

예조건화 행렬에 따른 다중격자 기법의 수렴성 연구

Effects of Preconditioning Matrices on the Multigrid Convergence

*성춘호¹, 김윤식², 권장혁¹

ABSTRACT

In this paper, the convergence characteristics of preconditioned multigrid methods are investigated. The preconditioning method is introduced to reduce the condition number of discrete governing equations. 6 preconditioners including a point, line and diagonalized line solvers are implemented and applied to 2-dimensional inviscid flow problems. Theoretical Fourier analyses and numerical results are presented for the preconditioners.

1. 서론

정상 상태의 유동장 해석에서 수치 해석의 오차를 빠르게 감소시키는 수렴 가속화 기법은 중요한 기술의 하나로 자리 잡았다. 이러한 수렴 가속화 기법은 일반적인 유동 해석 뿐만 아니라 공력 최적 설계[1] 등과 같이 반복적인 유동해석이 필요한 계산에 있어 필수적이다. 다중격자 기법은 현재 전산 유체 역학에서 사용하는 많은 수렴 가속화 기법 중에서 가장 우수한 성능을 보이고 있는 것으로 알려져 있다.

다중 격자 기법은 1964년에 Fedorenko[2]가 Poisson 방정식에 대해 처음 제안한 이래, Ni[3], Jameson[4] 등에 의해 전산 유체 역학에 도입되어 사용되어 왔다. 현재 전산 유체 역학에서 많이 사용되는 다중 격자 기법은 기하학적으로 크기가 서로 다른 격자계를 연속적으로 사용하여 수렴을 가속화 시키는 방법이다. 즉, 일반적으로 해석에 사용되는 격자계를 가장 조밀한 격자계로 선택하고 이를 기반으로 성근 격자계들을 생성하여 해석을 수행하게 된다[2-4].

다중 격자 기법의 우수한 수렴성은 반복 연산과정에 발생하는 수치적 에러의 감소특성 및 파의 전파 특성으로 설명되어진다. 먼저, 파의 전파 특성 향상을 통한 오차 전파 가속 효과를 들 수 있다. 즉, 성근 격자에서 커진 시간 간격

을 이용하여 형상 경계에서 발생한 교란을 보다 빠르게 전파시킴으로써 다중 격자 기법이 우수한 수렴성을 얻을 수 있다[4,5].

또 다른 수렴 가속 효과로는 저주파 감소 특성 향상을 들 수 있다. 성근 격자에서는 조밀 격자의 저주파 영역의 오차가 고주파 영역의 오차로 나타나므로 smoother를 이용하여 이러한 저주파 영역의 오차를 보다 효과적으로 감소시킴으로써 단일 격자 기법에 비하여 우수한 수렴성을 얻을 수 있게 된다.

이러한 다중 격자의 특성을 극대화하기 위해서는 각 격자 단계에서의 smoother 가 고주파 영역의 에러에 대한 우수한 감소특성을 갖추고 있어야 한다. 우수한 감소 특성을 가지는 대표적인 기법으로는 다단계 시간 전진 기법을 들 수 있다. 이 방법은 Jameson[4]에 의해 고차의 시간 정확도 대신 고주파 영역의 에러에 대한 감소특성을 향상시키며 안정영역을 최대화하도록 설계되었으며, 상류 차분 잔류치 연산자에 적합하도록 박태상[6] 등에 의해 개선된 바 있다.

다단계 시간 전진 기법과 다중 격자 기법을 단순한 스칼라 형태의 방정식에 적용할 경우 우수한 성능을 얻을 수 있으나 여러 개의 고유치

1 한국과학기술원 항공우주공학전공

2 한국과학기술원 항공우주공학전공 대학원

가 존재하는 일반적인 벡터 형태의 방정식에서는 성능이 크게 저하된다. 이러한 현상은 벡터 방정식에서 존재하는 각각의 고유치들이 크기가 서로 달라서 발생하는 현상으로 고유치의 조건수가 크게 증가하는 저마하수 혹은 천음속 영역에서 현저하게 발생한다[7].

