2001년도 한국음향학회 학술발표대회 논문집 제20권 제2(s)호

비최소 위상 시스템의 역변환 문제에 대한 실험적 고찰

노 경 래*, 이 상 권*

* 인하대학교 기계공학과

An experimental study on an inverse problem of a non-minimum phase system

Kyoung Rae Noh*, Sang Kwon Lee*

* Dept. of Mechanical Engineering, Inha Univ.

andy_noh@hotmail.com

요 약

본 논문은 비최소 위상을 가지는 시스템에 대한 역변환 문제를 실험적으로 고찰, 연구하였다. 일반적으로 선형적이고 인과적인 시스템의 입• 출력관계는 행렬형태로 공식화할 수 있다. 최소위상(minimum phase) 시스템의 시스템행렬은 항상 역행렬이 존재하며 안정적이지만 비최소 위상(non-minimum phase)시스템의 시스템행렬은 근사특이(near-singular)행렬 또는 특이(singular) 행렬이므로 불량조건(ill-conditioning)이 발생하고 역변환이 존재할 수 없다. 비최소 위상 시스템의 역변환 문제는 다른 과정을 포함하지 않고서는 인과적이고 안정적인 역변환 필터를 가질 수 없다. 따라서 역변환 필터의 구현을 위해 SVD(singular value decomposition)를 이용하였다. 비최소 위상 시스템인 경우 시스템행렬은 하나이상의 매우 작은 특이값을 가지며 이것은 시스템의 위상정보를 가진다. 이 성질을 이용하여 시스템의 근사적인 역변환 필터를 구현하고 비최소 위상을 갖는 외팔보에 대해 실험적으로 검증하였다.

1. 서 론

역변환 문제란 $\mathbf{y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ 에서 출력($\mathbf{y}$)와 시스템함수($\mathbf{A}$)를 알고 있을 때 입력신호($\mathbf{x}$) 즉, 미지(未知)의 신호를 알아내는 것이다. 이러한 문제는 여러 분야에서 복잡하고 중요한 과제로 인식되며 이에 대한 관심도는 날로 높아지고 있으며 이에 대한 많은 연구 결과들이 발표되고 있다.

일반적으로 많은 상황에서 측정데이터와 이에 관계된 시스템은 선형 또는 선형화 되어질 수 있다. 그러므로 선형적이고 인과적 시스템의 입• 출력 관계는 행렬형태로 공식화되어 질 수 있다. 이러한 행렬형태는 시간과 주파수상에서 발생하는 수치적 관계를 조직화하는데 매우 편리하며 선형적 역변환 문제는 행렬의 역변환 문제와 동일하게 볼 수 있다. 비최소 위상 시스템의 경우 $\mathbf{y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ 에서 시스템행렬 $\mathbf{A}$ 는 불량조건을 가지며 직접적인 역변환($\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{y}$)이 불가능하다. 이러한 문제를 해결하기 위해 SVD 를 이용하였으며[1] 또한 잡음의 영향을 제거하기 위해 SVD 를 이용하여 잡음제거 필터로 구성하였다. 이를 비최소 위상을 갖는 외팔보에 대한 실험을 통해 문제점과 해결방안을 연구하였다.

2. 이 론

2.1 비최소 위상 시스템의 역변환 문제

인과적, 선형적 시스템의 입• 출력관계는 행렬형태로 공식화 된다. 즉, 행렬공식화는 숭적(convolution)형태의 입• 출력관계에서 유도될 수 있으며 식(1)과 같이 표현될 수 있다.

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k)+b(n)\quad,\quad \mathbf{y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b} \tag{1}$$

여기서, $x(n)$ 은 입력, $h(n)$ 은 충격응답함수(impulse response) 그리고 $b(n)$ 은 잡음항이다.

비최소 위상을 갖는 시스템일 경우 시스템은 불량조건을 가지며 충격응답함수로 이루어지는 시스템행렬이 근사특이 또는 근사행렬 이므로 역행렬을 가지

지 못한다. 따라서 SVD (singular value decomposition)을 비최소 위상 시스템의 역변환 문제를 해결하는 데 사용한다. 먼저 최소위상/비최소 위상 시스템의 시스템 행렬의 특이값(singular value)의 성질을 알아보면 그림 1과 같다.

