최적의 베이즈 교체정책 : 비재생보증인 경우

정 기문[1] · 한 성실[2] · 권 영섭[3]

요 약

본 논문에서는 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템에 대한 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책을 제안한다. 비재생무료보증(non-renewing free-replacement warranty : NFRW)과 비재생비례보증(non-renewing pro-rata warranty : NPRW)의 두 가지 경우에 대하여 각각 시스템의 고장시간이 와이블분포일 때 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체정책과 순응적 교체정책에 대하여 설명한다.

주제어 : 고장율함수, 베이즈 교체정책, 와이블분포, 최소수리, NFRW, NPRW.

1. 서론

보증기간(warranty period)이 있는 시스템을 구입하여 사용하는 소비자가 관심을 갖게 되는 문제는 보증기간이 종료된 이후에 시스템을 언제 교체하는 것이 가장 경제적인가 하는 것이다. 따라서, 이러한 문제를 해결하기 위해서 보증기간이 있는 수리 가능한 시스템에 대한 교체정책(replacement policy)과 보전정책(preventive maintenance policy) 분야에서의 연구가 고전적인 접근방법 뿐 아니라 베이즈 접근방법에 의해서도 활발하게 진행되고 있다. 고전적인 관점에서의 최적의 보전정책(optimal maintenance policy)에 관한 연구로 Chun(1992), Jack과 Dagpunar(1994), Yeh와 Lo(2001)는 보증기간 내에서 생산자가 부담하게 되는 보증비용을 최소화하기 위한 생산자 측면에서의 최적의 보전정책을 제안하였으며, Sahin과 Polatoglu(1996), Jung, Lee와 Park(2000)은 보증기간 내에서 소비자가 부담해야 하는 비용과 보증기간이 종료된 이후에 발생하는 보전비용을 함께 고려한 소비자 측면에서의 보전정책을 제안하였다. 이와 같은 고전적인 관점에서의 최적의 교체정책과 예방보전정책에서 고려되는 모형에서 시스템의 고장율분포(hazard function)는 실제로 알려지지 않은 경우가 많고, 또 알려진 형태라 하더라도 고장율분포에 포함되어 있는 모수에는 불확실성(uncertainty)이 존재한다. 따라서, 이러한 모수의 불확실성 문제를 해결하기 위해서 베이즈 관점에서의 연구가 필

---

[1] 광주광역시 동구 서석동 375 조선대학교 BK21 지역대학육성사업단 계약교수
[2] 전라남도 나주시 대호동 252 동신대학교 강사
[3] 광주광역시 동구 서석동 375 조선대학교 선박해양공학과 부교수

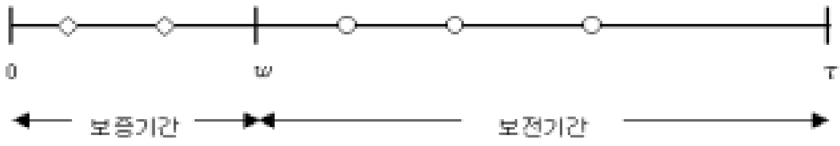
요하며, 이에 대한 연구가 다각도로 진행되고 있다. Mazzuchi와 Soyer(1996), Sheu, Yuh, Lin과 Juang(1999), Han, Jung과 Kwon(2001) 등은 보증기간이 없는 수리 가능한 시스템에 대하여 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용(expected cost rate per unit time)을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 보전정책을 제안하였으며, Jung과 Han(2001)은 재생보증(renewing warranty)인 경우의 수리 가능한 시스템의 최적의 교체정책에 대한 베이즈 접근방법을 제안하였다.

본 논문에서는 보증기간이 재생되지 않는 비재생보증(non-renewing warranty)하에서 수리 가능한 시스템에 대한 최적의 베이즈 교체정책을 제안한다. 즉, 보증기간이 재생되지 않는 수리 가능한 시스템의 교체정책에 대해서 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 교체주기 τ^*를 결정하는 방법을 고려한다.