본 연구에서는 이러한 고유치의 분산에 따른 수렴 저하를 해결하기 위하여 대수적 관점에서의 예조건화 기법들을 적용하고 이에 따른 수렴 속도에 대하여 고찰하였다. 대수적 관점에서의 예조건화 기법은 지배 방정식의 물리적 특성을 고려한 저마하수 유동을 위한 예조건화 기법과는 구분되는 방법으로 이산화 된 지배 방정식의 잔류치 Jacobian 행렬을 적절히 근사화 하여 이를 예조건화 행렬로 사용하게 된다[8-10].

공간 이산화에는 Roe 의 FDS 기법과 2차 upwind TVD 기법을 적용하였고, 시간 전진 기법에는 박태상 등이 제안한 다단계 시간 전진 기법을 사용하였다[6]. 예조건자로는 일반적인 국소 시간 간격과 동일한 스칼라 Jacobi, 특성치 국소 시간 간격에 해당하는 block-Jacobi, AF-ADI, DDADI, dADI, dDDADI 등 6 가지 예조건자를 사용하였으며 이들의 이론적 성능을 Fourier 해석을 통하여 예측하고 2차원 Euler 방정식에 대한 결과를 비교하였다.

2. 지배 방정식 및 수치 해석 기법

2.1 지배 방정식

일반적인 압축성 비점성 유동의 지배방정식인 Euler 방정식을 2차원 직교 좌표계에서 미분 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

여기서 \mathbf{q} 는 유동 변수를, \mathbf{f} , \mathbf{g} 는 비점성 유속 벡터를 나타내며 자세한 식은 참고문헌[6]에 자세히 기술되어 있다.

지배방정식을 직교좌표계에서 일반좌표계 ($\xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta$)로 변환하면 좌표 변환의 metric 들은 다음과 같이 정의된다.

$$K_{ij} = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right], \quad J = \det(K), \quad S_{ij} = \frac{K_{ij}}{J} \quad (2)$$

이를 이용하면 계산 영역에서의 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{\mathbf{q}}{J}, \\ \mathbf{F} &= S_{11} \mathbf{f} + S_{12} \mathbf{g} \\ \mathbf{G} &= S_{21} \mathbf{f} + S_{22} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4)$$

로 정의된다.

2.2 공간 이산화

식 (3) 의 지배 방정식을 공간 이산화 하기 위하여 격자 중심 유한 체적법을 사용하였다. 공간 이산화된 지배 방정식은 식(5) 와 같이 각 격자 중심에서 정의되는 유동 변수 및 잔류치에 대한 연계된 상미분 방정식의 형태로 표현된다.

$$\frac{d\mathbf{Q}_{i,j}}{dt} + \mathbf{R}_{i,j} = 0 \quad (5)$$

여기서 \mathbf{R} 은 잔류치 벡터를 의미한다. 이 때, 잔류치 벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2} + \mathbf{G}_{j+1/2} - \mathbf{G}_{j-1/2} \quad (6)$$

대류항의 계산을 위하여 본 연구에서는 충격파 와 같은 불연속면을 잘 나타내면서 수치적 불안정성을 배제할 수 있는 2차 upwind TVD기법 [6]을 이용하였다. 이 기법에 의해 대류항을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i+1/2} (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{i+1/2} (\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_{i+1}) + \left(\frac{\mathbf{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\Phi}_\xi}{J} \right)_{i+1/2} \right] \quad (7) \end{aligned}$$



여기서 T_{ξ} , T_{η} 는 유속 Jacobian 행렬의 고유 벡터 행렬이고 ϕ 는 TVD조건을 만족하는 수치 소산항으로서 다음과 같다.

$$\phi = -\Psi(\widehat{\lambda})[\alpha - L] \quad (8)$$

여기서, $\widehat{\lambda}$ 는 유속 Jacobian 행렬의 고유치 행렬이며, α 는 경계면에 이웃한 두 계산 격자간의 특성 변수(characteristic variables)의 차이를 나타낸다. 대류항의 유속 Jacobian은 Roe의 평균치를 이용하였다. Ψ 는 Roe의 근사 Riemann 해법의 결점인 팽창 충격파와 같은 비물리적인 해가 발생하지 않도록 하는 entropy 보정 함수이다. L 은 제한자 함수(limiter function)이며, 본 연구에서는 minmod 제한자를 사용하였다.

