

몽뚝물체 주변에 형성된 극초음속유동에 대한 Navier-Stokes 계산

백 두 성*¹, 김 득 상*²

Navier-Stokes Computations for Hypersonic flow on Blunt Bodies

Doo S. Baik and Duk S. Kim

The thin-layer Navier-Stokes equations are solved for the hypersonic flow over blunt cone configurations with applications to laminar as well as turbulent flows. The equations are expressed in the forms of flux-vector splitting and explicit algorithm. The upwind schemes of Steger-Warming and van Leer are investigated in their ability to accurately predict the heating loads along the surface of the body. A comparison with the second order extensions of these schemes is made and a hybrid scheme incorporating a combination of central differencing and flux-vector-splitting is presented. This scheme is also investigated in its ability to accurately predict heat transfer distributions.

Key Words: 전산유체역학(CFD), 비정상유동(Unsteady Flow), 음해법(Implicit Method), flux-vector splitting

1. 서 론

Hypersonic 공기역학은 과거 50년 동안 연구되었다. 1950년과 1960년 사이에 상당한 관심사가 되었는데 이는 주로 대륙간 유도탄, 아폴로, 머큐리 인공위성의 개발에 박차를 기했던 때였다. 최근에 들어서 다시 관심을 기울이는 이유 중의 하나는 Aero-assisted Orbit Transfer Vehicle (AOTV) 와 National Aerospace Plane (NASP)와 그밖의 우주왕복선 개발에 기인한다. AOTV의 경우에 있어서 1초에 10km로 갈수 있는 추진력을 갖고 있으며, 이러한 경우 nose

(두부) 와 날개 선단에 엄청난 공기역학적 열이 발생한다. 이러한 열 비율은 nose 반경에 반비례^[1] 하기 때문에 형상은 반드시 몽뚝해야한다.

Navier-Stokes 방정식의 초창기의 해법은 비점성 derivatives에 대해 central differencing을 사용하였다. 1970 중반까지 풀이과정은 양해법이었고 수렴조건으로 CFL이 주어졌다. CFL은 계산과정 동안 해가 접근될 수 있도록 시간 간격을 결정한다. 이러한 시간 간격은 유동장에서 가장 작은 격자 간격으로 결정되어야 하기 때문에 Navier-Stokes 계산에 많은 제약 즉 수렴하기 위하여 엄청난 iterations을 필요로 한다. 특히 높은 Reynolds 수 유동에서는 해에

*¹ 정희원, 국민대학교 자동차전문대학원

*² 국민대학교 자동차전문대학원



접근하기가 어렵다. 1976년 Beam 과 Warming^[2]는 “approximate factorization” 혹은 Alternating Direction Implicit” 라 불리는 음해법을 발표했는데 이러한 방법은 이론적으로는 다소 시간 간격의 제약을 해결하였다. 그러나 실질적으로 linearization 과 factorization에 의하여 생성되는 오차는 시간 간격에 다소 제약을 준다.

1979년에 Steger and Warming^[3]은 “flux vector splitting” 기술을 도입하였고 이 기법으로 이러한 급한 기울기를 비교적 쉽게 계산하였다. “shock capturing” 절차는 일련의 충격파를 명확하게 풀 수 있도록 했다.

2. 수치해석방법

2.1 지배방정식

유체 운동의 지배 방정식은 질량, 관성, 에너지 보존에 의해 다음과 같이 무차원의 형태로 표현된다.

Continuity :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\alpha \rho v}{y} = 0 \quad (1)$$

Momentum-x :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \alpha \frac{\rho uv}{y} \\ & = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \alpha \frac{\tau_{xy}}{y} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu v}{y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Momentum-y :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho u^2) + \alpha \frac{\rho v^2}{y} \\ & = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\alpha}{y}(\tau_{yy} - \tau_{\theta\theta}) \\ & - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{\mu v}{y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Energy :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(p u + \rho e_t u) + \frac{\partial}{\partial y}(p v + \rho e_t v) + \\ & \frac{\alpha}{y}(p v + \rho e_t v) = \frac{\partial}{\partial x}(u \tau_{xx} + v \tau_{xy} - q_x) + \\ & \frac{\partial}{\partial y}(u \tau_{xy} + v \tau_{yy} - q_y) + \frac{\alpha}{y}(u \tau_{xy} + v \tau_{yy} - q_y - \\ & \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{v^2}{y}) - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu uv}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v^2}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 shear stress term은 다음과 같이 주어진다.

