

# 등가소스법을 이용한 실내 음장 모델링에서의 원방 소스 최적화 연구

백광현\*

## A study on the Optimal Far field Source locations in the Acoustic Modelling using Equivalent Source Method

Kwang-Hyun Baek

**Key Words:** Equivalent Source Method(등가소스법), Far Field Source(원방 소스), Optimization(최적화), Simulated Annealing Method(어닐링 최적화 기법)

### Abstract

The equivalent source method(ESM) is used for the calculation of the internal pressure field for an enclosure which can have arbitrary boundary conditions and may include internal objects which scatter the sound field. The advantage of using ESM is that it requires relatively low computing cost and is easy to model the internal diffracting objects. In the ESM modelling, some of the equivalent positions are chosen to be the same as the first order images of the source inside the enclosure, some are positioned on a spherical surface some distance outside the enclosure. The normal velocity on the surfaces of the enclosure walls is evaluated at a larger number of positions than there are equivalent sources. The sum of the squared difference between this velocity and the expected is minimized by adjusting the strength of the equivalent sources. This study is on the optimal equivalent source positions, the far field sources. Typically, the far field sources are evenly distributed on a surface of a virtual sphere which is centered at the enclosure with a sufficiently large radius. In this study, optimal far field source locations are searched using simulated annealing method and simulation results showed that optimally located sources gave better accuracy even with a smaller number of far field sources.

### 1. 서 론

음향장의 모델링은 여러 가지 방법을 통하여 가능하지만 특히 복잡한 형태를 가지는 음향장에는 유한요소법 (Finite Element Method)이나 경계면요소법 (Boundary Element Method) 등이

많이 이용되고 있다. 경계면요소법의 경우에는 자유음장에서의 방사 문제에 적용하기가 용이하지만 경계면에서의 특이점과 특정 파동수에서 해의 존재가 유일하지 않다는 문제점이 있는 반면 유한요소법의 경우에는 무한한 개수의 요소를 포함할 수 없기 때문에 자유 음장에서의 방사 문제에는 적용하기가 어려우며 주로 내부 음장 모델링에 많이 이용된다. 이러한 관점에서 Koopman<sup>(1)</sup> 등은 경계면요소법에 대한 대응책으로 등가소스법 (Equivalent Source or Superposition Method)을 제시하였다. 이 방법의 특징 중 하나는 상대적으로 적은 양의 계산으

\* 회원, 단국대학교 기계공학과  
E-mail:khbaek@dankook.ac.kr  
TEL:(02)709-2563 FAX:(02)796-9529

로도 자유 음장에서의 방사문제를 상당히 정확히 계산해 낼 수 있다는 데 있다. 특히 음장 내에 존재하는 물체에 의한 산란을 해석할 수 있게 하며 임의의 형상에 대한 모델링도 가능하게 한다. 이 방법에 대한 특징과 활용 예는 참고 문헌 (2)와 (3) 등에서 잘 볼 수 있다. 또한 능동소음제어 시스템에서의 이론적인 음장 해석 등에도 응용되었다.<sup>(4)</sup>

등가소스법은 일반적으로 실내에 위치한 음원에 의한 실내 음장을 모델링하기 위하여 원방에 위치한 다수의 등가소스와 상대적으로 근방에 위치한 소수의 이미지 소스들을 사용한다. 이 소스들은 실내외를 구분 짓는 벽을 모델링하기 위하여, 경계면에 위치한 유한한 개수의 지점에서, 대개는 균일하게 분포한, 경계면 조건을 만족하도록 소스들의 강도와 위상이 정해진다. 결국 등가소스법의 효과적 응용은 소스들의 개수와 경계면 조건 확인 위치의 개수를 적절히 조절하여 너무 많지 않은 계산 시간을 소요하면서도 원하는 만큼의 정확도를 유지 할 수 있는 가에 있다. 정확도라는 것은 경계면 조건이 용인할 만큼의 오차 범위 내에서 만족되는 가에 상관되며, 이는 등가 소스들의 개수 및 위치와 관계가 있다.