2.3 시간 전진 기법

$Q^n (= Q^{(0)})$ 으로부터 $Q^{n+1} (= Q^{(m)})$ 을 구하는 예조건화된 m 단계 시간 전진 기법은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Q^{(k)} = Q^{(0)} - \alpha_k CFL_{\text{expl}} [P^{-1} R^{(k-1)}] \quad (9)$$

위에서 α_k 는 다단계 시간전진 계수를 의미한다.

본 연구에서는 박태상 등에 의하여 제안된 2차 upwind TVD기법을 위한 4단계 시간 전진 기법을 사용하였다[6]. 본 기법에서 사용한 다단계 시간 전진 기법의 각 단계에서의 잔류치 계산은 다음과 같다. 먼저 잔류치를 1차 upwind 대류항 (R^{1st}) 과 반감쇄항 (R^a) 으로 나눈다.

$$R = R^{1st} + R^a \quad (10)$$

4단계 시간 전진 기법에서 반감쇄항은 첫 단계에서만 구하며, 1차 upwind 대류항은 매 단계에서 다시 구한다. 위의 과정을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$R^{(0)} = R^{1st}(Q^{(0)}) + R^a(Q^{(0)}), k=0$$

$$R^{(k)} = R^{1st}(Q^{(k)}) + R^a(Q^{(k)}), k \geq 1 \quad (11)$$

그리고, 다단계 시간 전진 계수 및 CFL수는 다음과 같다.

$$\alpha_1 = (2\sigma)^{-1} - (4\sigma^2\alpha_2)^{-1} + (8\sigma^3\alpha_2\alpha_3)^{-1} - (32\sigma^4\alpha_2\alpha_3)^{-1},$$

$$\alpha_2 = 0.21, \alpha_3 = 0.5, \quad (12)$$

$$\sigma = 2.8 = CFL_{\text{expl}}$$

여기서 CFL_{expl} 은 외재적 시간 전진 기법의 CFL 수이며 이후 사용될 예조건자의 CFL 수와 구분하기 위하여 하첨자를 사용하였다.

2.4 다중 격자 기법

비선형 지배 방정식의 반복 계산을 위하여 FAS(Full Approximation Scheme)를 사용하였다. 성근 격자는 full-coarsening 기법을 이용하였으며, 톱니(saw-tooth) 사이클을 사용하였다. 유동 변수에 대한 restriction 연산자는 면적 가중 평균 연산자를 사용하였으며, prologation 연산자는 bilinear interpolation 연산자를 사용하였다. 조밀 격자와 성근 격자에서의 시간 전진 과정, 격자들간의 유동 변수 및 잔류치의 전달 등 다중 격자 사이클 과정에서의 자세한 내용은 참고문헌[6]에 자세히 기술되어 있다.

III. 예조건화 기법

3.1 잔류치 Jacobian 행렬

정상 상태의 지배 방정식을 내재적 시간 적분의 형태로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left(\frac{I}{\Delta t_{\text{impl}}} + A + B\right)\Delta q = -R \quad (13)$$

여기서 좌변은 내재적 기법의 연산자를 의미하며 이들은 잔류치 Jacobian 행렬로 이루어진다. 따라서 행렬 A, B는 잔류치를 구성하는 유속 Jacobian 행렬들로 표현되며 다음과 같이 쓸 수 있다[5].

