



원주 후류에서의 2차적 불안정성

Secondary Instability in the Wake of a Circular Cylinder

강신정*, 타나하시 마모루**, 미야우치 토시오**, 이영호***

S. J. KNAG, M. TANAHASHI, T. MIYAUCHI and Y. H. LEE

Abstract

Secondary instability of flow past a circular cylinder is examined using direct numerical simulation at Reynolds number 220 and 250. The higher-order finite difference scheme is employed for the spatial distributions along with the second order Adams-Bashforth and the first order backward-Euler time integration. In x-y plane, the convection term is applied by the 5th order upwind scheme, and the pressure and viscosity terms are applied by the 4th order central difference. In spanwise, Navier-Stokes equation is distributed using Spectral Method. The critical Reynolds number for this instability is found to be about $Re=190$. The secondary instability leads to three-dimensionality with a spanwise wavelength about 4 cylinder diameters at onset (A-mode). Results of three-dimensional effect in wake of a circular cylinder are represented with spanwise and streamwise vorticity contours as Reynolds numbers.

Key Words: Circular Cylinder(원주), Direct Numerical Simulation(DNS: 직접수치계산), Finite Different Method (유한차분법), Karman Vortex(카르만 와), A-mode

1. 서론

원주를 지나는 흐름에 의하여 생성된 카르만 와열은 저 레이놀즈 수와 이상적인 상태 하에서 완전히 시간에 주기적이며 2차원적 흐름이라 할 수 있다. 이 주기적 상태는 1차적 후류의 불안정성에서 정상 흐름으로부터 발달하며^{(1),(2)}, 임계 레이놀즈 수는 약 50이다. 이와 같은 1차적 불안정성에 이어서 발생하게 되는 원주 후류의 불안정성들은 단지 최근에 주목하게 되었으며 그 발생기구에 대한 이해는 아직 불완전하다. 이 유동을 특징짓는 가장 중요한 무차원 수는 strouhal 수이다. 그러나, 유동장 자체가 실험조건에 대하여 민감하기 때문에 항력계수, 양력계수 그리고 St 수가 동일한 레이놀즈 수에 관한 다른 실험 사이에서 크게 변화하는 것도 보고되어 있다. 2차적 불안정성의 임계 레이놀즈 수는 약 180과 190사이에서 발생한다고 알려져 있다. Fig.1에서 나타낸 것과 같이 St수와 Re수의 관계가 2개 부

분에 걸쳐서 불연속을 가지는 것을 알 수 있다. 이것은 원주 후류의 3차원 천이의 메카니즘과 밀접한 관계가 있으며, 후류가 지배적인 스펙트럼과 광장을 가지는 것이 과거의 연구에 의하여 보고되어 있고 그 길이는 A-mode 영역에 있어서는 원주 직경의 약 4배, B-mode 영역에 있어서는 원주 직경의 약 1배로 보고되어져 있다.

Karniadakis 등⁽³⁾과 Tomboulides 등⁽⁴⁾은 Re수 200에서 2차원적 후류가 3차원적 교란으로 불안정하다는 사실을 밝히기 위하여 가장 먼저 3차원 원주 후류에 대하여 수치적 연구를 행하였다. Barkley & Henderson⁽⁵⁾은 Re수가 140에서 300의 천이점에 대하여 원주 후류의 Floquet 안정성 계산을 통하여 유한한 길이방향의 실린더에 대한 안정 계산에 대한 연구를 하였다. 한편, 본 연구에서는 직접수치계산(Direct Numerical Simulation :DNS)을 이용하여 스펙트럼 방향에 따른 유동특성과 광장의 상세한 해명을 통하여, 2차적 불안정 영역(A-mode)의 메카니즘을 밝히는 것을 목적으로 한다.

