2001년도 한국음향학회 학술발표대회 논문집 제20권 제2(s)호

VFF PASTd 알고리듬의 개선

전재진, 임준석*, 성굉모
서울대학교 전기 공학부, *세종대학교 전자공학과

Modified VFF PASTd Algorithm

Jae-jin Jun, Jun-Seok Lim*, Koeng-Mo Sung
Seoul National University, *Sejong University
e-mail: jjjun@acoustics.snu.ac.kr

요 약

본 논문에서는 기존의 VFF PASTd 알고리듬의 개선안을 제시하였다. 이 알고리듬은 각 부공간마다 가변 망각인자를 각각 사용하던 기존 방법과는 달리 최종 잔류 오차를 이용하여 하나의 망각인자를 계산하고 이것을 이용함으로써 계산량을 줄임과 동시에 망각인자를 보다 정확히 구할 수 있다. 여기서는 주파수 추정 문제에 대한 모의 실험을 통해 제안된 알고리듬이 우수함을 입증하였다.

1. 서론

기존에는 Pisarenko, MUSIC, ESPRIT과 같은 신호 부공간 추정을 통한 고분해능 기법이 주파수 추정 문제에서 많이 연구되어 왔다. 신호 부공간은 고유치 분해나 특이치 분해를 통해 구할 수 있는데 이러한 과정은 많은 계산량을 필요로 한다. 이를 실시간으로 구현하기 위해 몇가지 귀납적인 신호 부공간 추정 알고리듬이 제안되었다. NA-CSVD(Noise Average Cross-terms Singular Value Decomposition) 이나 PASTd(Projection Approximation Sub-space Tracking with deflation technique) 알고리듬을 그 예로서 들 수 있다.[1][2] 이러한 알고리듬은 비정상(nonstationary) 상태의 환경에 적응하기 위해 망각인자를 도입하고 있으며 이 망각인자를 조절하여 정상(stationary) 상태와 비정상(nonstationary) 환경에 적응하고 있다. 하지만 일반적인 환경은 이러한 정상 비정상 상태가 혼재되어 있기 때문에 고정된 망각인자로 환경에 적응하기는 힘들다. 따라서 이러한 알고리듬에 가변 망각인자(variable forgetting factor, VFF)를 도입한 알고리듬이 제안되었다.[3] 이 알고리듬은 가변망각인자를 사용한 비용함수를 정의하고 이를 최소화 시키는 방향으로 가변 망각인자를 계산하는 것이다. 이 알고리듬은 각 잔류에러에 각각 망각인자를 도입하고 이것을 계산해내고 있다.

본 논문에서는 하나의 망각인자만을 도입하고 최종 잔류에러를 사용하여 이 망각인자를 계산함으로써 계산량을 줄이고 또한 망각인자의 정확성을 꾀하였다. 제안된 알고리듬의 성능을 채널추정 문제에 적용 하였고 모의 실험을 통해 제안된 알고리듬의 우수함을 입증하였다.

2. PASTd 알고리듬과 VFF PASTd 알고리듬

표 1에 PASTd 알고리듬을 정리하였다. 이 알고리듬에서 β 값이 망각인자를 나타내는 것으로 상황에 알맞

게 선택되어야 할 필요가 있다. 반면에 VFF PASTd 알고리듬에서는 이것을 가변망각인자를 사용하여 나타내었다. 이 알고리듬을 위해서 식 1과 같이 비용함수를 정의 하고 이것을 최소화 하는 방향으로 가변 망각인자를 구하였다.

$$J = 1/2\sum_{j=0}^{t}\beta(t,j)\mathbf{e}_i^H(j)\mathbf{e}_i(j) \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{e}(i) = \mathbf{x}(i) - \mathbf{w}_i{}^H\mathbf{y}(i)$ 로 정의 된다. 이것을 LMS 관점에서 최소화 시키기 위해 망각인자를 계산하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\beta_i(t) &= \beta_i(t-1) - \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial E_i}{\partial \beta} \\ &= \beta_i(t-1) - \alpha\,\mathrm{Re}(\mathbf{e}_i{}^H(t)\mathbf{e}_i{}'(t))\end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $E_i = e_i{}^H(t)e_i(t)$ 이다. 이렇게 구한 VFF PASTd 알고리듬을 표 2에 정리하였다. 이 알고리듬에서 사용된 미분 값 $e_i', \mathbf{w}_i', y_i', \lambda_i'$ 은 각각 $e_i, \mathbf{w}_i, y_i, \lambda_i$ 을 망각인자로 미분한 값을 나타낸다.

