.1 외팔평판의 진동방정식

Fig. 1은 일정두께 h , 가로길이 a , 세로길이 b 를 갖는 외팔평판이 가속되는 축에 부착되어 있는 형태를 보여주고 있다. 이 평판의 단위면적 당 질량을 ρ 라 하고 포아송비를 ν , 굽힘강성계수를 D 라 하면 이 평판의 면의방향 운동방정식은 참고문헌[9]에 제시된 과정을 이용하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

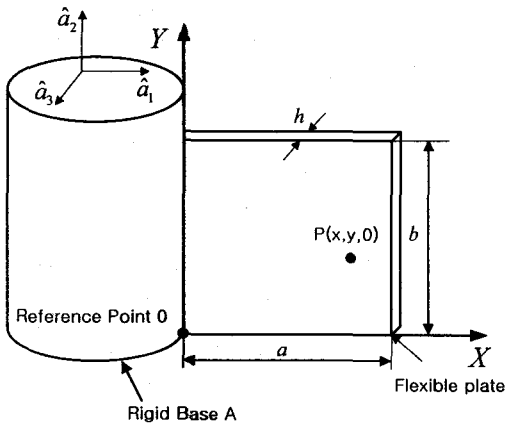


Fig 1 Configuration of a translationally accelerated rectangular plate

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left(\int_0^b \int_0^a \rho \phi_i \phi_j dx dy \right) \ddot{q}_j \right. \\ & + \left\{ \int_0^b \int_0^a D (\phi_{i,xx} \phi_{j,xx} + \phi_{i,yy} \phi_{j,yy} \right. \\ & + \nu \phi_{i,xx} \phi_{j,yy} + 2(1-\nu) \phi_{i,xy} \phi_{j,xy}) dx dy \left. \right\} q_j \\ & - a_x \left(\int_0^b \int_0^a \rho (a-x) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right) q_j \\ & - a_y \left(\int_0^b \int_0^a \rho (b-y) \phi_{i,y} \phi_{j,y} dx dy \right) q_j \left. \right] = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 a_x , a_y 는 X방향, Y방향 가속도를 각각 의미하며, 아래첨자 표시중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이에 대한 편미분으로 예를들어 $\phi_{i,xx}$ 는

ϕ_i 를 x 로 두번 편미분한 것을 의미한다. ϕ_i 와 q_i 는 평판의 면의방향 변위 w 를 표시하기 위해 사용하는 모드함수와 일반좌표이며 서로 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (2)$$

여기서 μ 는 근사화에 사용된 모드의 개수이다.

식(1)에서는 가속도와 관련된 항들로 인해서 시스템 강성이 변화하는 것을 보여준다.

2.2 방정식의 무차원화와 무차원 매개변수

식(1)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수와 매개변수, 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \tau & \equiv \frac{t}{T}, & \zeta & \equiv \frac{x}{a} \\ \eta & \equiv \frac{y}{b}, & \vartheta_j & \equiv \frac{q_j}{a} \\ \delta & \equiv \frac{a}{b}, & \alpha_x & \equiv \frac{a_x}{a_r} \\ \alpha_y & \equiv \frac{a_y}{a_s}, & \varphi_i(\zeta, \eta) & \equiv \phi_i(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 a_r , a_s , T 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} T & \equiv \sqrt{\frac{\rho a^4}{D}} \\ a_r & \equiv \frac{a}{T^2}, & a_s & \equiv \frac{b}{T^2} \end{aligned} \quad (4)$$

식(3)을 이용하면 식(1)은 다음과 같이 무차원 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi d\eta \right) \ddot{\vartheta}_j \right. \\ & + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\xi\xi} + \delta^4 \varphi_{i,\eta\eta} \varphi_{j,\eta\eta} \right. \\ & + \nu \delta^2 \varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\eta\eta} + 2(1-\nu) \delta^2 \varphi_{i,\xi\eta} \varphi_{j,\xi\eta}) d\xi d\eta \left. \right\} \vartheta_j \\ & - \alpha_x \left(\int_0^1 \int_0^1 (1-\xi) \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\xi d\eta \right) \vartheta_j \\ & - \alpha_y \left(\int_0^1 \int_0^1 (1-\eta) \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta} d\xi d\eta \right) \vartheta_j \left. \right] = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)을 이용하여 진동해석을 수행하기 위해서 무차원화된 일반좌표행렬을 다음과 같은 조화함수로 나타낸다.

$$\underline{Q} = e^{j\omega t} \underline{\Theta} \quad (6)$$

여기서 \underline{Q} 는 ϑ_j 를 요소로 갖는 기동 행렬이며, ω 는 고유진동수와 T 의 곱으로 나타내고, $\underline{\Theta}$ 는 각 고유진동수에서의 모드형태를 나타내는 기동행렬이다. 식(5)에서 j 는 허수 (imaginary number)를 나타내는 기호로 사용된다.