1) * 한국해양대 대학원

2) **Tokyo Institute of Technology Mechano-Aerospace Engineering

3) *** 한국해양대 기계·정보공학부

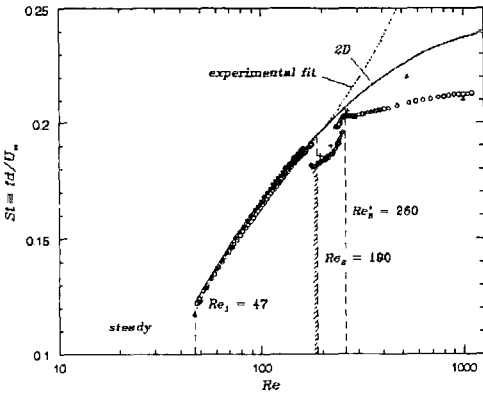


Fig. 1 Variation of shedding frequency with Reynolds number from experiments and simulations : (filled circles) Hammache&Gharib (1991); (open circles), Williamson (1989); (open triangle) three-dimensional simulation from Mittal & Balachandar(1995); +, three-dimensional simulations from Henderson (1997); the solid line is a curve fit to two-dimensional simulation data up to Re = 1000 from Barkley & Henderson (1996).

2. 수치해석

2.1 지배방정식

본 연구에서는 3차원 원주주위의 유동장을 대상으로하여 직접수치계산을 행하였다. 유동은 비압축성류로 가정하고, 기초방정식은 비정상 3차원 Navier-Stokes 방정식 및 연속의 식이다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

여기서, u_i, p, Re 는 각각 속도, 압력, Reynolds 수이고, 각 변수는 원주의 반경 R과 주류 속도 U_∞ 를 이용하여 무차원화 하였다. 본 연구에서는 격자를 원주주위에 효율적으로 배치하기 위

하여 x-y면에 대하여 곡선좌표계를 이용하고 있으므로 식(2.1), (2.2)은 식(2.3), (2.4)에 의하여 일반곡선좌표에 관한 식으로 변환하여 적용하였다.

$$\xi = \xi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.3)$$

$$\eta = \eta[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.4)$$

2.2 수치방법

이산화를 위한 계산격자는 등간폭의 Regular 격자계를 사용하였다. 유동방향과 수직방향에 대한 이산화는 대류항에 5차정도 풍상차분을, 대류항 이외의 항에 4차정도 중심차분을 이용하였다. 또한, 스펀 방향의 이산화는 주기 경계조건을 채택하여 Fourier 급수전개 한 후 스펙트럴법을 이용하여 계산을 행하였다. 유동방향 및 수직방향에 있어서 고차정도의 차분법을 적용할 수 없는 경계부분에 대하여는 4차정도의 편차차분법을 적용하였다. 기초방정식을 시간 발전시키는 기법으로서 본 연구에서는 FSM (Fractional Step Method)에 의한 2 step 시간분할법을 이용하였다. 대류항 및 점성항에 대하여는 다음과 같은 2차정도를 갖는 Adams-Bashforth법을 이용하였다.

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3S^n - S^{n-1}) \quad (2.5)$$

여기서, S는 식 (2.6)과 같다.

$$S^n = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 u^n \quad (2.6)$$

그리고, 압력항에 관하여 다음과 같은 1차정도를 갖는 Backward-Euler법을 이용하였다.

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (2.7)$$

식 (2.7)의 양변에 발산(divergence)을 취하고 연속의 방정식을 적용하면 다음과 같은 압력 Poisson 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla u^*}{\Delta t} \quad (2.8)$$

이와 같은 Poisson 방정식은 행렬로 표현되며, 본 연구에서는 전처리에 따른 불완전 LU분해를 이용한 Bi-CGSTAB^{(13),(14)}법에 의하여 해석하였다.

2.3 경계조건

경계조건은 원주의 전방과 상·하부는 균일유입, free-slip 조건을 각각 부여하고, 원주의 표면은 no-slip 조건을 부여하였다. 또한, 스펠방향에 대하여는 주기경계조건을 부여하였으며, 하부는 충분히 물리적 상태와 같게 하기 위하여 Miyachi 등⁽¹⁰⁾에 의하여 제안된 압력의 근사적인 수송방정식을 사용하였다.