연구 결과 (5)에 따르면, 실내음장을 산란시키는 물체가 있는 경우, 적정한 수 이상의 이미지 소스들은 경계면 조건의 정확도 향상에 거의 도움을 주지 못한다. 통상적으로 이미지소스는 1차 또는 2차로 충분하며, 원방소스가 계산정확도의 상당부분을 좌우한다. 일반적인 원방소스의 개수는 이미지 소스의 3~4배 이상이 되며, 그 위치는 충분히 큰 반경을 갖는 구면(중심은 실내 공간의 중심과 일치)에 가능한 한 균등하게 분포시킨다. 이러한 소스 배치는 경계면요소법에 상반되는 방법으로 경계면에서의 압력, 속도 등이 연속적이면서 완만히 변화하는 경우에 유리하다. 이 경우 많은 지점에서의 경계면 조건의 오차 확인은 정확한 경계면 형성에 도움을 주어 계산 결과의 정확성을 높여 주지만 이에 상응하는 많은 계산 량을 요구하게 된다. 본 연구에서는 이러한 원방 소스들이 어떤 위치에 있을 때 보다 정확한 결과를 얻을 수 있는가에 관하여 최적화 기법을 이용하여 고찰하였다.

## 2. 등가소스법을 이용한 모델링

일반적으로, 특정 공간 밖의 소스들에 의하여 그 공간 내에 형성된 음장은 경계면에서의 법선 방향의 입자 속도와 압력에 의해 결정되어 질 수

있음은 Kirchhoff-Helmholtz식으로부터 잘 알려져 있다. 이를 기반으로, 실내 공간과 같이 물리적으로 존재하는 경계면에 의해 공간 내/외에 특정 지어지는 음장은, 경계면의 다른 한 쪽에 존재하는 소스들을 물리적 경계면에서 요구하는 조건(속도)을 만족하도록 잘 조정하면 물리적 공간에 의해 생성된 것과 매우 유사한 음장을 형성할 수 있다는 것이 등가소스법의 기본 원리이다.

Fig.1은 유한한 개수의 단극 소스(monopole source)를 이용한 등가소스법의 개념도이다. 실질적으로 경계면의 모든 지점에서 압력과 속도를 조사할 수 없으므로, 일반적으로는 충분히 많은 수의 지점을 정하여 그 곳에서 주어진 오차 범위 안에서 경계면 조건을 만족하는가를 검증하게 된다. 임의의 주파수에서 경계면조건 확인 지점에서의 압력은 다음과 같이 복소 벡터  $p$ 로서 나타낼 수 있다.<sup>(5)</sup>

$$p = p_{int} + p_{ext} = p_{int} + Z_e q_e \quad (1)$$

여기서 실내 공간 내부에 있는 내부 음원 소스에 의한 경계면에서의 압력은  $p_{int}$ , 외부 등가 소스에 의한 경계면에서의 압력은  $p_{ext}$ , 등가소스와 오차확인지점간의 전달함수인 복소 임피던스 매트릭스는  $Z_e$ , 그리고 등가소스 강도는  $q_e$ 로 나타내었다.  $p_{int}$ 와  $u_{int}$ 는 내부 소스의 위치와 강도만 주어지면 자유 음장에서의 그린함수(Green's function)를 이용하여 쉽게 구할 수 있는 값들이다. 또한,  $m$ 번째 오차 확인지점과  $n$ 번째 등가소스간의 임피던스는 자유 음장에서의 그린함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