식(6)을 식(5)에 대입하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\omega^2 M \underline{\Theta} = K \underline{\Theta} \quad (7)$$

여기서 M 과 K 는 $\mu \times \mu$ 의 크기를 갖는 정방행렬로 그 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi d\eta \quad (8)$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 (\varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\xi\xi} + \delta^4 \varphi_{i,\eta\eta} \varphi_{j,\eta\eta} + \nu \delta^2 \varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\eta\eta} + 2(1-\nu) \delta^2 \varphi_{i,\xi\eta} \varphi_{j,\xi\eta}) d\xi d\eta \quad (9)$$

$$- \alpha_x \left(\int_0^1 \int_0^1 (1-\xi) \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\xi d\eta \right)$$

$$- \alpha_y \left(\int_0^1 \int_0^1 (1-\eta) \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta} d\xi d\eta \right)$$

3. 해석결과 및 토의

본 장에서는 2장에서 유도된 진동방정식에 가상모드법을 사용하여 수치해석을 수행하였으며 모드함수들은 가로와 세로방향 보함수들 (beam function)을 이용하여 구성하며 그 상세한 과정은 참고문헌[13]에 잘 나타나 있다. 본 논문과 관련하여 사용된 보함수의 개수는 가로방향 6개, 세로방향 7개며 따라서 총 42개의 자유도를 갖는다. 여기서 평판의 가속시 고유진동수에 대한 비교는 그러한 자료를 가진 문헌이 없어 제시할 수 없으나 사용된 평판 모델링의 적정성은 가속이 없는 상태의 경우에 대해서는 참고문헌[10]을 통하여 이미 검증되었다. Table 1은 면내방향 굽힘진동

의 대표적인 경우로 $\delta=1$, $\alpha_y=4$, $\alpha_x=0$ 일때의 결과이며, 사용된 모드수의 증가에 따라 무차원화된 가장 낮은 5개의 고유진동수들의 수렴과정을 보여주고 있다. 모드수를 X방향 5개, Y방향 7개 (2개는 강제모드임) 사용할 때 수치해석값들은 거의 수렴에 도달한 것을 알 수 있으며, 모드수를 X방향 5개, Y방향 6개 사용한 결과들과 비교하면 최대 0.07 퍼센트 정도의 미소한 차이만 보인다. 따라서, 본 논문에서는 평판의 가장 낮은 5개의 고유진동수 및 모드형상만을 관찰하려 하므로 여기서 사용된 자유도는 수치해석결과 해의 수렴에 충분한 것이라 판단된다. 해석에 사용된 포아송 비 $\nu = 0.3$ 이다.

Table 1 Convergence of dimensionless natural frequencies ($\alpha_y=4$, $\alpha_x=0$, $\delta=1$)

No. of X modes	No. of Y modes	1st Freq.	2nd Freq.	3rd Freq.	4th Freq.	5th Freq.
1	3	3.511	8.080	27.032	***	***
2	3	3.501	7.003	21.276	25.988	31.966
3	3	3.498	6.997	21.249	25.866	31.407
3	4	3.498	6.954	21.241	25.825	30.855
3	5	3.491	6.951	21.177	25.803	30.854
4	6	3.489	6.920	21.168	25.725	30.777
5	7	3.485	6.918	21.131	25.686	30.745
6	7	3.484	6.914	21.127	25.665	30.740

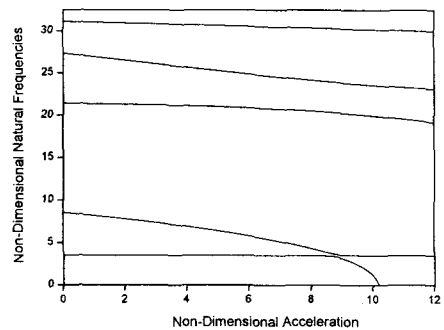
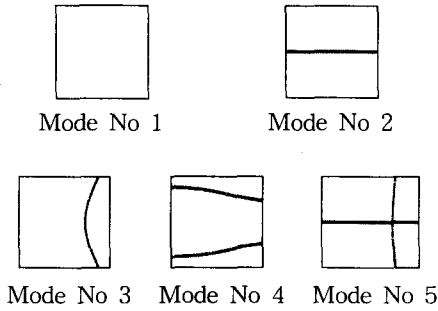
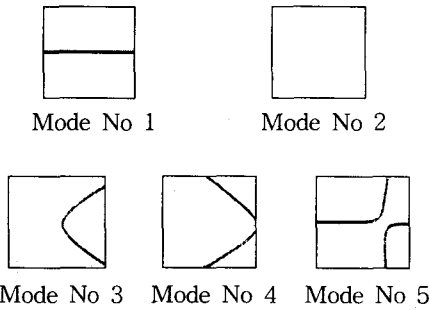