2장에서는 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템의 교체모형을 설명하고, 3장에서는 2장에서 설명한 교체모형에 대한 고전적인 관점에서의 교체정책을 설명한다. 본 논문에서 제안하고자 하는 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책은 4장에서 설명된다. 즉, 비재생보증이 있는 시스템에 대하여 보증기간 동안에 시스템의 고장이 발생하는 경우 시스템을 무료로 교체해주는 비재생무료보증(non-renewing free-replacement warranty : NFRW)인 경우와 고장이 발생할 때까지 시스템의 사용기간에 비례하여 시스템의 교체비용 일부를 소비자가 부담하도록 하는 비재생비례보증(non-renewing pro-rata warranty : NPRW)인 경우로 구분하여 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 교체정책을 결정한다. 또한, 모수에 대한 불확실성을 개정하기 위해 널리 사용되는 방법인 순응적 교체정책(adaptive replacement strategy)에 대하여 설명하고, 이를 본 논문에서 고려하는 비재생보증인 경우의 최적의 베이즈 교체정책에 적용하는 방법을 고려한다.

2. 시스템의 교체모형

비재생보증은 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생하였을 경우에 시스템은 새것으로 교체하지만 보증기간은 재생되지 않고 처음에 주어진 보증기간이 유지되는 것으로 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생했을 때 이를 교체하는데 소요되는 비용을 부담하는 정도에 따라 비재생무료보증(NFRW)과 비재생비례보증(NPRW)으로 구분된다. 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템의 보증기간을 w라 하고, 교체주기를 τ라고 하면, 시스템의 교체모형은 다음에 제시된 <그림 1>과 같이 나타낼 수 있다.



<그림 1> 시스템의 교체모형
(◇ : 고장발생시 교체, ○ : 고장 발생시 최소수리)

본 논문에서는 다음과 같은 교체모형에 대해서 보증기간이 종료된 이후에 소비자 측면에서의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 베이즈 교체정책을 제안한다.

모 형

i) 시스템은 NFRW이거나 NPRW이다.
ii) 보증기간 w는 재생되지 않는다.
iii) 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생하면 시스템을 새 것으로 교체한다.
iv) 보증기간이 종료된 이후에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리(minimal repair)를 한다.
v) 보증기간이 종료된 이후에 교체주기 τ에서 새 시스템으로 교체한다.
iv) 최소수리시간 및 교체시간은 고려하지 않는다.

3. 고전적인 접근방법에 의한 교체정책

비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템에서 보증기간 동안에 고장이 발생하면 시스템은 새 것으로 교체하지만, 보증기간은 재생되지 않고 처음에 주어진 보증기간이 유지된다. 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명(age)을 y라 하고, 보증기간 동안에 발생한 교체 횟수를 k라고 하면, y는 항상 0과 w사이에 존재하게 되며, 보증기간 동안에 고장이 전혀 발생하지 않아 시스템을 한 번도 교체하지 않으면, 즉 $k=0$이면 y는 보증기간 w와 같아지며, 역으로 $y=w$이면 $k=0$이 된다.

비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템에 대해 시스템이 교체주기 τ에서 교체될 때까지 시스템을 운용하는데 필요한 단위시간당 기대비용을 구하기 위해서는 시스템의 기대순환길이(expected cycle length)와 전체기대비용(total expected cost)을 구해야 한다. 비재생보증하에서의 시스템의 순환길이(cycle length)를 $L(\tau)$라 하면, 이는 소비자가 시스템의 교체비용 전체를 지불하고 시스템을 교체할 때까지의 길이로 정의된다. 이 때, 비재생보증하에서는 보증기간 동안에 시스템이 고장나더라도 보증기간이 처음부터 다시 시작되지 않으므로 <그림 1>을 참조하면 시스템의 기대순환길이는 다

음과 같다.

$$E\{L(\tau)\} = w + \tau. \tag{3.1}$$

여기서, w는 보증기간이고 τ는 교체주기이다.