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{4}{3} \frac{v}{y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]$$

여기서 열전도 terms은 Fourier's의 열전도 법칙에 의거했고 무차원의 형태로 다음과 같이 표현된다,

$$q_x = \frac{\mu}{RePr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mu}{RePr} \frac{\partial e}{\partial x}$$

$$q_y = \frac{\mu}{RePr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{RePr} \frac{\partial e}{\partial y}$$

이러한 식들을 “compact vector”로 표현한다면

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \alpha H = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \alpha H_v \quad (5)$$

여기서 유동이 2차원일 경우 $\alpha=0$ 이고, 축대칭일 경우 $\alpha=1$ 로 주어진다.

이러한 방정식의 표현을 Navier-Stokes 방정식의 “flux-vector” 형식이라고 칭하며, 여기서 Q, E, F의 양은 flux 벡터로 쓰였다,

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (p + \rho e_t)u \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (p + \rho e_t)v \end{bmatrix}$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xxp} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xxp} + v\tau_{xy} - q_x \end{bmatrix}$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yyp} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yyp} - q_y \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (p + \rho e_t)v \end{bmatrix}$$

$$H_v = \frac{1}{y} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v}{y} \right) \\ \tau_{yyp} - \tau_{\theta\theta} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left[\frac{\mu v}{y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v}{y} \right) \right] \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yyp} - q_y - \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{v^2}{y} \\ - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu uv}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v^2}{y} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (6)$$

록 한다. 여기서는 실제좌표 x-y 영역에서 실제 계산에 쓰이는 $\xi-\eta$ 좌표로 전환했다. 계산 영역은 직사각형이고 격자간격은 일정하게 분포 되었다.

ξ 와 η 가 시간과는 무관하다고 가정하면 지배방정식에 대한 vector 형식은 (t, x, y) 영역에서 (τ, ξ, η)영역으로 다음 관계에 의하여 다음과 같이 전환된다.

여기서 ξ 와 η 가 시간과는 무관하다고 가정한다면 다음과 같이 표현된다.

$$\tau = t$$

$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

따라서, 총 derivatives사이의 관계에서 다음의 중요한 관계가 성립된다.

$$\xi_x = J y_\eta$$

$$\xi_y = -J x_\eta$$

$$\eta_x = -J y_\xi$$

$$\eta_y = J x_\xi$$

여기서,

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$$

지금까지의 수식을 지배방정식에 적용하고, 대수학적으로 정리하면 다음의 간결한 방정식이 유도된다.

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + a\bar{H} = \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \eta} + a\bar{H}_v \quad (7)$$

여기서, "bar" 의 의미는 다음과 같이 정의된다.

2.2 계산 영역으로 전환

계산하고자 하는 기하학적인 형태는 그림 1에서 나타난다. 이러한 불규칙한 실제 영역을 계산 영역으로 전환함으로써 균일한 영역에서 이산화방법을 적용하는 일련의 과정을 용이하도록

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{Q}{J} \\ \bar{E} &= \frac{1}{J} [\xi_x E + \xi_y F] \\ \bar{F} &= \frac{1}{J} [\eta_x E + \eta_y F] \\ \bar{H} &= \frac{H}{J} \\ \bar{E}_v &= \frac{1}{J} [\xi_x E_v + \xi_y F_v] \\ \bar{F}_v &= \frac{1}{J} [\eta_x E_v + \eta_y F_v] \\ \bar{H}_v &= \frac{H_v}{J} \end{aligned}$$

$$\bar{F}_{vt} = \frac{\mu}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 u_\eta + b_3 v_\eta \\ b_3 u_\eta + b_2 v_\eta \\ \frac{1}{2} b_1 (u^2)_\eta + \frac{1}{2} (v^2)_\eta + b_3 (uv)_\eta \\ + \frac{1}{p_r(\gamma-1)M_\infty^2 b_4 T_\eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, E_v 와 F_v 에 포함된 점성 shear stress 는 계산 영역으로 전환하기 위하여 필요하다.

