



비정상 Euler 방정식을 이용한 동안정 미계수 예측

Prediction of Dynamic Stability Derivatives
Using Unsteady Euler Equations*박수형¹⁾, 김윤식¹⁾, 권장혁²⁾

*Soo Hyung Park, Yoonsik Kim, Jang Hyuk Kwon

A dual-time stepping algorithm combined with a parallelized multigrid DADI method is presented to predict the dynamic damping coefficients. The Basic Finner model is chosen to validate the prediction capability of the present unsteady Euler method. The linearity of the pitch- and roll-damping coefficients is shown in the low angular rates and the interesting large drop and stiff increment in transonic region for roll-damping coefficients are explained in detail. Through the analysis for the pressure distributions at Mach number 1.0 to 1.2, the sudden drop results from the normal shock and the stiff increment of roll-damping reflects the transition of the normal shock to the oblique shock. The results also show that the Euler equations can give the damping coefficients with a comparable accuracy.

1. 서 론

유도탄이나 발사체의 동적 안정성(dynamic stability)은 제어기(controller)와 형상 설계의 중요한 고려요소이다. 운동상태에 있는 발사체의 동적 안정성은 힘과 모멘트에 대한 동안정 미계수로 표현된다. 비정상 운동에 의해 야기되는 동안정 미계수 예측은 주로 실험적인 방법이나 선형이론 또는 준실험식에 의한 방법이 현재까지도 주를 이루고 있다. 전산유체역학을 이용한 방법에서는 동체 축을 기준으로 회전 좌표계를 도입함으로써 정상상태로 치환한 후 유동장 해석을 수행하는 방법이 주로 사용되고 있다[1]. 이 방법은 한 번의 정상 유동장 해석으로 원하는 동안정 미계수를 효율적으로 얻을 수 있다는 장점이 있으나, 복잡한 비선형 현상을 포함하기 어려우며 유동 구조의 파악이 쉽지 않다는 단점이 있다.

3차원 미사일 주변의 동안정 미계수 예측[2]

을 위해 직접 비정상 유동장을 해석하지 않은 본질적인 이유는 비정상 유동장 해석에 소요되는 과도한 시간 때문이다. 전산유체역학 기법과 컴퓨터의 발달에 힘입어 3차원 비정상 유동해석을 위한 시도가 최근 들어 있어 왔다[3].

본 연구에서는 현재까지 3차원 천음속 유동장 해석에 뛰어난 성능을 보여주고 있는 병렬처리된 다중격자 DADI(multigrid Diagonalized ADI) 기법[4,5]에 이중 시간 전진(dual-time stepping) 기법[6,7]을 적용하여 동안정 미계수 예측을 위한 비정상 유동 해석을 수행하였다. 많은 실험치가 있는 Basic Finner 형상의 동안정 미계수를 예측하고 실험치[8]와 비교하였으며, 마하수에 대한 동안정 미계수의 비선형 현상[9]에 대한 정성적 해석을 수행하였다.

2. 지배 방정식 및 수치 해석 기법

2.1 지배 방정식

1) 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학전공 대학원

2) 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학전공(jhkwon@kaist.ac.kr, Tel : 042-869-3715)

3차원 비정상 비점성 유동의 지배방정식인 비정상 Euler 방정식을 일반좌표계에서 보존형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{q}{J} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (\rho e + p)U + \xi_x p \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{Q} 는 유동 변수이고, \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} 는 비점성 유속 벡터를 나타내며 \mathbf{G} , \mathbf{H} 는 \mathbf{F} 와 유사하게 표현된다. 일반좌표계의 격자면 속도(contravariant velocity)는 다음과 같다.

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w - \xi_t \quad (3)$$

여기서 ξ_t 는 ξ 방향 격자의 이동속도이다.

2.2 수치 해석 기법

지배방정식에 유한체적법(cell centered finite volume method)을 적용하면 다음과 같은 시간에 대한 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d \mathbf{Q}_{ijk}}{dt} + \mathbf{R}_{ijk} = 0 \quad (4)$$

여기서 잔류치(residual) \mathbf{R}_{ijk} 는 각 격자의 경계면을 출입하는 유속의 합으로 계산할 수 있다.