비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템을 운용하는데 발생하는 전체기대비용을 $E\{C_T(x)\}$라 하면, 이는 다음에 정의되는 네 가지 기대비용의 합으로 구해진다.

$$E\{C_T(x)\} = E(C_W) + E(C_R) + E(C_M) + E(C_F). \tag{3.2}$$

여기서, $E(C_W)$는 보증기간 동안에 발생된 고장으로 시스템을 교체할 경우 소비자가 부담하게 되는 기대비용이고, $E(C_R)$는 보증기간이 종료된 이후에 교체주기 τ에서 시스템을 교체하기 위한 기대비용, $E(C_M)$은 보증기간이 종료된 이후에 교체주기 τ까지 발생되는 고장에 대해서 최소수리를 하기 위한 기대비용, $E(C_F)$는 보증기간 동안에 발생하는 시스템의 고장과 보증기간 이후에 발생하는 시스템의 고장으로 야기되는 기대비용이다.

이제 식 (3.2)에서 정의된 각각의 기대비용을 구해보자. 먼저 $E(C_W)$는 NPRW인 경우에는 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생하면 소비자가 그 때까지 사용한 기간에 비례한 교체비용을 지불하고 시스템을 새 것으로 교체하므로 c_r을 시스템의 교체비용이라고 하면, 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명이 y이므로 $E(C_W) = c_r(w-y)/w$이 된다. 반면에 NFRW인 경우에는 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생할 경우에 무료로 시스템을 교체해주므로 $E(C_W) = 0$이 된다. 두 번째로 $E(C_R)$은 보증기간이 종료된 이후에 교체주기 τ에서 시스템을 새 것으로 교체하기 위한 비용이므로 $E(C_R) = c_r$이 된다. $N(\tau)$를 보전기간 $(w, w+\tau)$에서 발생하는 고장횟수(number of failures)라고 하면, 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명이 y이므로 $E\{N(\tau)\} = \int_y^{y+\tau} h(t)dt$와 같이 된다. 따라서, 보전기간 동안에 최소수리를 하기 위한 기대비용은 $E(C_M) = c_m E\{N(\tau)\}$와 같다. 여기서, $h(t)$는 시스템의 고장율함수이고, c_m은 시스템의 최소 수리비용이다. 마지막으로 $E(C_F)$는 보증기간 동안에 발생한 고장 횟수가 k이므로 $E(C_F) = c_{f,w}\, k + c_{f,m} E\{N(\tau)\}$와 같다. 여기서, $c_{f,w}$는 보증기간 동안에 발생한 시스템의 고장으로 야기되는 비용이며, $c_{f,m}$은 보전기간 동안에 발생한 시스템의 고장으로 야기되는 비용이다. 이 결과들을 이용하면, 식 (3.2)의 전체 기대비용은 다음과 같다.

$$E\{C_T(\tau)\} = \begin{cases} c_r\left(\dfrac{w-y}{w}\right) + c_r + c_{f,w}\, k + (c_m + c_{f,w})E\{N(\tau)\}, & NPRW\text{인 경우} \\ c_r + c_{f,w}\, k + (c_m + c_{f,w})E\{N(\tau)\}, & NFRW\text{인 경우}. \end{cases} \tag{3.3}$$

따라서, 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템을 운용하기 위한 단위시간당 기대

비용은 식 (3.1)과 식 (3.3)으로부터

$$C(\tau) = \frac{E\{C_T(\tau)\}}{E\{L(\tau)\}}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{w+\tau}\left[c_r\left(\frac{w-y}{w}\right) + c_r + c_{f,w}\ k + (c_m + c_{f,w})E\{N(\tau)\}\right], & NPRW\text{인 경우} \\ \frac{1}{w+\tau}\left[c_r + c_{f,w}\ k + (c_m + c_{f,w})E\{N(\tau)\}\right], & NFRW\text{인 경우} \end{cases} \tag{3.4}$$