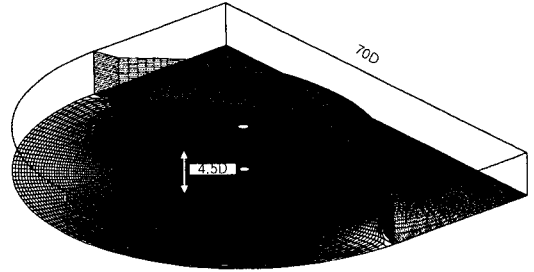
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_c \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_c \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2Re} \omega^2 \quad (2.10)$$

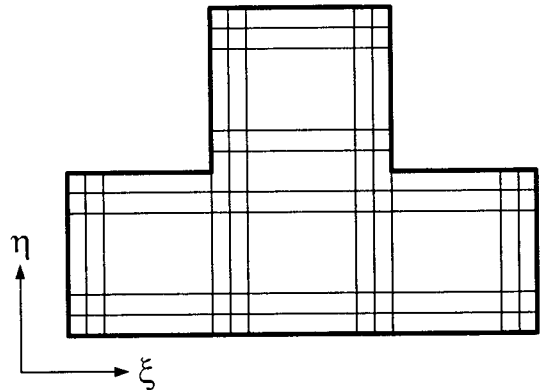
여기서 U_c 는 속도 및 압력장의 대류수송속도를 나타내고 있다.

2.4 격자생성

격자는 해가 크게 변화하는 영역에서는 집중시키고, 해의 변화가 적은 영역에서는 성기게 배치하기 위하여 본 연구에서는 타원형 편미분 방정식에 따른 수치적인 격자생성법을 이용하였다. Fig.2(a)는 타원형 편미분 방정식을 이용하여 생성된 물리 공간의 격자를 나타내며, Fig.2(b)는 계산공간의 격자를 나타내고 있다. 계산에 사용된 격자는 $278 \times 280 \times 64$ 와 $278 \times 280 \times 128$ 로서 총 4,981,760와 9,963,520개이며, 최소격자의 크기는 $4\pi/280$ 로 하였다. 계산기는 슈퍼컴퓨터 SR2201이고 64개와 128개의 CPU를 이용하여 병렬 연산하였으며, 계산시간은 무차원 시간 100까지 각 case당 30일에서 40일 정도 소요되었다.



(a) Physics Space



(b) Calculation Space

Fig. 2 Grid Generation

3. 결과 및 고찰

3차원 계산의 초기 유동장은 충분히 발달한 2차원 원주주위의 유동을 이용하였으며, 레이놀즈 수는 2차적 불안정 영역(A-mode)에 해당하는 220과 250으로 하여 계산을 행하였다.

3.1 A-mode의 유동구조

Fig. 3(a), (b)는 레이놀즈 수가 220과 250인 경우의 스펠방향을 사등분한 단면에 관한 스펠방향의 와도 등고선을 나타내고 있다. 이 그림으로부터 카르만 와열이 원주후방에 형성되어 있는 것을 알 수 있고, 스펠방향의 각 x-y단면에 관한 스펠방향 와도의 차이가 거의 관찰되지 않으며, 이 레이놀즈 수에 관한 카르만 와열은 3차원성의 영향을 거의 받지 않는 것을 알 수 있다.