본 연구에서는 격자 경계면에서의 유속을 계산하기 위하여 Roe의 FDS(Flux Difference Splitting) 방법과 2차 upwind TVD 기법을 적용하였다. 이 기법에 의한 i 방향의 경계면 수치유속은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\xi_t}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \left(T_\xi \frac{\Phi_\xi}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right], \quad l=1,2,3. \end{aligned} \quad (5)$$

다른 방향의 수치유속들도 유사한 방법으로 표현된다. 여기서 T_ξ 는 유속 Jacobian 행렬 \mathbf{A} 의 고유벡터(eigenvector) 행렬이다. 여기서 계산 격자의 벽면에서 구하는 값들은 모두 Roe가 제안한 가중평균값으로 구한다.

Φ 는 TVD조건을 만족하는 수치 소산항으로서 다음과 같다.

$$\Phi = -\Psi(\lambda)(\alpha - L) \quad (6)$$

여기서 λ 는 유속 Jacobian 행렬의 고유치이며, α 는 경계면에 이웃한 두 계산 격자 간의 특성 변

수(characteristic variables)의 차이를 뜻한다. Ψ 는 Roe의 근사 리만해법의 결점인 팽창 충격파나 Carbuncle과 같은 비물리적인 해가 발생하지 않도록 하는 엔트로피 보정 함수이다. L 은 제한자 함수(limiter function)이며, 본 연구에서는 수렴성이 좋은 minmod 제한자가 사용되었다. 공간 차분기법에 관한 자세한 표현은 참고문헌 [4,5]를 참조하기 바란다.

비정상 유동장 해석을 위해 필요한 시간정확도를 확보하기 위해 Jameson 등에 의해 제안된 이중시간적분법이 사용되었다[6]. 이 방법은 고차의 정확도로 차분된 물리적 시간 Δt 에 대한 비정상 잔류치(unsteady residual)를 정의하고, 각 시간단계에서 가상시간 $\Delta \tau$ 를 도입하여 비정상 잔류치를 정상 잔류치로 취급하여 수렴시킴으로써 시간을 전진시켜 나가는 방법이다. 따라서, 가상시간에 대해 정상해를 구하는 방법들인 내재적 방법, 국소시간간격, 다중격자기법 등의 수렴가속기법을 적용할 수 있기 때문에 90년대 이후 시간적분법으로 각광받고 있다[3,7].

식 (4)에서 시간에 대한 이차 후방미분을 적용하고 가상시간을 도입하면 다음과 같다.

$$\frac{d \mathbf{Q}_{ijk}}{d\tau} + \mathbf{R}^U_{ijk} = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{R}^U_{ijk} = \frac{3 \mathbf{Q}^{n+1} - 4 \mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} + \mathbf{R}_{ijk}^{n-1} \quad (8)$$

식 (8)과 같이 정의된 비정상 잔류치에 대한 상미분 방정식 (7)의 내재적 표현은 다음과 같다.

$$\left[\left(\frac{1}{J\Delta\tau} + \frac{3}{2J\Delta t} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right] \Delta \mathbf{q} = \mathbf{R}^U_{ijk} \quad (9)$$

최종적으로 얻은 식 (9)는 잔류치의 정의와 왼쪽항의 대각항에 물리적 시간항이 들어가는 것을 제외하면 정상해에 대한 내재적 표현과 같음을 알 수 있다.

본 연구에서는 식 (9)를 풀기 위해 다중격자 DADI(Diagonalized ADI) 기법을 사용하였다[4]. 본 연구에서는 공간 차분에 사용된 유속함수로부터 직접 내재적 연산자를 유도하기 위해 식 (5)에 주어진 유속함수 자체를 분해하는 방법으로 내재적 연산자를 구성하였다. 2차원 비점성 유동장에 대한 참고문헌[4]의 결과는 내재적 연산자가 유동 해석의 안정성과 수렴성에 영향을 줌을 보여 준다.