$$A = [a_{kl}] = \left[\frac{\partial(F_{k+1/2} - F_{k-1/2})}{\partial q_l} \right] \\ B = [b_{kl}] = \left[\frac{\partial(G_{k+1/2} - G_{k-1/2})}{\partial q_l} \right] \quad (14)$$

여기서 A, B 는 각각 4×4 의 행렬을 성분으로 가지는 block 행렬이 되며 수치 유속의 형태에 따라 각 행에 5개 혹은 3개의 0 이 아닌 항이 존재하는 형태를 가지게 된다. 본 연구에서 사용하는 예조건자들은 고차항에 의한 유속 Jacobian 행렬을 무시하고 사용하며 따라서 A, B 는 3개의 0 이 아닌 항을 가지는 block 행렬로 정의할 수 있다.

이 때, 좌변의 내재적 연산자를 근사하지 않고 행렬 해석 기법을 이용하여 해석하면 완전한 내재적 기법이 된다. 대수적 관점에서의 예조건자는 이러한 내재적 연산자를 근사화하여 전체적인 행렬의 조건수를 안정화하기 위하여 사용한다. 따라서 사용하는 예조건자는 이산 지배 방정식의 잔류치 Jacobian 행렬에 해당하는 식 (13) 의 좌변 행렬과 동일한 형태를 사용할수록 우수한 성능을 나타내게 된다.

그러나 이러한 예조건자는 sparse 형태의 거대한 행렬 방정식으로 표현되므로 실제 계산에서는 사용하기가 매우 어렵다. 본 연구에서는 다음과 같이 6 종류의 근사화된 행렬들을 예조건자로 사용하였다.

3.2 Scalar Jacobi 예조건자

스칼라 Jacobi 예조건자는 일반적인 국소 시간 간격과 동일하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_{SJ} = \frac{I}{\Delta t_{imp}} + \rho(d(A))I + \rho(d(B))I \quad (15)$$

여기서 $\rho(\cdot)$ 은 잔류치 Jacobian 행렬의 spectral radius를 의미하고 $d(\cdot)$ 는 행렬의 대각항만을 선택하는 연산자를 의미한다. 내재적 시간 간격 Δt_{imp} 는 다음과 같다.

$$\Delta t_{imp} = CFL_{imp} / (\rho(d(A)) + \rho(d(B))) \quad (16)$$

3.3 Block Jacobi 예조건자

각 계산 격자에서 정의되는 Point-implicit 형식의 block Jacobi 예조건자는 다음과 같다[8].

$$P_{BJ} = \frac{I}{\Delta t_{imp}} + d(A + B) \quad (17)$$

Block Jacobi 예조건자의 경우 4×4 대각행렬 연산을 수행하게 된다.

3.4 AF-ADI(Approximate Factorization ADI) 예조건자

내재적 기법에서 많이 사용되는 AF-ADI 기법은 잔류치 Jacobian 행렬을 다음과 같이 근사인자화하여 사용한다[11].

$$P_{AF} = \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + A \right) \Delta t_{imp} I \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + B \right) \quad (18)$$

위 식에서 한 번의 예조건자 계산에 두 번의 block 삼대각 행렬 계산이 요구된다.

3.5 DDADI(Diagonally-Dominant ADI) 예조건자

DDADI 기법은 AF-ADI 기법과 유사하나 대각지배를 향상시키기 위하여 다음과 같이 수정된다[12].

$$P_{DD} = \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + D + A \right) \cdot D^{-1} \cdot \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + D + B \right) \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} D &= d(A + B), \\ A' &= A - d(A), \\ B' &= B - d(B) \end{aligned} \quad (20)$$

로 정의된다.