와 같이 구해진다. 일반적으로 신뢰성 분야에서 고장시간 T의 분포로 가장 널리 사용하고 있는 와이블분포(Weibull distribution)를 이용하여 α와 β가 주어진 경우 식 (3.4)에서 정의된 단위시간당 기대비용을 구하면 식 (3.5)와 같다. 여기서, 시스템의 고장율함수는 증가함수이어야 하므로 $\beta > 1$인 경우에 대해서만 고려한다.

$$C(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{w+\tau}\left[c_r\left(\frac{w-y}{w}\right) + c_r + c_{f,w}k + (c_m + c_{f,w})\alpha\{(y+\tau)^\beta - y^\beta\}\right], & NPRW\text{인 경우} \\ \frac{1}{w+\tau}\left[c_r + c_{f,w}k + (c_m + c_{f,w})\alpha\{(y+\tau)^\beta - y^\beta\}\right], & NFRW\text{인 경우}\ . \end{cases} \tag{3.5}$$

식 (3.5)의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 τ를 찾으면, 이 값이 고전적인 접근방법에 의한 최적의 교체주기 τ^*가 된다.

4. 베이즈 접근방법에 의한 교체정책

이 장에서는 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템에 대한 최적의 베이즈 교체정책을 고려한다. 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책은 고장시간 T의 분포에 존재하는 불확실성을 해결할 수 있는 방법이다. 따라서, 고장율함수에 포함된 두 모수 α와 β에 대한 사전확률분포(prior probability distribution)를 각각 다음과 같이 감마분포(gamma density)와 이산형 베타분포(discretization of beta density)로 가정하자(Mazzuchi와 Soyer(1996) 참조)

$$f(\alpha) = \frac{\nu^u}{\Gamma(u)}\alpha^{u-1}e^{-\nu\alpha},\ \ \alpha > 0\ . \tag{4.1}$$

$$P_l = \Pr(\beta = \beta_l) = \int_{\beta_l - \delta/2}^{\beta_l + \delta/2} g(\beta)d\beta\ ,\ \ l = 1, 2, \cdots, m. \tag{4.2}$$

식(4.1)에서 $u, \nu > 0$이고, 식 (4.2)에서 $\beta_l = \beta_L + \delta(2l-1)/2$, $\delta = (\beta_U - \beta_L)/m$이며, $g(\beta)$는 베타분포의 밀도함수로 $\beta \in (\beta_L, \beta_U)$이다. 고장율함수에 포함된 두 모수가 사전독립(prior independent)이라고 가정하면, α와 β의 결합사전확률분포(joint prior probability distribution)는 식 (4.1)과 식 (4.2)에 의해 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$p(\alpha,\beta)=\left\{\frac{\nu^{u}}{\Gamma(u)}\,\alpha^{u-1}e^{-\nu\alpha}\right\}\,P_l\,. \tag{4.3}$$

따라서, 식 (4.3)에서 정의된 두 모수 α와 β의 결합사전확률분포를 이용하여 NFRW인 경우와 NPRW인 경우 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 다음과 같이 구할 수 있다

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \frac{E_{\alpha,\beta}[E[C_T(\tau)\mid\alpha,\beta]]}{E_{\alpha,\beta}[E[L(\tau)\mid\alpha,\beta]]} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{w+\tau}\left[c_r\left(\dfrac{w-y}{w}\right)+c_r+c_{f,w}k+(c_m+c_{f,w})\sum_{l=1}^{m}\left(\dfrac{u}{\nu}\right)\{(y+\tau)^{\beta_l}-y^{\beta_l}\}P_l\right], & NPRW\text{인 경우} \\ \dfrac{1}{w+\tau}\left[c_r+c_{f,w}\,k+(c_m+c_{f,w})\sum_{l=1}^{m}\left(\dfrac{u}{\nu}\right)\{(y+\tau)^{\beta_l}-y^{\beta_l}\}P_l\right], & NFRW\text{인 경우}\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{4.4}$$