DADI 기법의 경우 CFL 수가 커짐에 따라 전반적인 오차의 감쇠특성은 좋아지지만 고주파감쇠특성은 나빠지는 것으로 알려져 있다[4]. 따라서, 본 연구에서는 고주파감쇠특성에 크게 의존하는 기존의 다중격자 방법들과 달리 CFL이 커짐에 따라 좋아진 전체감쇠특성을 이용해 빠르게 잔류치를 전파시키기 위해 수정된 톱니사이클 다중격자 기법을 사용하였다[4]. 또한, 개량된 톱니사이클과 함께 성근 격자계에서 더 커진 최대 CFL 수를 이용하기 위해 다음과 같이 CFL 수를 다중격자 단계(multigrid level)에 따라 변화시키는 방법을 적용하였다[5].

$$CFL_L = CFL_F \sqrt{L} \quad (10)$$

여기서 CFL_F 는 가장 조밀한(fine) 격자에서 사용되는 CFL 수이다. 즉, 격자가 성글어 질수록 더욱 큰 CFL 수를 사용함으로써 잔류치를 빠르게 전파시키게 된다.

2.3 경계 조건

원방 경계 조건으로 경계 격자면에 수직인 방향의 속도 성분이 초음속인 경우, 유동이 계산 영역으로 유입될 때 자유 흐름(free stream)값으로 고정시키고, 계산 영역 밖으로 유출될 때는 하나 안쪽의 값으로 외삽하였다. 아음속인 경우는 Riemann 불변치를 사용한 특성 경계 조건을 사용하였다.

벽면에서는 밀도와 압력은 하나 위의 격자로부터 외삽하고 속도는 벽면에 수직인 속도 성분을 0으로 하였다.

3. 동안정 미계수

특정한 운동상태의 비정상 운동을 수치적으로 모사함으로써 발사체의 동안정 미계수를 구할 수 있다. 현재까지 동체축을 기준으로 회전 좌표계를 도입함으로써 정상상태로 치환한 후 유동장 해석을 수행하여 동안정 미계수를 구하는 방법이 주로 사용되고 있다[1].

본 연구는 현재까지 가장 효율적으로 수치해를 얻을 수 있는 방법 중의 하나인 현재의 방법을 이용하여 비정상 해석을 수행함으로써 동안정 미계수를 얻는 것을 목표로 한다.

먼저, 피칭운동과 롤링운동에 대한 모멘트의 동안정 미계수를 정의하면 다음과 같다.

$$C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}} = \frac{2U_\infty}{D} \left(\frac{\partial C_m}{\partial q} + \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}} \right) \quad (11)$$

$$C_{lp} = \frac{2U_\infty}{D} \frac{\partial C_l}{\partial p}$$

여기서 C_m 과 C_l 은 피칭운동과 롤링운동의 감쇠(damping) 모멘트계수이다. q 와 $\dot{\alpha}$ 는 동체축에 대한 피치 회전율(pitch rate)과 받음각의 변화율, p 는 롤 회전율(roll rate)을 각각 의미한다.

일반적으로 발사체의 피치 동안정성은 피치 회전율과 받음각의 변화율에 대한 모멘트계수의 합으로 판별되기 때문에 본 연구에서는 두 계수의 합을 피치 동안정 미계수로 고려한다[2]. 피칭운동에 대한 미계수는 동체의 무게중심(center of gravity)에 대한 강제 조화진동(forced harmonic oscillation)을 가함으로써 결정할 수 있다. 이를 위해 다음과 같이 받음각의 변화를 준다.

$$\alpha^*(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(kt) \quad (12)$$

이때 α^* 는 피치회전율과 받음각 변화율을 모두 고려한 받음각이며, k 는 무차원화된 피치회전율(reduced frequency)이다. 만약 α_0 가 작다면 피치동안정 미계수는 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}} = \frac{\int C_m d\alpha^*}{\int \dot{\alpha}^* d\alpha^*} = \frac{1}{\pi \alpha_0} \int_0^T C_m \cos(kt) dt \quad (13)$$

롤 동안정 미계수는 동체축을 기준으로 일정한 회전을 가함으로써 쉽게 구할 수 있다.

$$C_{lp} = \frac{2U_\infty}{D} \frac{\partial C_l}{\partial p} = \frac{\partial C_l}{\partial p^*} \quad (14)$$

여기서 p^* 는 무차원화된 롤회전율이다.