이 기법은 대각항이 두 번의 근사인자화에 모두 포함되어 있으므로 한 번의 대각항 역행렬이 예조건자에 추가되어야 하며 따라서 AF-ADI 방법과 비교하여 한 번의 block 대각행렬 계산이 추가로 사용된다. DDADI 기법은 일반적인 선형 대수에서 이야기하는 line Jacobi 기법과 동일한 형태가 된다.

$$\begin{aligned} D &= \rho(\Lambda_\xi)I + \rho(\Lambda_\eta)I, \\ \Lambda'_\xi &= \delta_\xi \Lambda_\xi - \rho(\Lambda_\xi), \\ \Lambda'_\eta &= \delta_\eta \Lambda_\eta - \rho(\Lambda_\eta) \end{aligned} \tag{23}$$

이 때, 예조건자는 다음과 같다.

3.6 dADI(diagonalized-ADI) 예조건자

Pulliam 등이 제안한 dADI 기법은 내재적 연산자를 대각화하여 계산량을 절감할 수 있는 방법으로 다음과 같이 정의된다[13].

$$P_{DB} = \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + D + \Lambda'_\xi \right) \cdot D^{-1} \cdot \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + D + \Lambda'_\eta \right) \tag{24}$$

$$P_{DA} = T_\xi \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + \delta_\xi \Lambda_\xi \right) \cdot N \Delta t_{imp} I \cdot \left(\frac{I}{\Delta t_{imp}} + \delta_\eta \Lambda_\eta \right) T_\eta^{-1} \tag{21}$$

dDDADI 기법은 대각항의 역행렬이 추가되기는 하지만 이 항이 scalar 형태를 가지고 있으므로 행렬 연산의 계산량은 dADI 기법과 동일하게 된다.

여기서

IV. 결과 및 토의

4.1 Fourier footprints

$$\begin{aligned} d(A) &= T_\xi \Lambda_\xi T_\xi^{-1} \\ d(B) &= T_\eta \Lambda_\eta T_\eta^{-1} \\ N &= T_\xi^{-1} T_\eta \end{aligned} \tag{22}$$

로 정의되고 δ 는 각 방향으로의 차분 연산자들의 의미한다.

계산에 앞서 전절에서 제시한 6 가지 예조건자들의 이론적 수렴 특성을 고찰하기 위하여 Fourier 해석을 수행하였다. 자세한 해석의 과정은 참고문헌[10]에서 찾을 수 있으며 여기서는 결과만을 제시한다.

dADI 기법은 대각화로 인하여 block 삼대각행렬 연산이 여러번의 스칼라 삼대각행렬 연산으로 대체되어 계산 시간을 크게 단축할 수 있게 된다.

본 논문에서 제시한 6 가지 예조건자와 2차 upwind TVD 기법을 선형화 한 2차 상류 차분 잔류치 연산자를 이용한 Fourier footprints를 나타내면 그림 1-4 와 같다.

3.7 dDDADI(diagonalized-DDADI) 예조건자

dDDADI 기법은 DDADI 기법의 대각화 된 형태와 같다. 그러나 이 방법은 대각항에 속하는 D 를 동시에 대각화(diagonalize) 할 수 없는 문제가 발생하므로 이를 적절히 근사하여 사용하게 된다. 따라서 이 방법은 대각항의 근사 기법에 따라 여러 가지로 나뉘어 질 수 있다. 본 연구에서는 다음과 같은 대각행렬을 사용한다 [14].

이론적인 해석에서 대각화 기법이 사용된 기법과 사용하지 않은 기법을 구분하지 않았으므로 Fourier 해석에서의 footprint 역시 같게 나타난다. 따라서 dADI, AF-ADI 의 footprint 는 동일하며 dDDADI, DDADI 의 footprint 역시 동일하다.