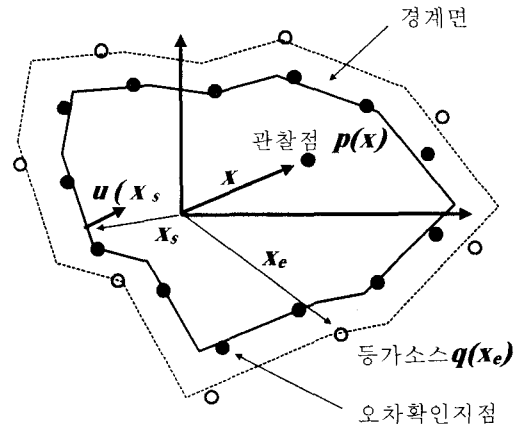


Fig. 1 The sketch of equivalent source method. The pressure and normal velocity are evaluated at a finite number of positions on the boundary

$$Z_{emn} = jkc\rho G(|x_{sm} - x_{en}|). \quad (2)$$

여기서  $k, c, \rho$ 는 각각 파동수(wave number), 유체 내에서의 음속, 유체 밀도를 나타낸다.

경계면에서의 법선 방향의 입자 속도  $u$ 도 앞서와 유사한 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = u_{int} + u_{ext} = u_{int} + T_e q_e. \quad (3)$$

이 경우  $T_e$ 는 등가소스 강도와 경계면에서의 법선 방향 속도의 상관관계를 나타내는 매트릭스로서 자유 음장에서 그린함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{emn} = \frac{\partial G(|x_{sm} - x_{en}|)}{\partial n_m}. \quad (4)$$

한편, 경계면에서의 압력과 법선 방향 속도는 경계면을 특성 짓는 모빌리티( 또는 admittance) 매트릭스  $Y_b$ 에 의하여 다음과 같은 관계를 갖는다고 볼 수 있다.

$$u = Y_b p. \quad (5)$$

여기서  $Y_b$ 는 경계면 각 지점에서의 상호간의 모빌리티 특성을 나타내며 외부 음장은 아무런 영향을 미치지 않는다고 가정한다.

식(1), (3), (5)를 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$u_{int} + T_e q_e = Y_b [p_{int} + Z_e q_e]. \quad (6)$$

만약 경계면의 오차 확인 지점의 수와 동일한 수의 등가소스를 이용한다면 등가소스의 강도는 임의의 경계면 모빌리티 매트릭스  $Y_b$ 에 대하여 다음과 같이 구해진다.

$$q_e = -[T_e - Y_b Z_e]^{-1} [u_{int} - Y_b p_{int}]. \quad (7)$$

이 경우 경계면이 강체 표면(hard surface)의 특성을 갖는다면  $Y_b$ 는 0으로 수렴하게 되고  $u=0$ 가 된다. 그러므로 식(7)은

$$q_e = -T_e^{-1} u_{int} \quad (8)$$

와 같은 간단한 형태가 된다. 그러나 이러한 fully determined system에서는 오차 확인 지점에서 경계면 조건을 정확히 만족시킬 수는 있지만 그 밖의 지점들, 예를 들어 경계면 조건 확인 지점과 지점 사이에서는 큰 오차를 유발할 가능성이 매우 크다. 이러한 단점을 극복하기 위해서 많이 사용하는 방법은 오차 확인 지점의 수를 등가소스의 수보다 늘려 overdetermined system의 문제로 바꾸는 것이다. 이 때  $[T_e - Y_b Z_e]$ 는 더 이상 정방형(square) 매트릭스

가 아니므로 경계면 조건 확인 지점에서 더 이상 정확히 오차를 0으로 만들 수 없다. 이 경우 등가소스는 경계면 조건 확인 지점에서의 오차를 최소화하는 방향으로 설정될 수 있으며, 다음과 같이 등가소스가 존재하지 않을 때의 경계면 속도 값을 이용하여 무차원화한 형태로 나타낼 수 있다.

$$E = \frac{u^H u}{u_{int}^H u_{int}}. \quad (9)$$

(3)식을 (9)식에 넣어 정리하면 오차  $E$ 는 등가소스 강도의 이차함수(quadratic function)로 나타내어지며 최소 값은 등가소스 강도의 값이 다음과 같을 때이다.