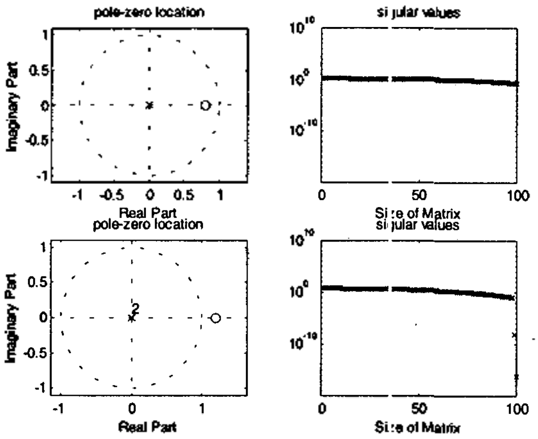

그림. 1. 최소 위상 시스템의 영점/극점의 도시(a) 및 특이값의 분포(b),비최소위상 시스템의 영점/극점의 도시(c) 및 특이값의 분포(d)

그림 1(a),(b)는 최소위상 시스템에 대한 영점과 극점의 도시, 시스템 행렬의 특이값의 분포를 나타낸 것이고 그림 1(c),(d)는 비최소 위상 시스템의 영점과 극점의 도시, 시스템 행렬의 특이값의 분포를 나타낸 것이다. 그림 1(b),(d)를 비교해 보면 최소위상시스템의 특이값의 분포는 변화가 작고 비최소 위상 시스템에서는 그림 1(c)의 z-영역에서 단위원 밖에 존재하는 영점에 대응하는 매우 작은 특이값이 존재하며[1] 이러한 매우 작은 특이값이 시스템의 불량조건을 유발함을 상태수(condition number), 식(2),(3)을 통해 알 수 있다.

$$k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \tag{2}$$

여기서, $\|\cdot\|$ 는 행렬의 정규(norm)이다. 상태수, $k(\mathbf{A})$ 는 역변환 문제에서 해의 민감도(sensitivity)를 판단하는 기준이며[2] 그 값이 매우 크다면 시스템은 불량조건을 가진다. 또한 상태수는 시스템의 최대 특이값과 최소 특이값의 비로 나타내어질 수 있다[2].

$$k(\mathbf{A}) = s_{max}(\mathbf{A}) / s_{min}(\mathbf{A}) \tag{3}$$

이러한 특이값의 성질을 이용하여 비최소 위상 시스템의 불량조건 문제를 해결한다. 일련의 과정을 설명하면 다음과 같다. 먼저 SVD($\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$)를 이용하여 시스템행렬의 특이값을 계산한 다음[2] 행렬 $\mathbf{S}$ 에서 불량조건을 유발시키는 매우 작은 특이값을 적당한 양의 값으로 대체시켜[3] 행렬 $\hat{\mathbf{S}}$ 구성하고 근사적인 시스템행렬 $\hat{\mathbf{A}}(=\mathbf{U}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{V}^T)$ 을 계산한다. 구하여진 행렬 $\hat{\mathbf{A}}$ 을 식(4)를 이용하여 원 입력신호를 구한다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{y} \tag{4}$$

2.2 잡음 제거

식(1)에서 랜덤잡음의 영향을 받는 출력 $y(n)$ 을 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{5}$$

출력벡터 $\mathbf{y}$ 에 대해 신호에 대한 잡음의 영향을 고려하기 위해 데이터행렬, $\mathbf{Y}$ 를 만든 후 SVD($\mathbf{Y} = \mathbf{USV}^T$)를 이용한다[4]. 만약 SNR(signal-to-noise ratio)가 낮지 않다면 행렬 $\mathbf{Y}$ 의 특이값은 식(6)과 같이 두 그룹으로 나뉘어 질 수 있다[5].

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_b \end{bmatrix} \tag{6}$$

여기서, 부행렬 (submatrix) $\mathbf{S}_s$ 와 $\mathbf{S}_b$ 는 각각 신호와 잡음에 관련 있는 특이값을 표현한다. 또한 행렬 $\mathbf{U}$ 는 렬 $\mathbf{S}$ 에 대응하여 신호와 잡음에 관련된 부분으로 나뉘어 질 수 있다. 신호와 잡음에 대하여 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^T\mathbf{Y} \\ \mathbf{U}_b^T\mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s \\ \mathbf{X}_b \end{bmatrix} \tag{7}$$

신호영역과 잡음영역은 서로 직교(orthogonal)한 투영(projection)으로 표현되므로 잡음에 대한 부분은 제거될 수 있다[4]. 따라서 측정된 신호에 대해 입력신호의 영향만을 포함하는 행렬 $\hat{\mathbf{Y}}$ 를 식(8)과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}_s\mathbf{X}_s = \sum_{i=1}^{n} s_i u_i v_i^T \tag{8}$$

여기서 u_i , v_i 는 행렬 $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ 의 i 번째 열(column)이며 s_i 는 행렬 $\mathbf{S}$ 의 i 번째 특이값이다. n 은 다른 특이값과 구별되는 값이 큰 특이값의 개수이다.