Fourier footprints에서 사용된 유동조건은 마하수 0.8, 격자 가로세로비 1, 예조건자의 CFL 수는 10 인 경우이다. 실선으로 나타낸 선은 1 차원 대류 방정식에 대한 2차 상류 차분 잔류치 연산자의 Fourier symbol 이다. 증폭률 contour 는 0에서 1까지의 값을 0.1간격으로 나타낸 것이다. Fourier footprints는 각 방향으로 $\pi/2$ 에

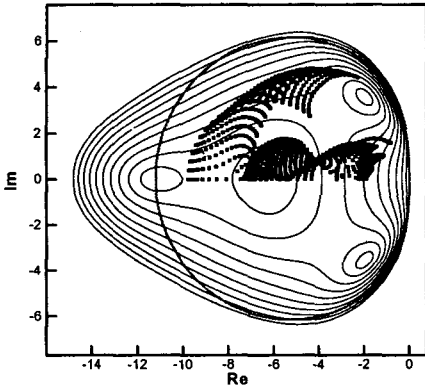


그림 6 Scalar Jacobi 예조건자

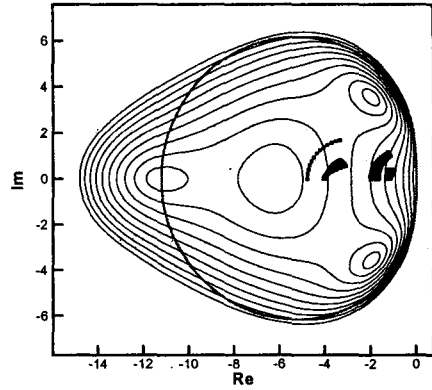


그림 8 ADI 예조건자

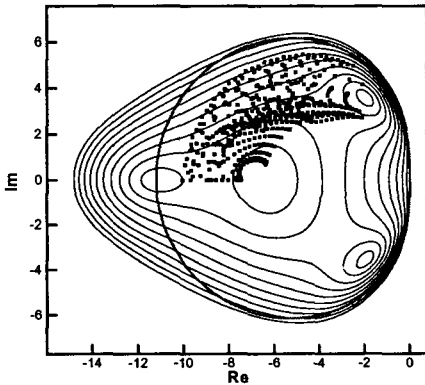


그림 7 Block Jacobi 예조건자

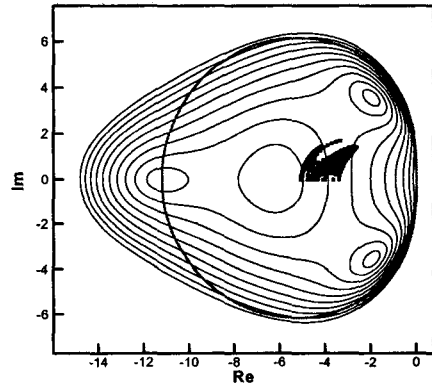


그림 9 DDADI 예조건자

서 π 구간의 고주파수 영역에서 나타내었다.

Scalar Jacobi, block Jacobi 예조건자의 경우 footprint 가 실수축을 기준으로 넓게 분포하고 있어 오차의 전파속도가 우수하여 다중 격자를 적용할 경우 성근격자에서의 오차전파가속 효과를 충분히 얻을 수 있을 것으로 예상할 수 있다. 그러나 scalar Jacobi 의 경우 원점 주위에도 많은 footprint 가 존재하므로 이들로 인한 수렴 저하가 발생할 수 있을 것으로 예측할 수 있다.

ADI, DDADI 예조건자의 경우 footprint 가 실수축 주위에 집중되어 있어 전체적인 오차의 전파속도가 Jacobi 기법들에 비하여 느릴 것으로 예상할 수 있고, 따라서 다중격자의 오차전

파가속 효과 또한 Jacobi 기법들에 비하여 적을 것으로 예상할 수 있다. 특히 ADI 의 경우 원점 주위에도 많은 footprint 가 남아 있어 이로 인한 수렴저하 또한 예상할 수 있다.

4.2 수치 해석 결과

앞서 수행한 수치 안정성 해석 결과를 실제 문제에 검토하기 위하여 2차원 익형 주위의 비점성 압축성 유동장을 해석하였다. 해석에 사용된 형상은 NACA 0012 익형이며 129×33 의 O형 격자계를 사용하였다.