Update the eigenvalue and eigenvector

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t)\\
&\mathit{For}\quad i = 1:r\\
&\quad y_i(t) = \mathbf{w}_i^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)\\
&\quad \lambda_i(t) = \beta\lambda_i(t-1) + |y_i(t)|^2\\
&\quad \mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}_i(t-1)y_i(t)\\
&\quad \mathbf{w}_i(t) = \mathbf{w}_i(t-1) + \mathbf{e}_i(t)[y_i^*(t)/\lambda_i(t)]\\
&\quad \mathbf{x}_{i+1}(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}_i(t)y_i(t)\\
&\mathit{End}\\
&\sigma^2(t) = \beta\sigma^2(t-1) + \|\mathbf{x}_{r+1}(t)\|^2/(N-r)
\end{aligned}$$

표1. PASTd 알고리듬

3. VFF PASTd 알고리듬의 개선

본 논문에서는 연산과정에서 매번 망각인자를 계산하는 대신 최종 잔류 에러를 사용하여 망각인자를 구한다. 랭크가 r인 신호에 대해 모든 연산후의 잔류 에러는 식 (3) 과 같이 주어질 수 있다.

$$e = (\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{r}\mathbf{w}_i(t)\mathbf{w}_i^H(t))\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

Update the eigenvalue and eigenvector

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t)\\
&\mathit{For}\quad i = 1:r\\
&\quad y_i(t) = \mathbf{w}_i^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)\\
&\quad \lambda_i(t) = \beta_i(t-1)\lambda_i(t-1) + |y_i(t)|^2\\
&\quad \mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}_i(t-1)y_i(t)\\
&\quad \mathbf{e}_i{}'(t) = -\mathbf{w}_i'(t-1)\mathbf{w}_i^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)\\
&\qquad\qquad -\mathbf{w}_i(t-1)\mathbf{w}_i'^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)\\
&\quad J_i{}'(t) = \beta(t-1)J_i{}'(t-1) + \mathbf{e}_i^H(t)\mathbf{e}_i{}'(t)\\
&\quad y_i{}'(t) = \mathbf{w}_i'^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)\\
&\quad \lambda_i'(t) = \lambda_i(t-1) + \beta(t-1)\lambda_i'(t-1)\\
&\qquad\qquad + 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{w}_i'^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)\mathbf{x}_i^H(t)\mathbf{w}_i(t-1))\\
&\quad \mathbf{w}_i'(t) = \mathbf{w}_i'(t-1) + \mathbf{e}_i{}'(t)[y_i^*(t)/\lambda_i(t)]\\
&\qquad\qquad + \mathbf{e}_i{}'(t)[y_i^*{}'(t)\lambda_i(t) - y_i^*\lambda_i'(t)]/\lambda_i(t)^2\\
&\quad \beta_i(t) = \beta_i(t-1) - \alpha\,\mathrm{Re}(J_i{}')\\
&\quad \mathbf{w}_i(t) = \mathbf{w}_i(t-1) + \mathbf{e}_i(t)[y_i^*(t)/\lambda_i(t)]\\
&\quad \mathbf{x}_{i+1}(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}_i(t)y_i(t)\\
&\mathit{End}\\
&\sigma^2(t) = \beta\sigma^2(t-1) + \|\mathbf{x}_{r+1}(t)\|^2/(N-r)
\end{aligned}$$

표 2. VFF PASTd 알고리듬

여기서 가변 망각인자의 계산과정은 식 (2)와 같다. 따라서 여기서 사용하는 망각인자는 식 4와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \beta(t-1) - \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial e(t)^H e(t)}{\partial \beta} \\ &= \beta(t-1) - \alpha\,\mathrm{Re}(\mathbf{e}^H(t)\mathbf{e}'(t))\end{aligned} \quad (4)$$

이 잔류에러를 미분한 값은 식 5와 같이 구한다.

$$e' = -\sum_{i=1}^{r}(\mathbf{w}_i'(t)\mathbf{w}_i^H(t) + \mathbf{w}_i(t)\mathbf{w}_i'^H(t))\mathbf{x}(t) \tag{5}$$

$\mu_i = \mathbf{w}_i'(t)\mathbf{w}_i^H(t) + \mathbf{w}_i(t)\mathbf{w}_i'^H(t)$, $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i-1} - \mu_i$,

$\mathbf{e}_i' = \mathbf{E}_i\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{w}_i\mathbf{w}_i^H$ 라고 하면 새로이 제안된 VFF PASTd알고리듬은 표 3과 같다.