Fig.4 (a), (b)는 fig.3과 동일한 단면에 관한 유동방향의 와도의 등고선을 나타내고 있다. 스펠방향의 와도성분에 3차원성이 크게 나타나지

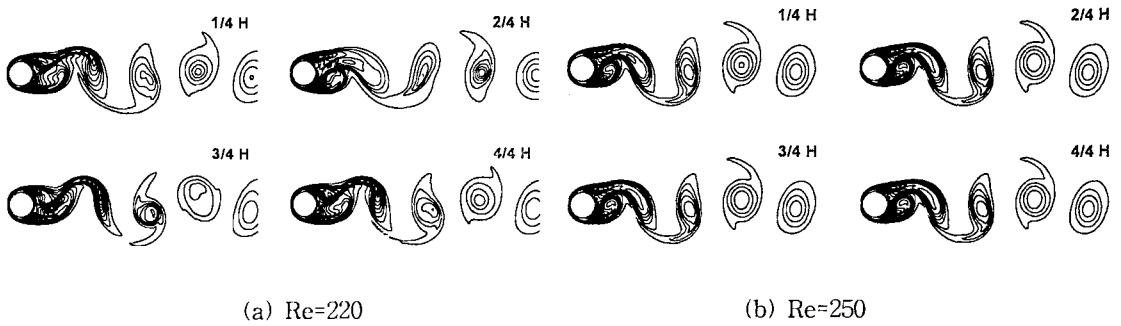


Fig.3 Spanwise Vorticity Contours

(Contours are evenly spaced over the range $-5 < \zeta_z < 5$; Spanwise vorticity-Karman vortex street)

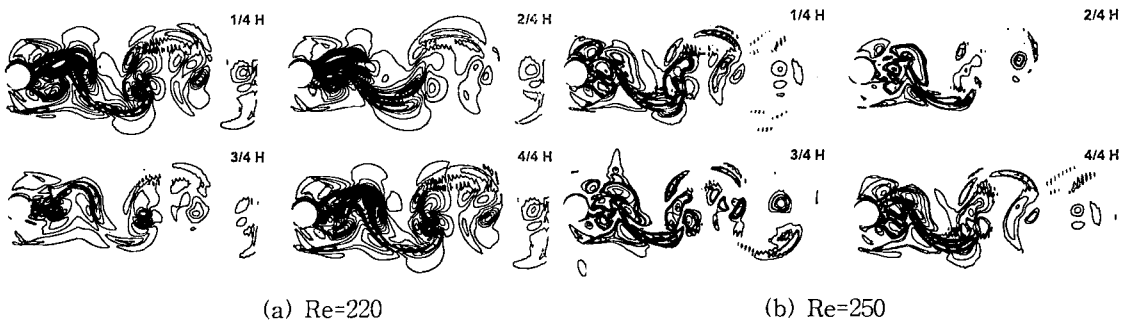


Fig.4 Streamwise Vorticity Contours

(Contours are evenly spaced over the range $-0.3 < \zeta_x < 0.3$; streamwise vorticity)



Fig. 5 Vorticity Contours in Re=250

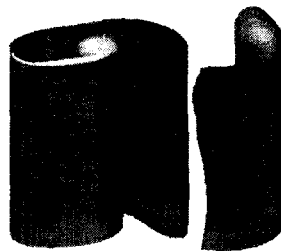
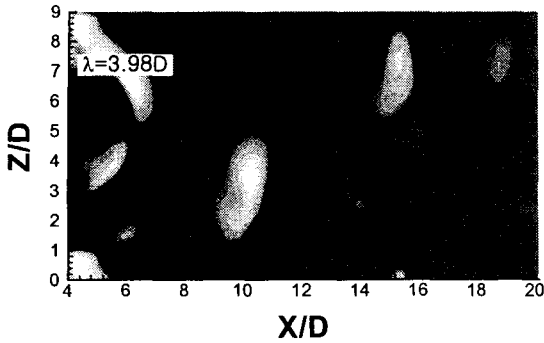