$$\tau_{x\eta} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{4}{3} (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) - \frac{2}{3} (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) \right]$$

$$\tau_{y\eta} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{4}{3} (\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) - \frac{2}{3} (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\mu}{Re} \left[-\frac{2}{3} (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) + \frac{4}{3} \frac{v}{y} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re} [(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta)] = \tau_{yx}$$

그리고 열전도 term은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\mu}{RePr(\gamma-1)M_\infty^2} (\xi_x T_\xi + \eta_x T_\eta) \\ &= \frac{\mu}{RePr} (\xi_x e_\xi + \eta_x e_\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_y &= \frac{\mu}{RePr(\gamma-1)M_\infty^2} (\xi_y T_\xi + \eta_y T_\eta) \\ &= \frac{\mu}{RePr} (\xi_y e_\xi + \eta_y e_\eta) \end{aligned}$$

2.3 Thin-Layer Navier Stokes 방정식

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \alpha \bar{H} = \frac{\partial \bar{F}_{vt}}{\partial \eta} + \alpha \bar{H}_v \quad (8)$$

여기서, vector \bar{F}_{vt} 는 다음과 같이 표현된다.

여기서 상수는 다음과 같이 정의 된다.

$$b_1 = \frac{4}{3} \eta_x^2 + \eta_y^2$$

$$b_2 = \eta_x^2 + \frac{4}{3} \eta_y^2$$

$$b_3 = \frac{1}{3} \eta_x \eta_y$$

$$b_4 = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

2.4 경계조건

제시한 문제에 따라 4부분의 경계조건이 설정되어야 하며, 이러한 조건들로서 (i) stagnation line (ii) free stream boundary (iii) outflow boundary (iv) surface of the body 로 구분된다.

(i) Stagnation Line 경계조건

정체선을 따라 경계를 설정하기 위하여 정체선을 사용하는 것을 피했다. i=1 에서의 경계는 i=2에서의 밀러 이미지로서 정의되며, 2개선은 정체선 주위에서 대칭이다. i=1 선 상에서 해당하는 properties는

$$\begin{aligned} \rho_{1,j} &= \rho_{2,j} \\ u_{1,j} &= u_{2,j} \\ v_{1,j} &= -v_{2,j} \\ e_{t1,j} &= e_{t2,j} \end{aligned}$$

여기서 j=2, jmax-1

(ii) Free Stream 경계조건

자유유동의 조건은 변화하지 않는다. 따라서 모든 i에 대하여 j=jmax에서 properties는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \rho_{i,j \max} &= \rho_\infty \\ u_{i,j \max} &= u_\infty \\ v_{i,j \max} &= v_\infty \\ e_{ti,j \max} &= e_{t\infty} \end{aligned}$$

(iii) Outflow 경계조건:

외부유동의 경계조건으로서 초음속인 유동에 외부 경계조건을 설정한다. 유동은 원추의 구 부분위에서 가속화하기 시작한다. 경계값은 extrapolation을 이용하여 내부로부터 다음과 같이 extrapolate 한다.

$$\begin{aligned} \rho_{i \max, j} &= \rho_{i \max - 1, j} \\ u_{i \max, j} &= u_{i \max - 1, j} \\ v_{i \max, j} &= v_{i \max - 1, j} \\ e_{ti \max, j} &= e_{ti \max - 1, j} \end{aligned}$$

j=2에서 jmax-1 까지 주어진다.

(iv) 벽에서의 경계조건

(a) Adiabatic Wall

만일 벽이 단열되었다면, 열전도가 형성되지 않고 열의 기울기는 벽에서는 0 이다. 이는 $T_{i,1} = T_{i,2}$ 를 의미한다. $P_{i,1} = P_{i,2}$ 이기 때문에 벽에서의 밀도는 완전 기체 상태방정식에서 벽내부에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

(b) Isothermal Wall

Isothermal wall에서 온도는 i 선상에서 주어진다. 여기 $p_{i,1} = p_{i,2}$ 이기 때문에 밀도가 계산된다. 온도로 표현한다면, 내부에너지는 다음과 같다.

$$e = \frac{T_w}{\gamma(\gamma - 1) M_\infty^2}$$

여기서 T_w 는 무차원된 벽면 온도이다.