여기서 필요한 $\mathbf{w}_i', y_i', \lambda_i'$ 값들은 표 2에서 정의 된 값을 사용하면 된다.

Update the eigenvalue and eigenvector

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t)$$
$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$$
$$For \quad i = 1 : r$$
$$y_i(t) = \mathbf{w}_i^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)$$
$$\lambda_i(t) = \beta\ (t-1)\lambda_i(t-1) + |y_i(t)|^2$$
$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}_i(t-1)y_i(t)$$
$$y_i'(t) = \mathbf{w}_i'^H(t-1)\mathbf{x}_i(t)$$
$$\mu_i(t) = \mathbf{w}_i'(t)\mathbf{w}_i^H(t) + \mathbf{w}_i(t)\mathbf{w}_i'^H(t)$$
$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i-1} - \mu_i(t)$$
$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{E}_i\mathbf{x}(t)$$
$$\lambda_i'(t) = \lambda_i'(t-1) + \beta(t-1)\lambda_i'(t-1) + 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}_i^H(t)\mu_i(t)\mathbf{x}_i(t))$$
$$\mathbf{w}_i'(t) = \mathbf{w}_i'(t-1) + \mathbf{e}_i'(t)[y_i^*(t)/\lambda_i(t)] + \mathbf{e}_i'(t)[y_i^{*\prime}(t)\lambda_i(t) - y_i^*\lambda_i'(t)]/\lambda_i(t)^2$$
$$\mathbf{w}_i(t) = \mathbf{w}_i(t-1) + \mathbf{e}_i(t)[y_i^*(t)/\lambda_i(t)]$$
$$\mathbf{x}_{i+1}(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}_i(t)y_i(t)$$
$$\mathbf{U}_i(t) = \mathbf{U}_{i-1}(t) - \mathbf{w}_i(t)\mathbf{w}_i^H(t)$$
$$End$$
$$\beta(t) = \beta(t-1) - \alpha\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}^H(t)\mathbf{U}_r e_r')$$
$$\sigma^2(t) = \beta\sigma^2(t-1) + \|\mathbf{x}_{r+1}(t)\|^2/(N-r)$$

표 3. 개선된 VFF PASTd 알고리듬

4. 모의실험

제안된 알고리듬의 성능 검증을 위해 주파수 추정 문제의 결과를 비교하기로 한다. 실험은 ESPRIT 알고리듬을 사용하였고 실험에 사용된 신호부공간 추정 알고리듬으로 망각인자 0.95, 0.85를 사용한 PASTd 알고리듬과 VFF PASTd 알고리듬을 사용하였다. 각 알고리듬을 사용하여 정규화된 주파수가 0.1에서 0.4로 변할 때의 추정 성능을 비교하였다. 신호대 잡음비는 3.5 dB인 상황으로 가정하였다.