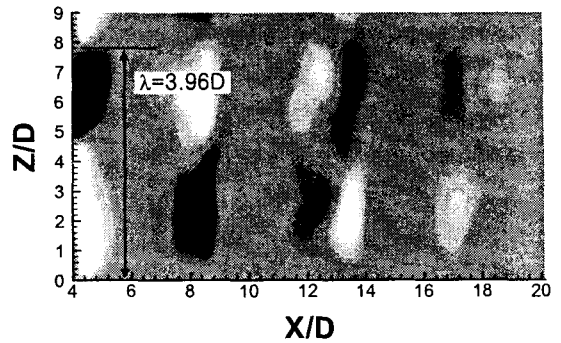
Fig. 6 Iso-contours of Spanwise Vorticity in Re 250. Iso-contours at Value $-5.0 < \zeta_z < 5.0$



Fig. 7 Modification of the Streamwise Vortex Structures (Re=220) Iso-contours at Value $-0.3 < \zeta_x < 0.3$

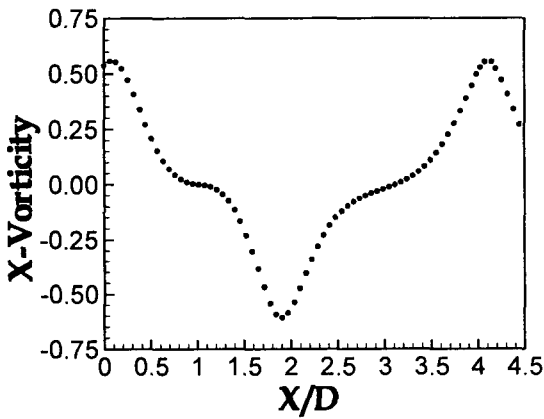


(a) Re=220

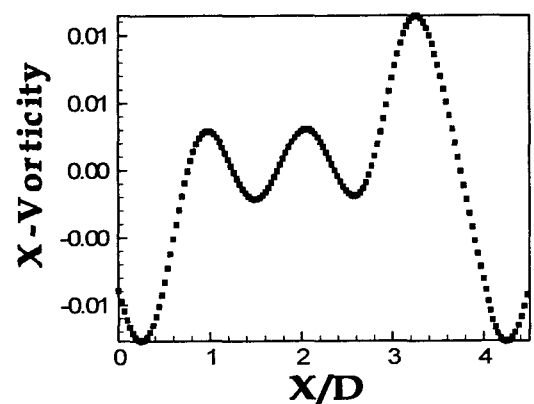
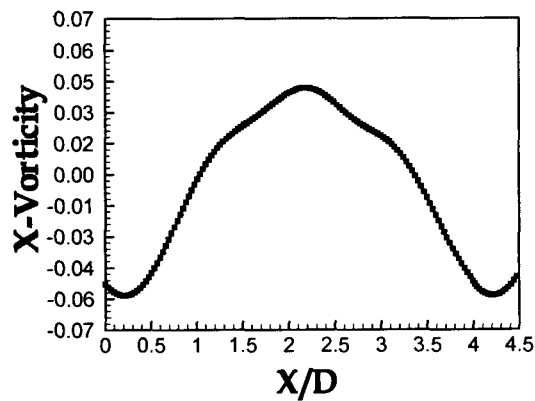
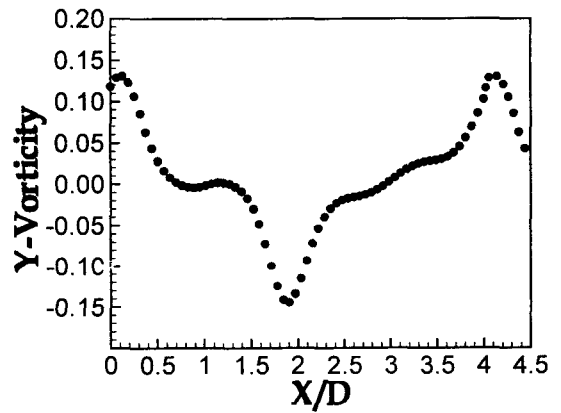


(b) Re=250

Fig.8 Streamwise Vorticity Field, $\xi_x, y/D=0.0, x/D=2 \sim 10$



(a) Re=220 (position : X=1.012D, y=0.74D, z=0~4.5D) ; D(Diameter)=2)