식 (4.4)에서 구해진 단위시간당 기대비용을 최소화하는 τ를 찾으면, 이 값이 보증기간이 종료된 이후의 베이즈 관점에서의 최적의 교체주기 τ^*가 된다. 따라서, 최적의 교체주기 τ^*를 찾기 위해서 식 (4.4)를 τ에 관해서 1차 미분한 다음 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &(w+\tau)(c_m+c_{f,m})\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{u}{\nu}\right)\beta_l(y+\tau)^{\beta_l-1}P_l\right) \\ &\quad-\ (c_m+c_{f,m})\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{u}{\nu}\right)\{(y+\tau)^{\beta_l}-y^{\beta_l}\}P_l\right)\ =\ c. \end{aligned} \tag{4.5}$$

단, $c=\begin{cases} c_r\left(\dfrac{w-y}{w}\right)+c_r+c_{f,w}\,k, & NPRW\text{인 경우} \\ c_r+c_{f,w}\,k, & NFRW\text{인 경우} \end{cases}$

정리 4.1 시스템의 고장율함수 $h(t)$가 순증가함수(strictly increasing function)라고 하자. 이 때, $\sum_{l=1}^{m}(u/\nu)\beta_l y^{\beta_l-1}P_l \geq c\,/\,w(c_m+c_{f,m})$ 이면 최적의 교체주기는 $\tau^*=0$ 이고, $\sum_{l=1}^{m}(u/\nu)\beta_l y^{\beta_l-1}P_l < c\,/\,w(c_m+c_{f,m})$ 이면 최적의 교체주기는 식 (4.5)를 만족하는 τ^*이다.

정리 4.1에서 c는 식 (4.5)에서 정의되었으며, 위 정리로부터 식 (4.5)를 만족하는 τ의 값이 베이즈 관점에서의 최적의 교체주기 τ^*가 됨을 알 수 있다.

이제, 고장율함수에 포함되어 있는 두 모수 α와 β에 관한 불확실성(uncertainty)을 개정할 수 있는 방법으로 Mazzuchi와 Soyer(1996)에 의해 제안된 순응적 교체정책을 본 논문에서 고려하는 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템에 대한 최적의 베이즈 교체정책에 적용시켜 보고자 한다. 시스템이 교체주기 τ에서 교체되기 전까지 발생한 n개의 고장시간(failure time)을 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\tau$라고 하면, α와 β의 우도함수

(likelihood function)는 다음과 같다.

$$L(\alpha,\beta \mid \boldsymbol{t})=\left\{\prod_{i=1}^{n}\alpha\beta t_i^{\beta-1}\right\}\exp\{-\alpha\tau^{\beta}\}. \tag{4.6}$$

따라서, 식 (4.3)에서 정의된 모수들의 결합사전확률분포와 식 (4.6)의 우도함수를 이용하면 두 모수 α와 β의 결합사후확률분포(joint posterior probability distribution)를

$$f(\alpha,\beta_l \mid \boldsymbol{t}) \propto \left\{\prod_{i=1}^{n}\alpha\beta_l t_i^{\beta_l-1}\right\}\exp\{-\alpha\tau^{\beta_l}\}\alpha^{u-1}\exp\{-\nu\alpha\}P_l \tag{4.7}$$

와 같이 구할 수 있으며, $f(\alpha \mid \beta_l, \boldsymbol{t})=f(\alpha,\beta_l,\boldsymbol{t})/\Pr(\beta=\beta_l,\boldsymbol{t})$이므로 α의 조건부사후확률분포(conditional posterior probability distribution)는 다음과 같이 구해진다.