$$q_e = -[T_e^H T_e]^{-1} T_e^H u_{int}. \quad (10)$$

여기서  $H$ 는 Hermitian transpose를 나타낸다. 만약 강체 표면이 아닌 유한한 값의 admittance를 갖는 경계면이라면 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$E = \frac{(u - Y_b p)^H (u - Y_b p)}{(u_{int} - Y_b p_{int})^H (u_{int} - Y_b p_{int})} \quad (11)$$

이 경우 역시 오차 값은 등가소스 강도의 이차함수로 표현되며 소스 강도가 다음과 같을 때 최소값을 가지게 된다.

$$q_e = -[(T_e - Y_b Z_e)^H (T_e - Y_b Z_e)]^{-1} \times (T_e - Y_b Z_e)^H (u_{int} - Y_b p_{int}). \quad (12)$$

이와 같은 방식으로 등가소스법을 이용할 경우 아직도 남는 문제는, 이미 지정한 유한한 개수의 오차 확인 지점 이외의 경계면 지점에서도 오차 확인 지점에서 만큼의 정확도나 그 이상으로 경계면 조건을 만족하는가에 있다. 즉, 전체 가상 벽면에서 경계면 조건의 수렴성을 어떠한 방법으로 검증하느냐이다. 등가소스법의 경우에는 같은 개수의 등가소스를 이용하더라도 소스 위치의 배치 방법에 따라 무한히 많은 조합이 가능하기 때문에 경계면 조건의 만족성을 어느 특정한 위치로 국한하기가 거의 불가능하다. 이러한 수렴성을 확인하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있겠으나, 본 연구에서는 소스 강도 계산에 이용되었던 경계면 오차확인 지점보다 훨씬 많은 수의 지점에서 경계면 조건을 만족하는가를 평가하여 수렴성을 검증하였다. 예를 들자면, 100곳의 지점에서 경계면 조건을 만족(오차를 최소화)하도록 식(10) 또는 (12)에서 계산된 소스강도가 100곳의 몇 배 이상 되는 지점에서 얼마만큼의 오차를 가지고 경계면 조건을 만족하는가를 식

(9)나 (11)의 형태로 계산하여 확인하였다.

실내 공간의 음장 모델링에 있어서 벽면의 댐핑 효과는 다음과 같이 자유 음장에서 그린함수에 복소 파동수(complex wave number)  $k'$ 를 도입하여 처리하였다.<sup>(5)</sup>

$$k' = k(1 - j\alpha) \quad (13)$$

Modal 모델을 이용한 실내 음장에 대한 그린함수는  $k_n, \varphi_n$ 을  $n$ 번째 모드의 eigenvalue와 eigenfunction이라 할 때 다음과 같이 주어진다.<sup>(6)</sup>

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{V(k_n^2 - k^2)} \quad (14)$$

(13)식을 (14)식에 넣어 정리하면  $\alpha \ll 1$ 인 경우에 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{V[(k_n^2 - k^2) + 2jak^2]} \quad (15)$$

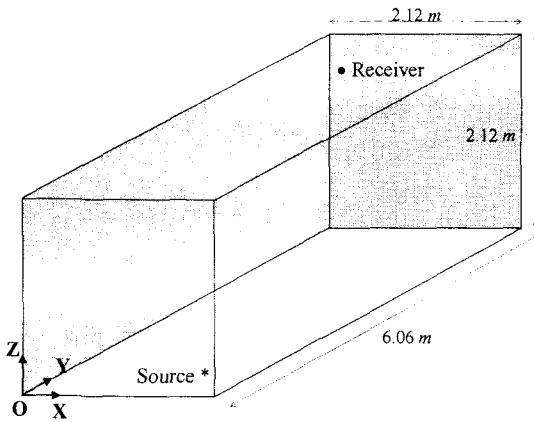


Fig. 2 The enclosure configuration and the positions of internal source and receiver