2.3 실험 및 결과

비최소 위상을 갖는 외팔보에 대해 실험을 하였으며 실험장치 개략도는 그림 2와 같다.

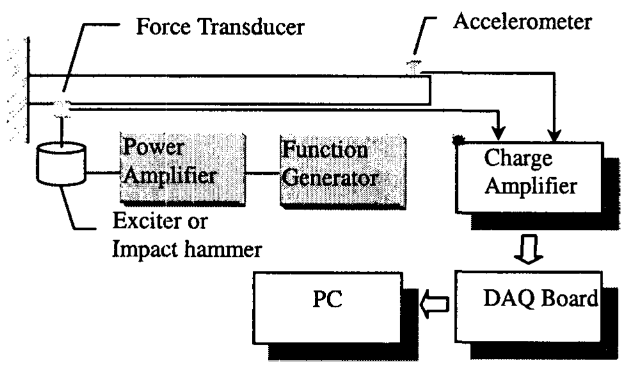

그림. 2. 실험장치 개략도

실험의 진행방법은 첫째, 시스템에 대해 알고 있는 입·출력 신호를 이용하여 시스템 행렬을 구한 다음 둘째, 시스템에 미지(未知)의 입력신호를 가하여 출력신호를 측정한다. 마지막으로 구하여진 시스템 행렬과 미지(未知)의 신호에 대한 출력신호를 이용하여 미지(未知)의 입력신호를 알아낸다. 즉, SVD 를 이용하여 비최소 위상을 갖는 외팔보에 대한 역변환문제의 일

련의 과정은 그림 3 에 표시하였다.

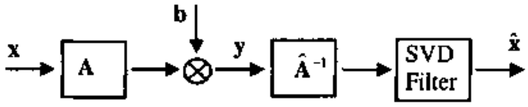

그림. 3. 비최소 위상 시스템의 역변환 과정

비최소 위상을 갖는 외팔보에 대하여 세가지 신호(충격신호, 두 충격신호, 정현파)를 가진하여 실험을 하였다. 충격신호와 두 충격신호는 충격망치(impact hammer)를 이용하였고 정현파의 경우 가진기(exciter)를 이용하였다. 이 실험의 경우 충격응답(impulse response)를 구함에 있어서 다소 주의를 요한다. 외팔보에 대한 위상의 판단을 위해 그림 5 에 영점과 극점을 도시하였다. 비최소 위상 시스템의 역변환문제에 대해 직접적인 역변환과 SVD 를 이용하였을 때를 비교하여 보았다. 충격신호 및 두 충격신호에 대해 실험 결과는 그림 6,7 에 나타내었다.

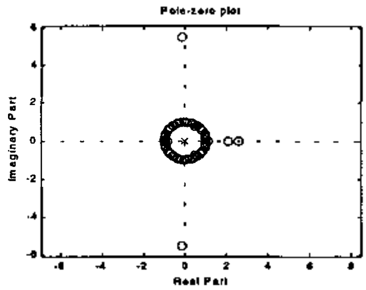

그림. 4. 시스템(외팔보)의 영점/극점의 도시

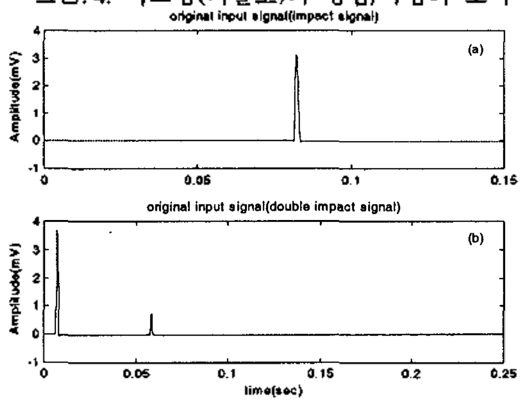

그림. 5. 원 입력신호(충격신호(a),두 충격신호(b))