2.5 난류모델

난류의 효과는 eddy 점성계수(μ_t)로 모사될 수 있다. Navier-Stokes 방정식의 레이놀드 평균은 난류가 유체의 점성도를 증진하는 효과를 가지며 따라서 점성의 효과는 laminar와 난류의 점성도 합으로 나타난다. 그래서 Navier-Stokes의 분석에서 난류는 laminar stress term에서의 분자의 점성도를 ($\mu + \mu_t$) 로 대치한다. Baldwin 과 Lomax model은 two-layer의 모델이다.

2.6 Flux 벡터 Splitting 기법

중앙차분과 가점성(artificial viscosity)를 피하

고 wave의 전파와 characteristics의 이론에 입각한 방법을 Flux 벡터 Splitting 기법이라고 하며, 각 점에서의 flux는 2가지의 component 즉 (+)와 (-)로 나누어진다.

Steger-Warming는 비점성 Jacobian 매트릭스 $A = \frac{\partial \bar{E}}{\partial Q}$ and $B = \frac{\partial \bar{E}}{\partial Q}$ 의 eigenvalue의 부호에 근거해서 Flux 벡터를 나누었다. 실수의 eigen 값과 eigen 벡터는 대각선(Diagonalized) 매트릭스가 될 수 있어서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$A = X D X^{-1}$$

여기서 D는 대각선 매트릭스인데 이들의 요소는 매트릭스 A의 eigen 값이고 X는 eigen 벡터 매트릭스이다. 이러한 flux 벡터는 one degree of homogeneous 이기 때문에 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\bar{E} = A \bar{Q}$$

Steger-Warming의 과정을 취해보면 다음과 같다.

$$A = A^+ + A^-$$

여기서,

$$A^+ = X_A D_A^+ X_A^{-1}$$

$$A^- = X_A D_A^- X_A^{-1}$$

그리고 D_A^+ 와 D_A^- 는 단지 부호가 양수과 음수인 매트릭스 A의 양수와 음수의 eigen 값을 포함한다.

$$\bar{E} = \bar{E}^+ + \bar{E}^-$$

여기서

$$\bar{E}^+ = A^+ \bar{Q} \quad ; \quad \bar{E}^- = A^- \bar{Q}$$

비슷한 과정이 Flux 벡터와 Jacobian B에게도 적용된다.

2.7 Hybrid 기법

Hybrid 기법은 중앙차분과 연관된 안정성과 upstream 차분에서 파생하는 부정확성을 피하는데 주안점을 두고 있으며 유동의 streamwise 방향 (ξ) 으로 convective derivative에 steger-warming flux vector splitting 방법을

수직방향 (η)으로는 중앙차분법을 적용하였다.

3. 계산 및 고찰

3.1 고정시간 간격

안정된 1차원에서의 양해법 알고리즘에 대해서는 $CFL < 1$ 이 요구되므로 각각의 iteration에서 고정된 시간간격을 갖기위하여 시간 간격은 격자에서 최소한 간격의 시점에서 CFL 조건 즉

$$CFL = U_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ 을 적용함으로써 얻어진다.}$$

3.2 계산결과

현재의 이러한 연구의 결과가 실험적인 데이터와 근사적인 방법으로 얻은 값과 비교 되었다.

모델은 15도 Blunt cone이고 Nose 반경은 0.0279 m 이고, 외부 자유 유동의 조건은 Laminar 경우로서 $M_{\infty} = 10.6$ 이고 대기온도와 압력은 각각 52.3 °K 와 127.92 N/m² 이고, 표면온도는 47.3 K 로 주어졌다. 그림 1 는 형성된 격자를 보여준다. 그림 2, 3 및 4는 압력, 온도 및 Mach 수에 대한 contour를 나타내고 있다. 이와 같은 결과는 물리적 현상을 잘 반영하고 있는 것으로 판단된다.