### 3. 최적화기법과 계산 결과

Fig.2에 보이는 것과 같은 공간 내에 존재하는 단극 소스에 의한 음장을 등가소스법을 이용하여 계산하였다. 등가 소스들을 이용한 가상 벽면의 형성을 위하여 벽면(경계면)의 외부에 Fig.3에 보이는 것과 같이 소스들을 배치하였다. 소스들은 Fig.3과 같이 1차 이미지 소스들과 등거리 원방에 위치한 구의 표면에 위치하는 소스들로 구성되어 있다. 이미지 소스들을 이용한 이유는, 순수히 원방에 위치한 소스들로 공간 내부에 위치한 단극소스의 영향으로 인한 경계면 조건을 정밀하

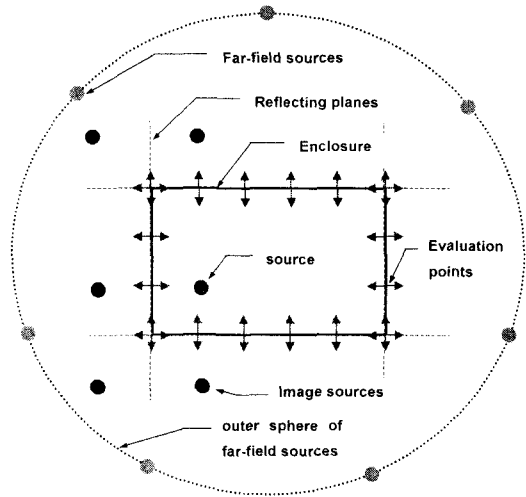


Fig. 3 The equivalent source positions used to calculate the response of a rectangular enclosure with a single monopole source

게 만족시키기 위해서는 상당히 많은 수의 소스들이 필요로 하게 되며 이러한 비효율성을 극복하기 위해서이다. 본 연구에서 벤치마킹 대상으로 삼은 일반적 등가소스법에서의 원방소스 위치는 원방소스가 위치하는 가상구면을 위도와 경도 방향으로 균등 분할하여 배치하되, 단순 균등 분할인 경우 위와 아래의 극점에서는 소스간 거리가 너무 가까워지므로 적은 개수의 소스를, 그리고 적도 부위에서는 가장 많은 개수의 소스가 배치된다. 기본적인 원리는 구 표면 전체에 걸쳐 가능한 한 균일하게 위치시킨다는 것이나 임의의 개수의 소스를 완벽하게 균등 배열하는 것은 수학적으로 불가능하다.

원방소스는 무한히 많은 곳에 위치할 수 있으며 이런 경우 수치적 최적화 기법을 적용하기에는 어려움이 있어, 연구의 탐색 단계에 맞추어 문제를 축소하였다. 통상적 방법과 같이 소스들은 가상 구면에 위치시키되 위도와 경도 방향으로 각각  $2^6 = 64$  균할 등분하여 구 표면에 총  $2^6 \times 2^6 = 4096$ 개의 후보위치를 정하고 그중 24개의 최적 위치를 찾으려 하는 조합적 최적화 문제로 국한하였다. 그러나 이 경우에도

${}_{4096}C_{24} \approx 7.49 \times 10^{62}$  개라는 천문학적인 조합이 가능하며 여기에 최적화 기법을 바로 적용하는 것은 실용성 측면이나 현실성 측면에서 불합리하므로 다시 문제를 단순화하였다. 총 4096개의 후보위치 중에서 최적인 두 개의 위치를 구하고 이를 고정시킨 뒤 다시 또 다른 2개를 구하는 순차적

다. 이 경우에도  ${}_{4096}C_2 = 8386560$  개의 가능성이 있어서 통상적인 최적화 기법으로는 전역 최적치를 구하는 것이 거의 불가능하다. 본 연구에서는 이러한 문제에 잘 적용될 수 있는 자연알고리즘 중에서 Simulated Annealing 기법을 이용하여 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