NACA 0012 해석에 사용된 유동 조건은 마

	단일격자	다중격자	Speed up
Scalar Jacobi	4114	1052	3.91
Block Jacobi	2801	438	6.40
dADI	318	237	1.34
dDDADI	2225	611	3.64
AF-ADI	347	253	1.37
DDADI	771	232	3.32

표 1 단일격자와 다중격자의 반복횟수

하수 0.8, 받음각 0 도이다. 그림 5 는 이 때의 단일 격자계의 수렴 곡선을 나타내고, 그림 6 은 다중격자의 수렴 곡선을 나타내고 있다.

단일 격자의 경우 예조건자가 주어진 잔류치의 Jacobian 행렬과 유사한 형태를 가지고 있을 수록 빠른 수렴성을 보여줄 것으로 예상할 수 있다. 실제로 dADI 기법과 AF-ADI 기법이 가장 빠른 결과를 보이고 있으며 DDADI 기법은 이들에 비하여 약간 느린 결과를 보여준다. 즉, 대각 지배를 강화하기 위하여 사용한 근사 인자화 기법이 강건성은 향상시킬 수 있으나 수렴성에 있어서는 특별한 효과를 얻을 수 없는 것으로 생각할 수 있다.

dDDADI 기법의 경우 근사 인자화를 위하여 대각항을 수정하는 과정에서 잔류치 Jacobian 의 spectral radius 만을 사용하는 근사를 도입하므로 수렴성이 크게 저하되는 결과를 보이고 있으며, scalar Jacobi 와 block Jacobi 기법은 point implicit 방법에 해당하므로 line implicit 방법에 해당하는 타 예조건자의 비하여 가장 느린 수렴성을 나타낸다.

그림 6 의 다중 격자의 경우 전체적인 수렴 속도는 단일격자의 수렴성에 많은 영향을 받는다. 즉, 단일 격자에서 우수한 수렴성을 보인 dADI, AF-ADI 기법이 빠른 결과를 보이고 있으며 DDADI 경우 다중격자로 인하여 가장 빠른 수렴성을 나타내고 있다. 이 때, 다중 격자로 인한 수렴가속효과를 정확히 파악하기 위하여 단일 격자와 다중격자의 반복횟수 및 이들의 비

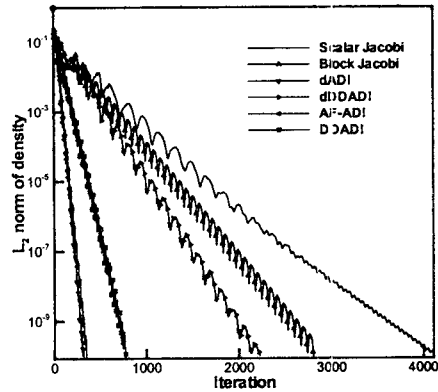


그림 11 단일 격자의 수렴곡선 (NACA 0012, M=0.8, AOA=0)

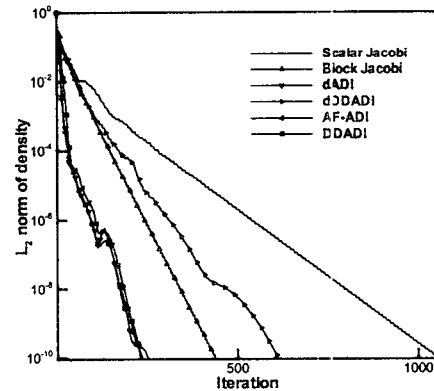


그림 12 다중 격자의 수렴곡선 (NACA 0012, M=0.8, AOA=0)

를 표 1 에 나타내었다.