(b) Re=250 (position : X=5.10D, y=-1.33D, z=0~4.5D ; D(diameter)=2)

Fig.9 Spanwise Vorticity Value

않는 것에 비하여, 유동방향의 와도성분에는 각 x - y 단면에 있어서 상당한 차이를 보임을 알 수 있다. 특히, 카르만 와간의 블레이드 영역에서는 유동방향에 따라서 늘어지는 영역이 크게 존재하고 있다. 이와 같은 유동방향 와도의 구조는 원주후방의 카르만 와간에서만 나타나지 않고, 원주 근방의 박리 전단층 부근에서도 관찰되며, 레이놀즈 수가 220과 250인 때 구조적인 차이는 크게 나타나지 않음을 알 수 있다. Fig. 5는 레이놀즈 수가 250인 경우에 대하여 유동방향 와도의 등고선(filled color)과 스펠방향 와도의 등고선(solid line)을 나타내고 있다. 이 그림으로부터 카르만 와간의 블레이드 영역에서 잡아 끌어당기는 유동방향 와도의 영역이 크게 존재함을 분명히 관찰 할 수 있다. Fig. 6은 레이놀즈 수가 250인 경우의 카르만 와열의 등고면을 나타내고 있다. 여기서 흰색부분에 가까운 쪽은 정(+), 검은색 부분에 가까운 쪽은 부(-)를 의미한다. Fig. 3에서 살펴본 바와 같이 스펠방향의 와도에 관한 3차원성은 상당히 약하여 스펠방향에 거의 동일한 형태의 카르만 와가 방출되고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7은 레이놀즈 수가 220인 경우의 유동방향 와도 등고면을 나타내고 있다. 카르만 와간의 블레이드 영역에는 유동방향에 회전축을 갖는 역회전의 와대가 형성되어 있는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 구조를 갖는 레이놀즈 수의 범위를 A-mode라고 부르며, 이때의 간격은 원주 직경의 약 4.0배를 갖는다.

3.2 스펠방향 파장

레이놀즈 수가 약 180과 190 사이에서 3차원으로 이동하는 2차적 불안정성이 발생한다고 과거의 연구에 의하여 밝혀져 있지만, 그들의 스펠방향 파장에 관하여는 확실하지 못한 점이 남아 있다. 레이놀즈 수가 150에서 260사이에서는 비교적 스펠방향의 파장이 긴 불안정 모드가 유동장을 지배한다고 알려져 있고 이 모드를 일반적으로 A-mode라 불려진다. 또한, 레이놀즈 수가 260이상부터는 스펠방향의 파장이 원주직경의 약 1배로 A-mode에 비해 짧은 다른 3차원 모드가 유동을 지배하는데, 이 모드를 B-mode라고 부른다.

Fig.8 (a)와 (b)는 레이놀즈 수가 각각 220과

250인 경우에 대한 카르만 와간의 블레이드 영역을 포함하는 유동방향 와도의 분포를 나타내고 있으며, 밝은 색에 가까운쪽이 정(+)이며 반대로 어두운 색에 가까우면 부(-)를 의미한다. 스펠방향의 계산영역은 4.5D로 하였다. 이 그림을 통하여 스펠방향으로 발생하는 (+)와 (-)의 띄를 이루는 종와의 파장 길이가 원주 직경의 약 4배이다는 것을 알 수 있다.

Fig. 9 (a), (b)는 레이놀즈 수가 220과 250인 경우, 임의의 x , y 검사점에 대한 유동방향 와도와 유동방향에 수직인 와도의 값을 스펠방향의 위치에 따라 취한 값을 나타낸 그래프이다. 임의의 검사점 위치는 레이놀즈 수가 220인 경우는 $(x,y)=(1.012D, 0.74D)$ 이고 250인 경우는 $(x,y)=(5.10D, -1.33D)$ 로서 카르만 와열의 블레이드 영역의 한점이다. 이 그래프를 통하여 유동방향과 유동방향에 직각의 와도 값이 모두 파장을 가짐을 알 수 있고, 그 파장의 길이가 Re수 220과 250에서 약 4.0D임을 알 수가 있다.