$$f(\alpha \mid \beta_l, \boldsymbol{t})=\frac{\alpha^{n+u-1}\beta_l^n\left\{\prod_{i=1}^{n}t_i\right\}^{\beta_l-1}\exp\{-\alpha(\nu+\tau^{\beta_l})\}P_l}{\sum_{j=1}^{m}P_j\beta_j^n\left\{\prod_{i=1}^{n}t_i\right\}^{\beta_j-1}\Gamma(n+u)/(\nu+\tau^{\beta_j})^{u+n}}. \tag{4.8}$$

식 (4.8)을 살펴보면, α의 조건부 사전확률분포는 감마분포임을 알 수 있으며, 감마분포의 두 모수는 각각 $a^*=u+n$, $b^*=\nu+\tau^{\beta_l}$이 된다. 또한, 식 (4.7)과 식 (4.8)을 이용하면 β의 주변사후확률분포(marginal posterior distribution) P_l^*는 다음과 같이 구해진다.

$$\Pr(\beta=\beta_l \mid \boldsymbol{t})=P_l^*=\frac{\beta_l^n\left\{\prod_{i=1}^{n}t_i\right\}^{\beta_l-1}\Big/(\nu+\tau^{\beta_l})^{u+n}}{\sum_{j=1}^{m}P_j\beta_j^n\left\{\prod_{i=1}^{n}t_i\right\}^{\beta_j-1}\Big/(\nu+\tau^{\beta_j})^{u+n}}\;P_l. \tag{4.9}$$

비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템의 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책은 단위시간당 기대비용을 나타내는 식 (4.4)에서 u, ν, P_l의 값을 각각 u^*, ν^*, P_l^*로 대체시킨 다음 이를 최소화하는 최적의 교체주기 τ^*를 찾으면 된다,

5. 결론

본 논문에서는 비재생보증을 갖는 수리 가능한 시스템에 대한 최적의 베이즈 교체정책을 제안하였다. 즉, 시스템의 고장시간이 불확실성을 내포하는 모수 α와 β를 갖는 와이블분포를 한다고 가정할 때 비재생무료보증(NFRW)인 경우와 비재생비례보증(NPRW)인 경우에 대해 각각 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 교체주기를 결정하는 방법을 제안하였다. 그리고, 이전의 교체정책에서 얻어지는 정보와 새로운 고장자료를 이용하여 순응적 교체정책을 결정하는 방법을 살펴보았다.

참고문헌

[1] Chun, Y. H.(1992). Optimal number of periodic maintenance operations under warranty, *Reliability Engineering and System Safety,* 37, 223-225.

[2] Han, S. S., Jung, G. M. and Kwon, Y. S.(2001). A Bayesian Approach to Periodic Preventive Maintenance Policy, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, 29, 39-48.

[3] Jack, N. and Dagpunar, J. S.(1994). An optimal imperfect maintenance policy over a warranty period, *Microelectronics and Reliability,* 34, 529-534.

[4] Jung, G. M., Lee, J. H. and Park, D. H.(2000). Periodic preventive maintenance policies following the expiration of warranty, *Asia-Pacific Journal of Operational Research,* 17, 17-26.

[5] Jung, G. M. and Han, S. S.(2001). A Bayesian Approach to Optimal Replacement Policy for a Repairable System with Warranty Period, *The Korean Communications in Statistics*, submit.

[6] Mazzuchi, T. A. and Soyer, R.(1996), A Bayesian perspective on some replacement strategies, *Reliability Engineering and System Safety*, 51, 295-303.

[7] Sahin, I. and Polatoglu, H.(1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty, *IEEE Transactions on Reliability,* 45, 220-228.

[8] Sheu, S. H., Yeh, R. H., Lin, Y. B. and Juang, M. G.(1999), A Bayesian perspective on age replacement with minimal repair, *Reliability Engineering and System Safety*, 65, 55-64.

[9] Yeh, R. H. and Lo, H. C.(2001). Optimal preventive-maintenance warranty policy for repairable products, *European Journal of Operational Research,* 134, 59-69.