시뮬레이션에서 이미지 소스들의 경우 1차 이상의 이미지 소스들의 포함은 계산속도 향상이나 경계면 오차의 감소에 별다른 영향을 주지 못하여 이미지 소스들의 수는 1차로 제한하였다. 3차원 공간에서는 1차 이미지 소스들의 수는 총 26개가 된다. 이렇게 이미지 소스들의 수를 고정시키고 원방에 위치한 소스들의 수를 변화 시켜가면서 사용된 원방소스의 개수에 따른 시뮬레이션 결과가 Table 1, Table 2와 Fig. 4에 요약 정리되어 있다. Table 1은 일반적 균등 분포와 최적화 기법으로 찾은 최적의 위치가 얼마만큼의 경계면 조건의 오차( $u^H u$ )를 보이는지 비교되어 있다. 24개의 원방 소스가 사용된 경우 최적 위치에 있는 소스들은 균등 분포된 경우에 비하여 1/4 정도의 오차밖에 보이고 있지 않다. 또한

Table 1에서는 원방소스 파워의 합  $q_c^H q_c$ 의 값도 보여 주고 있는데, 24개의 원방 소스가 사용된 경우 균등 분포의 경우 훨씬 작은 파워를 필요로 하는 것으로 나타나 있는데 이는 결국 소스 위치가 부적절하여 제 기능을 다하지 못하고 있는 또 다른 증거이다. 한편 38개의 소스가 사용된 균등분포의 계산 결과와 20개의 최적 위치 계산 결과를 비교해 보면, 비슷한 정도의 경계면 오차 값을 보이지만 소스의 수는 거의 절반으로 줄일 수 있음을 알 수 있다. 또한 이 경우 파워의 값을 비교해 보면 최적 위치의 소스들이 1/4 정도 밖에 필요로 하고 있지 않는데 이것은 최적 위치의 소스들이 파워를 매우 경제적으로 사용하고 있음을 의미한다. Table 2 에는 최적 소스 위치들의 공간상 좌표 값을 보여주고 있다. XYZ축의 방향은 Fig. 2와 같으며 원방 소스가 위치한 가상 구면의 반경은 100m이다.

Fig. 4는 Table 1의 결과를 그래프로 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 소스의 수가 증가함에 따라 거의 선형적으로 감소하는 경향을 보여주고 있다. 그러나 이 것은 어느 정도 이상의 소스의 수에 대해서는 0에 거의 수렴하면서 더 이상 줄지 못 할 것이며 이는 이 그래프가 지수적 감소의 초기 부분을 보여주는 것이라고 판단된다.

Table 1 Comparison of velocity squared errors at the wall boundary and sum of the source power according to the source locations

Number of sources	Optimal positions		Even distribution	
	$u^H u$	$q_c^H q_c$	$u^H u$	$q_c^H q_c$
2	0.0500	3.42e+07	0.0511	6.91e+08
4	0.0464	1.20e+08	-	-
6	0.0425	2.29e+08	-	-
8	0.0377	1.39e+09	0.0509	5.17e+06
10	0.0340	1.90e+09	-	-
12	0.0308	2.60e+09	-	-
14	0.0260	3.99e+09	0.0430	2.66e+09
16	0.0210	7.14e+09	-	-
18	0.0180	8.43e+09	-	-
20	0.0151	1.00e+10	-	-
22	0.0118	1.44e+10	-	-
24	0.0093	1.71e+10	0.0360	8.56e+08
38	-	-	0.0136	3.83e+10

Table 2 Coordinates of the 24 optimal far field source locations

X-coord.	Y-coord.	Z-coord.
-25.76	-85.38	-37.21
37.68	-85.38	30.09
1.06	-35.24	-91.33
1.06	-26.00	96.75
89.25	-44.11	1.06
-94.63	-26.00	1.06
42.63	80.81	-46.08
20.19	99.22	-18.45
99.14	-16.48	1.06
20.57	3.03	-97.02
-1.79	31.92	96.75
8.53	40.56	-91.33
96.29	31.92	-8.74
-97.02	22.54	1.06
-45.17	-83.47	20.57
1.06	-96.97	1.06
-91.33	41.30	1.06
42.63	-74.75	-46.08
-4.60	21.70	99.14
-10.05	-23.79	-94.63
83.81	-5.12	-54.50
91.67	21.05	-37.21
-8.14	20.24	-97.02
-18.07	99.22	20.57