4. 결과 및 토의

현재 방법의 효율성 및 정확도를 검증하기 위해 Basic Finner 형상에 대한 계산을 수행하였다. 이 형상은 많은 실험치[8]와 예측치[9]들을 가지고 있는 표준 형상으로 Fig. 1에 개요도가 나타나 있다. Fig. 2는 KGRID[10]를 사용하여 생성된 C-O type 격자계로써 주격자계(97×17×49), 좌우 편후방 격자계(23×3×23), base 격자계(25×17×9)로 이루어져 있다. MPI library를 이용하여 병렬처리하였고, 4개의 Pentium-II 400 MHz PC-cluster에서 계산을 수행하였다. 따라서, 계산에 사용된 총 격자점수는 351,200개이다.

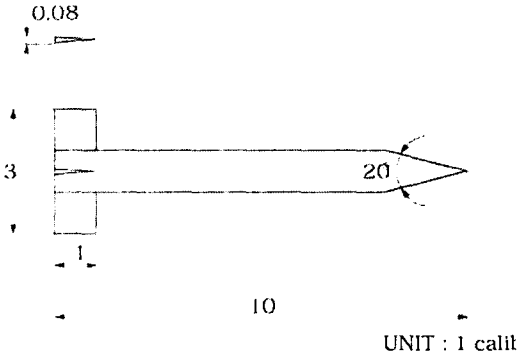


Fig. 1. The Basic Finner model.

비정상 유동장 계산을 위한 초기해는 평균받음 각에서 10^{-4} 까지 수렴된 정상해를 사용하였다. 정상해를 구하기 위해 2-level 다중격자 DADI 방법을 적용하였다. Fig. 3은 CFL수가 3일 때 각 마하수에 대한 정상해의 수렴과정도이다. 초음속 유동의 경우 150회 미만의 반복계산으로 수렴함을 알 수 있다. 비정상 계산의 경우 특별한 언급이 없을 때 무차원 시간은 0.5를 사용하였고, 각 시간간격에 대해 10^{-2} 까지 수렴시켰다.

Fig. 4는 받음각 0도, 마하수 0.8에서 무차원 회전율에 따른 모멘트 변화를 도시한 그림이다. 계산은 2 싸이클을 이룰 때까지 수행하였고, 도시한 hysteresis 루프는 2번째 싸이클이다. 대체로 회전율과 무관한 기울기를 가짐을 알 수 있다. 이는 무차원 회전율에 대한 피치모멘트 감쇠계수를 나타낸 Fig. 5에서도 확인할 수 있다. 감쇠계수가 회전율에 무관하게 나타남을 볼 수 있다. 이는 참고문헌[1,2]에서도 볼 수 있는 특성으로 낮은 회전율에 대해 선형이론[9]이 유효한 근거가 된다. Fig. 6은 마하수에 따른 피치모멘트 감쇠계수를 나타낸 그림이다. 계산은 base가 있을 경우와 없을 경우 각각에 대해 이루어졌고, 실험치[8] 및 예측치[9]와 비교하였다. 무게중심(CG)이 6.0 caliber에 있는 경우를 계산하였으며, 무차원 회전율 k 는 0.05로 주었다. Euler 방정식을 이용한 현재의 계산은 준실험식을 이용한 예측치와 대체로 일치하는 것을 알 수 있다. base가 없을 경우 마하수 1.0 근처에서 큰 값을 예측함을 볼 수 있는데, 이는 base에 의한 모멘트 감쇠효과가 없기 때문으로 판단된다.

Fig. 7은 마하수가 0.8일 때 일정한 무차원 롤

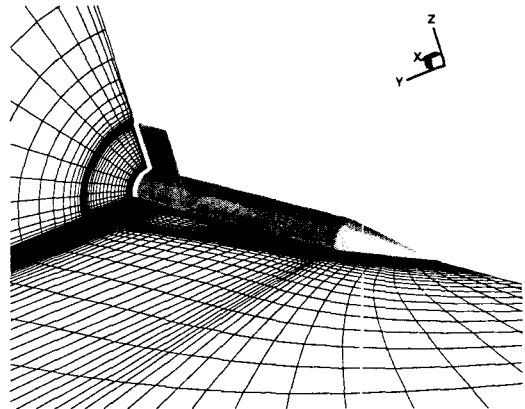


Fig. 2. The computational grid.