다중 격자 기법으로 인한 가속비를 보면, Fourier 해석에서 가장 좋은 고주파 감쇠 특성을 보인 block Jacobi 예조건자의 가속비(speed up)가 6.4 로 가장 크게 나타났다. Scalar Jacobi, dDDADI, DDADI 등의 예조건자는 3 이상의 가속비를 나타내었다. 그러나 단일 격자에서 가장 우수한 성능을 보인 dADI 기법과 AF-ADI 기법의 경우 다중 격자의 가속비가 1.3 정도로 다중 격자의 효과가 근대화되지 못하고



있음을 확인할 수 있다.

V. 결 론

본 연구에서는 예조건자에 따른 다중격자 다단계 시간 전진 기법의 수렴성 특성을 이론적 해석과 실제 수치 해석을 통하여 해석하였으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

Fourier 해석을 통한 고주파 영역의 감쇠 특성을 해석한 결과 block Jacobi 예조건자가 가장 우수한 특성을 나타내었으며 실제 수치 해석 결과에서도 가장 우수한 가속비를 얻을 수 있었다.

ADI 기법과 DDADI 기법의 경우 단일 격자의 성능은 block Jacobi 에 비하여 우수하였으나 다중 격자의 가속비가 block Jacobi 에 비하여 미흡함을 확인할 수 있었다. 그러나 비점성 유동 해석에 있어서는 전체적인 수렴 속도에 있어 block Jacobi 에 비하여 빠른 결과를 보여준다.

대각화 기법을 사용한 dADI 기법은 AF-ADI 기법에 비하여 행렬 계산을 크게 단순화 하면서도 유사한 수렴 특성을 나타냄을 확인할 수 있었으며 dDDADI 기법의 경우 대각항의 근사로 인하여 수렴성의 저하가 발생함을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 기초연구과제 "Navier-Stokes code의 수렴성 증진 방안 연구"의 지원으로 수행되었음을 밝히며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] 성춘호, 권장혁, "강연계 기법을 이용한 공력최적설계", 한국항공우주학회 춘계 학술발표회 논문집, pp.642-645(2001)
- [2] R.P. Fedorenko, "The speed of convergence of one iterative process", *USSR Comput. Math. and Math. Phys.* 4 No.3 pp.227-235(1964)
- [3] R.-H. Ni, "A multiple-grid scheme for solving the Euler equations", *AIAA J.* 20. pp.1565-1571(1982)
- [4] A. Jameson and S. Yoon, "Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes", *AIAA J.* 24, No.11, pp.1737-1743 (1986)
- [5] 박수형, 성춘호, 권장혁, "2차 upwind TVD 기법을 이용한 효율적인 다중 격자 DADI 기법", 한국항공우주학회지 26권 7호, pp.28-36, (1998)
- [6] 박태상, "2차 upwind TVD 기법을 위한 개선된 다단계 시간 전진 기법", 박사학위논문, 한국과학기술원 항공우주공학과(1998)
- [7] S. Venkateswaran and C.L. Merkle, "Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier Stokes Equations", 30th VKI Lecture Series in CFD(1999)
- [8] N.A. Pierce, "Preconditioned Multigrid Methods for Compressible Flow Calculations on Stretched Meshes", Ph.D. Thesis, Oxford University(1997)
- [9] S.R. Allmaras, "Analysis of a Local Matrix Preconditioner for the 2-D Navier-Stokes Equations", AIAA-93-3350-CP(1993)
- [10] 김윤식, 권장혁, "다중 격자 기법을 위한 예조건화된 다단계 시간 전진 기법", 한국전산유체공학회 춘계 학술발표회 논문집(2001)
- [11] R. Beam and R.F. Warming, "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hypersonic Systems in Conservation-Law Form", *J. Comput. Phys.*, 22, 87-110(1976)
- [12] R.W. MacCormack, "A New Implicit Algorithm for Fluid Flow", AIAA-97-2001 (1997)
- [13] Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm", *J. Comput. Phys.* 39, 347-363(1981)
- [14] G. Klopfer, R. Van der Wijngaart, C. Hung and J. Onufer, "A Diagonalized Diagonal Dominant Alternating Direction Implicit Scheme Subiteration Correction", AIAA-98-2821 (1998)