Fig. 2 Variation of non-dimensional natural frequencies vs. Y directional non-dimensional acceleration



(a) Lowest five mode shapes without acceleration



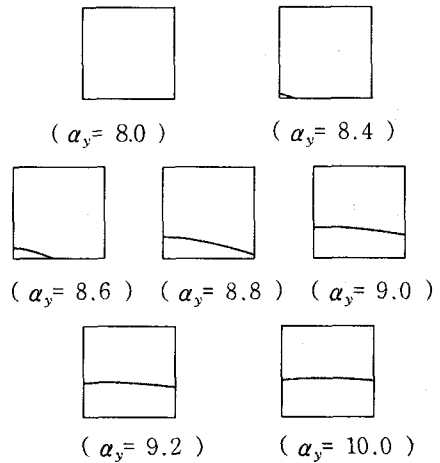
(b) Lowest five mode shapes with acceleration

Fig. 3 Nodal line patterns of lowest five mode shapes with and without acceleration

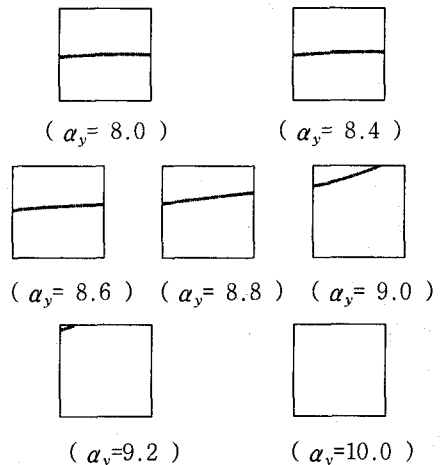
Fig. 2는 중횡비 δ 가 1인 평판에 대해 Y방향 무차원 가속도의 증가에 따른 가장 낮은 5개의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. 이 결과는 평판의 가속도의 증가가 모든 고유진동수의 감소를 가져오는 것을 보여주고 있다. 이는 직관적으로 예측되듯이 가속도의 증가는 평판의 좌굴을 일으키는 방향으로 진행되므로 고유진동수의 감소를 초래한다. 그림에서 흥미로운 것은 1번째와 2번째 고유진동수 궤적의 휨(Natural Frequency Loci Veering) 현상이다. 1번째, 2번째 고유진동수 궤적은 $\alpha_y=9$ 부근에서 서로 일정한 간격까지 접근하다가 다시 멀어지는 현상을 보여준다.

Fig. 3 (a)는 평판이 Y방향으로 가속되기 전의 모드 절선들을 나타내고 있고 (b)는 무차원 가속도 $\alpha_y=10$ 일 때의 모드들의 절선들을 나타내고 있다. Fig. 3 (a)에서 첫번째 모드는 1st Bending, 두번째 모드는 1st Torsion, 세번째 모드는 2nd Bending, 네번째 모드는 Chordwise Bending 구

리고 다섯번째 모드는 Bending과 Torsion의 조합모드이다. 여기서 관찰할 수 있는 사실은 다른 모드들의 변화에 반해 1번째와 2번째의 모드들은 상호 뒤바뀐 모습을 하고 있다. 이것은 Fig. 2에서 보듯이 가속도의 증가에 따라 비틀림 모드가 첫 번째 굽힘 모드보다 더 낮은 고유진동수의 값을 갖게 되기 때문이다. 또한 가속도가 11을 넘어서면 1st Torsion 모드의 고유진동수 값이 0으로 떨어진다. 이는 Y방향 무차원 가속도가 11을 넘어서면 동적좌굴이 일어남을 의미한다.



(a) Nodal line variations of 1st mode shape



(b) Nodal line variations of 2nd mode shape

Fig. 4 Nodal line variations of 1st and 2nd mode shapes with seven different accelerations

Fig. 4는 무차원 가속도의 변화에 따른 1번째와 2번째의 모드 형상의 변화를 나타내고 있다. 그림에서 보는바와 같이 Fig. 4 (a)는 1번째 Bending 모드가 가속도가 변함에 따라 점차로 1번째 Torsion 모드로 변화하는 반면, Fig. 4 (b)는 1번째 Torsion 모드가 가속도의 증가에 따라 1번째 Bending 모드로 변화됨을 보여주고 있다.