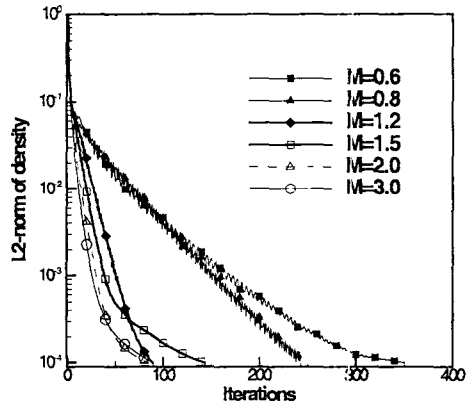


Fig. 3. Convergence histories of steady solutions for various Mach numbers.

회전율($p^*=0.03$)을 주었을 때 롤모멘트 감쇠계수의 수렴과정을 나타낸 그림이다. 동체가 약 25° 정도 회전했을 때 수렴한 것으로 볼 수 있고, 이때 총 CPU time은 약 40 분 정도 소요되었다. Fig. 8은 회전율에 따른 롤 감쇠모멘트의 선형성을 보여 준다. 마하수 0.8과 1.5 두 경우 모두 회전을 이 작다면 같은 감쇠계수 값을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 9는 마하수에 따른 롤도멘트 감쇠계수를 나타낸 그림이다. 계산에 의한 감쇠계수 값은 실험치에 비해 약간 높은 값을 예측하는데, Euler 계산의 경우 점성에 의한 전단응력이 무시되었기 때문으로 보인다. Base가 있는 경우와 없는 경우

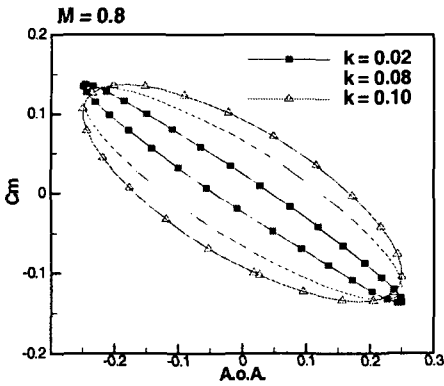


Fig. 4. Hysteresis loops of pitch-damping moments for various reduced frequency.

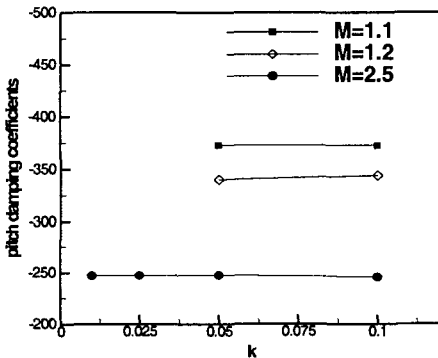


Fig. 5. Linearity of pitch-damping coefficients for the reduced frequencies.

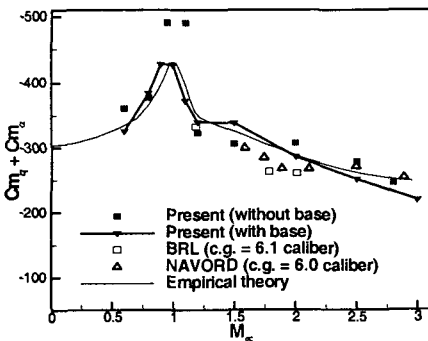


Fig. 6. Comparison of pitch-damping coefficients at various Mach numbers.