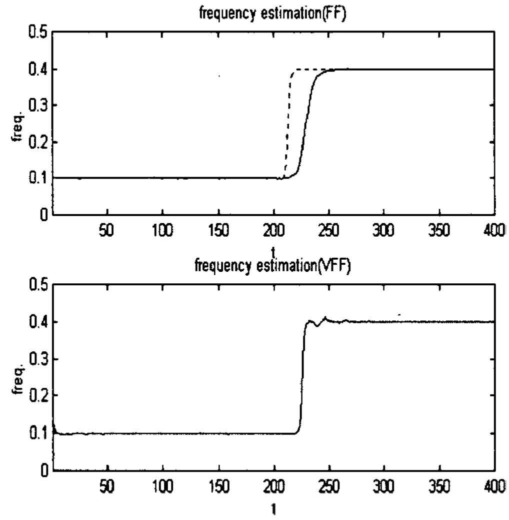

그림 1. 주파수 추정 성능

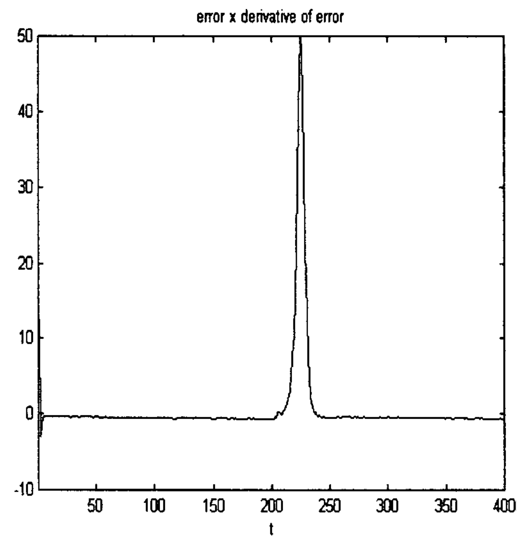

그림 2. $\mathbf{e}^H(t)\mathbf{e}'(t)$ 값의 변화

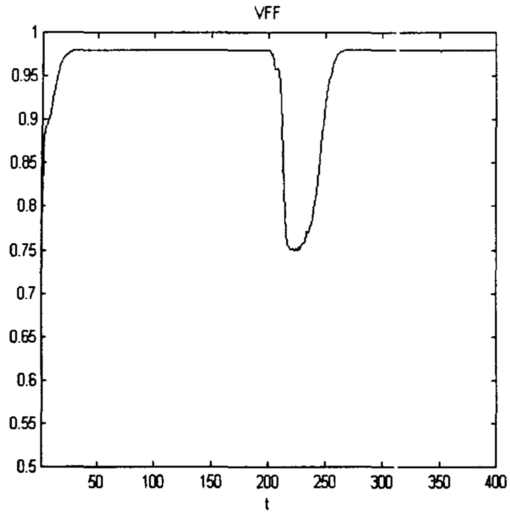

그림 3. 가변 망각인자 값의 변화

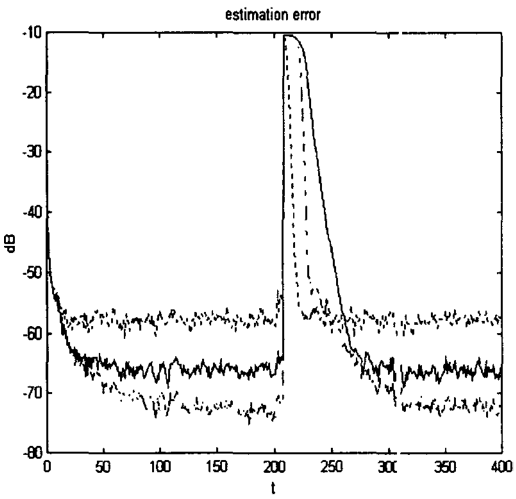

그림 4. 추정에러 비교

(solid: FF0.95, dot:FF0.85, dashdot:VFF)

그림 1 에서 주파수 추정 성능을 보였다. 아래쪽 그림이 가변망각인자를 사용한 것으로 빠른 추정 성능을 보인다. 그림 2 에서는 망각인자 계산에 사용되는 $e^H(t)e'(t)$ 값의 변화를 나타내었다. 이 값은 에러가 발생한 시점부터 값이 급격히 커지다가 정상상태에 이르면서 값이 작아진다. 이에 따라 그림 3 에서 보인 가변 망각인자의 값이 환경이 변화에 알맞게 값이 변한다는 것을 알 수 있다. 그림 4 에서는 주파수 추정에러를 비교 하였다.

5. 결론

모의 실험을 통해 제안된 알고리듬이 기존의 것에 비해 수렴 성능과 추정에러 성능이 낫다는 것을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Pango, P.A., Champagne B., " On the Efficient use of Givens Rotations in SVD-based Subspace Tracking" , IEEE Signal Processing, vol. 74, No. 3, 1999.

[2] Bin Yang, " An Extension of the PASTd Algorithm to Both Rank and Subspace Tracking" , IEEE Signal Processing Letters, Vol.2, No.9, september 1995.

[3] Jun-Seok Lim, Seongwook Song and Koeng-Mo Sung, "Variable forgetting factor PASTd algorithm for time-varying subspace estimation ," IEE Electronics Letters, 3rd August 2000. Vol. 36 No. 16 pp. 1434-1435, 2000.