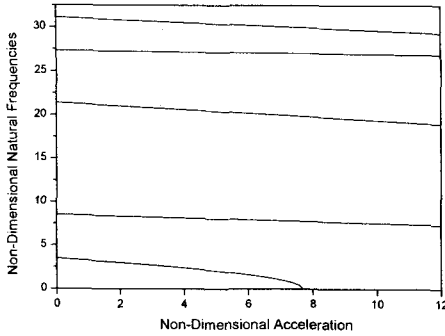
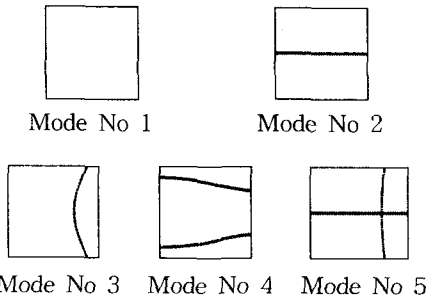
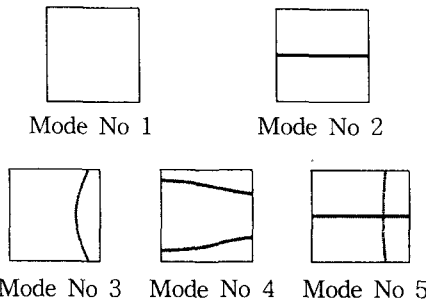


Fig. 5 Variation of non-dimensional natural frequencies vs. X directional non-dimensional acceleration



(a) Lowest five mode shapes without acceleration



(b) Lowest five mode shapes with acceleration

Fig. 6 Nodal line patterns of lowest five mode shapes with and without acceleration

Fig. 5는 중횡비 δ 가 1인 평판에 대해 X방향 무차원 가속도의 증가에 따른 가장 낮은 5개의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. Fig. 3과 마찬가지로 평판의 가속도의 증가가 모든 고유진동수의 감소를 가져오는 것을 보여주고 있다. 하지만 평판이 Y방향으로 가속하는 경우는 동적좌굴이 1st Torsion 모드에서 발생하는데 반하여 X방향으로 가속하는 경우는 가속도가 7.5를 넘어서면 1st Bending 모드에서 동적좌굴이 일어남을 알 수 있다.

Fig. 6 (a)는 평판이 X방향으로 가속되기 전의 모드 절선들을 나타내고 있고 (b)는 무차원 가속도 $\alpha=7$ 일 때의 모드들의 절선들을 나타내고 있다. Fig. 2와 달리 Fig. 5의 고유진동수 궤적은 휨현상이나 교차현상이 발생하지 않는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 선행연구에서 제시된 탄성 평판의 운동방정식 유도방법을 이용하여 진동방정식을 유도 기술하고 이에 근거해 수치해석을 수행하였다. 그 결과 평판의 가속도의 변화에 따른 고유진동수 궤적 변화와 이에 수반되는 모드 형태의 변화를 관찰할 수 있었다. 특별히 외팔평판의 경계선 방향으로 가속되는 경우 관찰된 고유진동수 궤적의 휨현상은 관련 모드들 간에 상호영향을 주고받는 형태변화를 수반하는 것을 알 수 있었다. 그리고 각 방향으로 가속도가 증가함에 따라 비틀림 모드 또는 굽힘 모드가 낮은 고유진동수를 갖는 지배적인 모드가 된다는 것도 알 수 있었다. 특히 가속도의 증가에 따라 고유진동수가 0으로 떨어지는 좌굴현상의 발생을 확인할 수 있는데 이는 가속도를 받는 구조물의 동적 안정 설계를 위해서 피해야 하는 현상이다. 본 연구를 통해 제시된 이상의 결과들은 진동특성을 고려한 가속을 받는 평판의 구조설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

후기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766.
- (2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force", *NASA TN*, No. 516.
- (3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam", *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28-30.
- (4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175-185.
- (5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199-210.
- (6) Ryan, R.R. and Yoo, H.H., 1989, "Element Specific Linear and Nonlinear Modeling", *SDIO NASA Conference Proceedings*, San Diego, California, January.
- (7) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 233-248.
- (8) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429-449.
- (9) H. H. Yoo and J. Chung, 2001, "Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motion", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 1, pp. 123-137.
- (10) 유흥희, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석", *대한기계학회논문집*, 제17권, 제3호, pp. 652-657.
- (11) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, No. 4, pp. 448~453.
- (12) Barton, M. V., 1951, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 129-134.
- (13) Leissa, A. W., 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP-160.