### 3. 결론

본 연구에서는 실내 공간에서의 음장을 등가소스법을 이용하여 모델링 하였다. 실내에 위치한 소음원과 음향학적 산란 물체에 의한 공간내부의 음장을 효과적으로 모델링 하기 위하여 이미지 소스들과 원방에서의 소스들을 사용하였다. 등가소스법의 효용성은 경계면에서의 조건을 얼마나 작은 수의 소스들로도 만족하도록 할 수 있는가에 의존한다. 등가소스법의 정확도는 주로 원방소스의 수와 경계면 오차 확인 지점의 수에 따라 달라지는데, 일반적으로 소스의 수는 많을수록 좋으나 계산의 실현 가능성 때문에 제한되어진다. 이러한 제한을 고려하여 같은 수의 소스들을 사용하더라도 더 정확한 결과를 얻기 위하여 자연 알고리즘의 하나인 simulated annealing 기법을 이용하여 원방 소스들의 최적위치를 탐색하였다.

탐색 공간의 크기가 너무나 방대한 문제이기 때문에 그 대상을 기존과 같이 가상의 구면에 위치하는 경우로 국한하였다. 구면상에 위치하는 유한한 개수의 많은 후보 위치 중 최적의 24개의 위치를 찾기 위해 순차적 탐색기법을 추가로 도입하였다. 시뮬레이션 결과는 이렇게 찾아진 위치가 구면상에 균일 분포하는 위치들에 비하여 훨씬 좋은 결과를 가져올 수 있음을 보였다. 연구의 초기 단계로서 원방소스의 분포를 구면상으로 제한하였지만 다른 형태의 분포나 구면 반경의 크기 등과 같은 다른 요소들은 최적화 탐색요소로서 추후의 연구 과제로 진행될 사항들이다.

### 참고문헌

- (1) G. H. Koopman, L. Song and J. B. Fahline 1989, "A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition", *Journal of Acoustic Society of America* 86, 2433-2438.
- (2) L. Song, G. H. Koopman and J. B. Fahline 1991, "Numerical errors associated with the method of superposition for computing acoustic fields", *Journal of Acoustic Society of America* 89, 2625-2633.
- (3) J. B. Fahline and G. H. Koopman 1991, "A numerical solution for the general radiation problem based on the combined methods of superposition and singular-value

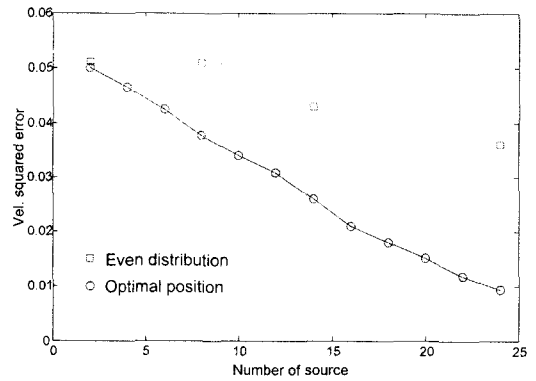


Fig. 4 Comparison of velocity squared errors at the wall boundary according to the far field source locations

decomposition", *Journal of Acoustic Society of America* 90, 2808-2819.

(4) L. Song, G. H. Koopman and J. B. Fahline 1991, "Active control of the acoustic radiation of a vibrating structure using a superposition formulation", *Journal of Acoustic Society of America* 89, 2786-2792.

(5) M. E. Johnson, S. J. Elliott, K-H Baek and J. Garcia-Bonito 1998, "An equivalent source technique for calculating the sound field inside and enclosure containing scattering objects", *Journal of Acoustic Society of America* 104, 1221-1231.

(6) P. A. Nelson and S. J. Elliott 1992, "Active control of sound", Academic press, London.