모두 거의 같은 값을 나타냄을 알 수 있는데, 이는 동체후방과 base가 만나는 부분에서 생기는 팽창파가 롤모멘트에는 거의 영향을 주지 않는다는 것을 말해 준다. 그림에서 보듯이 마하수 1.1 근처에서 롤 감쇠계수의 급격한 하락과 마하수 1.4까지 급격한 상승이 존재한다. 이는 실험치[8]에서 발견되는 비선형 현상으로 동체의 회전시핀 사이에서 발생하는 강한 충격파로 인한 현상으로 예측되어 왔다[9]. 계산에서는 마하수 1.1과 1.2 사이에 존재함을 볼 수 있다. 이러한 비선형 현상을 정성적으로 파악하기 위해 마하수 1.0, 1.1, 1.2에 대한 좌우핀 주위의 압력분포를 Fig. 10에 도시하였다. 핀 사이의 충격파 간섭효과가 없는 마하수 1.0과 달리 1.1에서 핀 사이에 수직 충격파가 상호 간섭을 하고 있다. 이때 양 쪽 핀 표면의 압력이 균일해 지고, 이것이 롤 감쇠계수의 급격한 하락으로 나타난다 이후 수직충격파는 경사충격파로 급격히 전환되면서 핀 표면 압력차이가 커지게 된다. 즉, 수직충격파가 경사충격파로 전환되면서 발생한 압력차이에 의해 롤 감쇠계수의 급격한 상승이 발생하는 것임을 볼 수 있다. 경사충격파에 의한 충격파간섭이 없어지는 마하수 1.4 이상에서는 롤 감쇠계수 C_{lp} 가 마하수에 반비례하는 규칙성을 가짐을 알 수 있다. 이러한 충격파 간섭에 의한 효과는 피치모멘트에 대한 Fig. 6에서도 미약하나마 볼 수 있고, 이에 대한 연구가 더 필요할 것으로 생각된다.

5. 결론

3차원 발사체에 대한 동안정 미계수 예측을 위해 병렬처리된 다중격자 DADI 방법과 이중시간 적분법을 사용한 비정상 Euler 해석을 수행하였다. 현재 방법의 예측 능력을 검증하기 위해 표준모델인 Basic Finner에 대한 피치모멘트 및 롤모멘트 감쇠계수를 계산하여 실험치 및 예측치와 비교하였다. 해석을 통해 낮은 회전율에서 동안정 계수들의 선형성을 확인하였고, 롤모멘트 감쇠계수의 급격한 비선형 현상을 정성적으로 해석하였다. 계산된 결과는 비정상 Euler 해석이 충분한 정확도로 동안정 계수의 예측에 사용될 수 있음을 보여 준다.

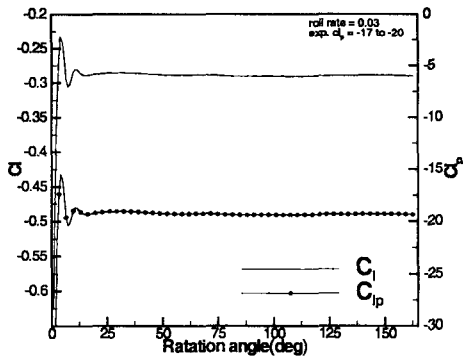


Fig. 7. Convergence history of the roll-damping coefficient.

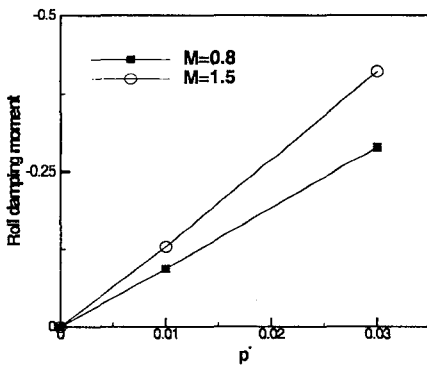


Fig. 8. Linearity of roll-damping moments for the reduced frequency.

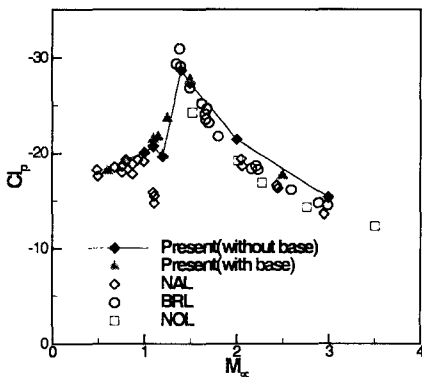


Fig. 9. Comparison of roll-damping coefficients at various Mach number.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 “천음속 유도탄의 동적 미계수 예측 방법 연구”(MADC-416-000 612)의 일환으로 수행되었음을 밝힙니다.