4. 결론

원주후류의 2차적 불안정 영역을 DNS에 의하여 수치계산을 수행하였다. x - y 평면에는 4차정도 중심차분과 5차정도 풍상차분의 고차정도 차분법을, z -방향에는 스펠트럴법을 이용하여 계산하였다. 본 연구에서는 와도 등고선과 등고면 등의 분석을 통하여 다음과 같은 결과들을 얻을 수 있었다.

- 1). Re수가 220과 250에 대하여 원주주위 유동은 3차원성을 가지며, A-mode의 3차원 유동 특성을 갖는다.
- 2). A-mode의 3차원 유동에서는 블레이드 영역에 종와가 형성되며, 그 파장의 길이는 레이놀즈 수가 220과 250에서 각각 원주직경의 약 3.38배와 3.96배를 갖는다.
- 3). A-mode는 박리전단층에서 원주후류로 밀려가면서 정(+), 부(-)의 유동방향와도를 갖는 와층이 형성된다. 또한, 이것들은 박리 전단층의 외측에 역방향의 유동방향 와도를 갖는 와층을 동반한다.
- 4). 스펠방향의 위치에 따른 블레이드 영역의 임의의 검사점으로부터 종와의 파장 길이가 레이놀즈 수 220과 250에서 약 4.0D임을 알 수 있었다.



참 고 문 헌

- [1] C. P. Jackson, "A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies", *J. Fluid Mech.* Vol. 182, 1987, pp.23.
- [2] C. Mathis, M. Provansal, and L. Boyer, "Benard-von karman instability: Transient and forced regimes", *J. Fluid Mech.*, Vol. 182, 1987, pp. 1.
- [3] G.E. Karniadakis & G.S. Triantafyllou, "Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects". *J. Fluid Mech.* Vol.238, 1992, pp.1-30.
- [4] A. G. Tomboulides, G. S. Triantafyllou & G. E. Karniadakis, "A new mechanism of period doubling in free shear flows.", *Phys. Fluids A* 4, 1992, pp.1329-1332.
- [5] Dwight Barkley & R. D. Henderson, "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder.", *J. Fluid Mech.* Vol. 322, 1996, pp.215-241.
- [6] C.H.K. Williamson, "The existence of two stages in the transition to three dimensionality of a cylinder wake.", *Phys. Fluids* 31, 1988 pp.3165-3168.
- [7] C.H.K. Williamson, "Mode A" secondary instability in wake transition.", *Phys. Fluids* 8, 1996, pp.1680-1682.
- [8] C.H.K. Williamson, "Vortex dynamics in the cylinder wake.", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 28, 1996, pp.477-539.
- [9] H.-Q. Zhang, U. Fey, B. R. Noack, M. Konig, & H. Eckelmann, "On the transition of the cylinder wake.", *Phys. Fluids* 7, 1995, pp. 779-794.
- [10] 宮内 敏雄, 店橋 護, 鈴木 基啓, "DNSのため流入流出境界条件", *日本機械学会論文集(B編)*, 60 卷571号, 1994, pp.813
- [11] B. Fornberg, "Generation of finite difference formulas on Arbitrarily spaced grids", *Mathematics of Comp.* vol.51, 1988, pp.99-706
- [12] C. Canuto, M. Y. Hussaini, "Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1988, pp. 87
- [13] H. A. van der Vorst, "Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems". *SIAMJ. Sci. Stat. Comput*, vol.13-2, 1992, pp. 631-644
- [14] 小国編, "行列計算ソフトへエア", 九善株式会社, 1995.
- (15) Joe F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. Wayne Mastin, "Numerical Grid Generation".