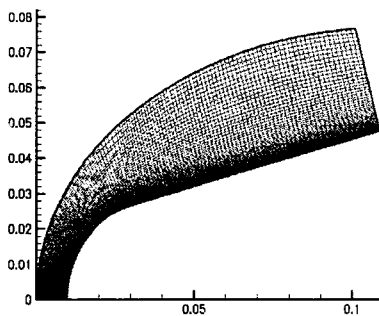


Fig. 1 Grid (250×80 , $\beta=1.004$)

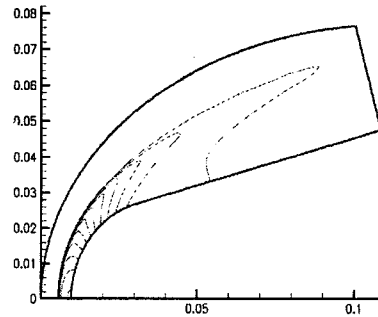


Fig. 2 Pressure contour

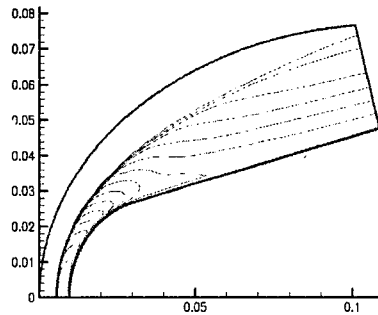


Fig. 3 Temperature Contour

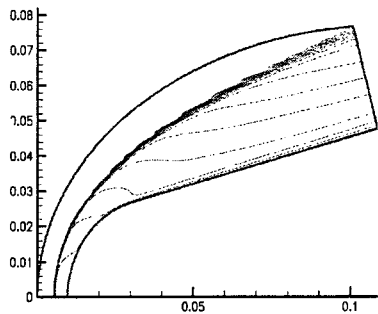


Fig.4 Mach Contour

4. 결론

1차보다 2차 order를 Steger-Warming and Van Leer flux 벡터 분리 기술은 상당히 예측을 증진시켰다. convective term을 차분하기 위하여 hybrid 방법이 제시되었다. 이러한 방법은 streamwise 방향으로 flux 벡터 분리를 하고



normal 방향으로의 중앙 차분법을 적용하였다. 이러한 hybrid 방법은 upwind 방법의 second order 형태보다 덜 소산(dissipative) 이 되어서 격자의 간격이 비교적 크더라도 정확한 해에 접근할 수 있다.

여기서 검토된 알고리즘은 격자에 관계되며, 격자의 해상도는 직접적으로 정확한 해에 미친다. 정확하지 못한 격자의 간격은 heating rate 을 부정확하게 예측을 준다. 정확도는 알고리즘의 소산적인 성질에 달려 있다.

요구되는 resolution은 자유유동의 마하수와 레이놀드수에 달려있다. 매개변수의 연구는 이러한 차원에서 다각적으로 이루어졌다. 여기서 발전된 hybrid 방법은 다른 유동해석 또는 다른 형태에도 적용이 가능하리라 생각된다. 지나치게 작은 격자 간격은 오히려 중앙 차분법에서 볼수 있듯이 불안정하게한다. 가점성 (artificial viscosity)는 이러한 불안정성을 제거해주었다.

참고문헌

- [1] Fay, J. A. and Riddell, F. R., 1958, "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 2, Feb. 1958, pp 73.
- [2] Beaming, R. M. and Warming, R. F., 1976, "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law form", J. of Computational Physics, Vol. 22, pp. 81-110.
- [3] Steger J. L. and Warming, R. F., 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite difference Method", J. of Comp. Physics, Vol. 40, pp. 263-293.
- [4] Clery, J. W., "Effect of Angle of Attack and Bluntness on Laminar Heating-Rate Distributions of a 15 ° cone at a Mach Number of 10.6", NASA TN D-5450, Ames Research Center, Moffett Field, California, Oct. 1969.