참고문헌

- [1] W.B. Sturek, C.J. Nietubicz, J. Sahu, and P. Weinacht, "Applications of Computational Fluid Dynamics to the Aerodynamics of Army Projectiles", *J. Space. Rockets*, Vol. 31, No. 2 pp. 186-199, 1994.
- [2] P. Weinacht, "Navier-Stokes Predictions of the Individual Components of the Pitch-Damping Sum", *J. Space. Rockets*, Vol. 35, No. 5, pp. 598-605, 1988.
- [3] S. Lee, M. Park, K.W. Cho, and J.H. Kwon, "New Fully Automated Procedure for the Prediction of Store Trajectory," *J. Aircraft*, Vol. 37, No. 6, pp. 1038-1049, 2000.
- [4] 박수형, 성춘호, 권장혁, "2차 upwind TVD 기법을 이용한 효율적인 다중 격자 DADI기법", *한국항공우주학회지* 26권 7호, pp.28-36, 1998.
- [5] C.H. Sung, S.H. Park, and J.H. Kwon, "Multigrid Diagonalized-ADI Method for Compressible Flows," *AIAA paper 2001*, 2001.
- [6] A. Jameson, "Time Dependent Calculations Using Multigrid with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings," *AIAA paper 91-1596*, 1991.
- [7] L. Dubuc, F. Cantariti, M. Woodgate, B. Gribben, K.J. Badcock, and B.E. Richard, "Solution of the Unsteady Euler Equations Using an Implicit Dual-Time Method", *AIAA J.*, Vol. 36, No. 8, pp. 1417-1424, 1998.
- [8] H.S. Murthy, "Subsonic and Transonic Roll Damping Measurements on Basic Finner," *AIAA paper 82-4042*, 1982.
- [9] F.G. Moore and R.C. Swanson, "Dynamic Derivatives for Missile Configurations to Mach Number Three", *J. Space. Rockets*, Vol. 15, No. 2, pp. 65-66, 1978.
- [10] Y. Kim, and J.H. Kwon, "KGRID : an Interactive 3D Grid Generator with GUI,"



*Proceedings of 4th Asian CFD Conference,
Mianyang, China, pp.676-681, 2000.*

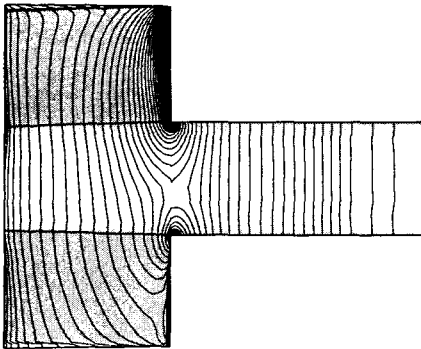


Fig. 10(a). Pressure distribution near fins :
M=1.0.

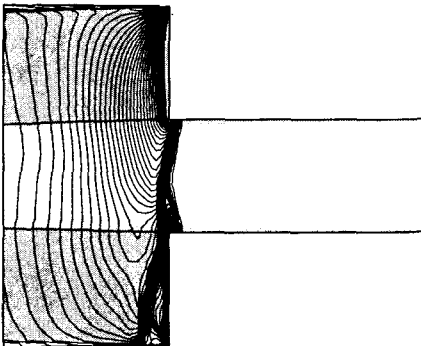


Fig. 10(b). Pressure distribution near fins :
M=1.1.

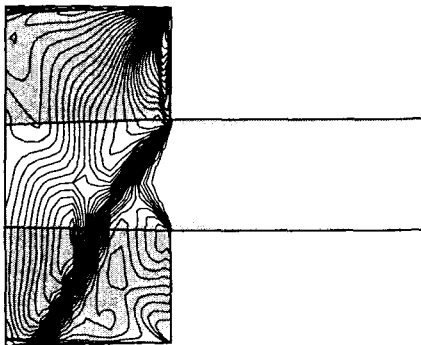


Fig. 10(c). Pressure distribution near fins :
M=1.2.