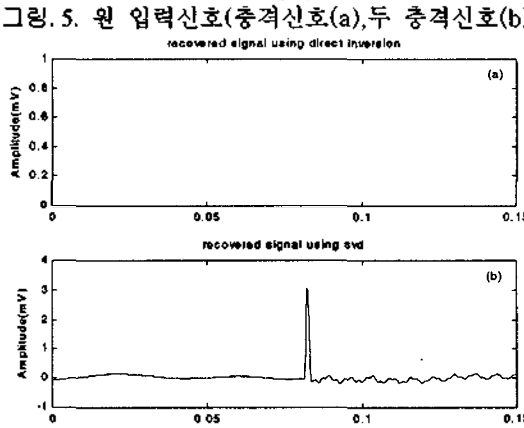

그림. 6. 충격신호에 대해 직접적인 역변환을 통해 구한 신호(a),SVD 역변환을 통해 구한 신호(b)

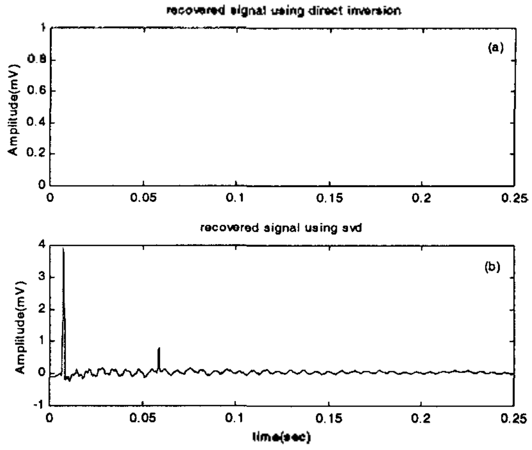

그림. 7. 두 충격신호에 대해 직접적인 역변환을 통해 구한 신호(a),SVD 역변환을 통해 구한 신호(b)

실험결과에서 보듯이 비최소 위상 시스템에서는 직접적인 역변환을 통해서는 불량조건 문제를 해결할 수가 없으므로 원 신호(original input signal)를 찾기란 불가능하지만 SVD 를 이용하여 역변환 문제를 다루었을 때는 원 신호에 근사적인 값을 찾음을 알 수 있다.

정현파 신호의 경우 그림 6,7 에서 사용한 충격실험을 통한 시스템행렬과 랜덤실험을 통한 시스템행렬 두가지를 사용하였을 때를 비교했다. 그림 8 에서 보듯이 충격실험을 통한 시스템행렬을 이용할 경우 정현파의 형태는 어느정도 구하지만 근사적인 원 신호를 찾을 수 없지만 그림 9 의 랜덤실험을 통한 시스템행렬을 이용하였을 때는 원 신호에 근사적인 값을 찾아낸다. 이 실험에서 정현파 신호의 가진을 위해 가진기 설치에 따른 시스템 변화에도 실험결과가 민감하게 변함을 알 수 있다. 따라서, 원 신호를 찾아내기 위한 역변환 문제의 해결은 시스템행렬을 주의해서 구해야 함을 알 수 있다.

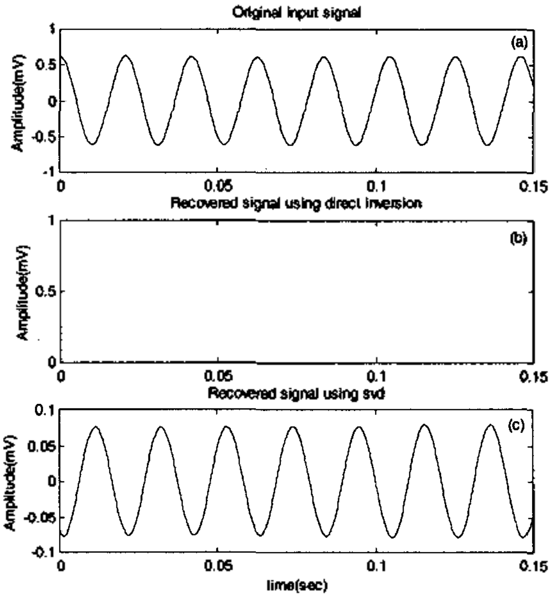

그림. 8. 원 정현파신호(a), 직접적인 역변환을 통해 구한 신호(b),SVD 역변환을 통해 구한 신호(c)

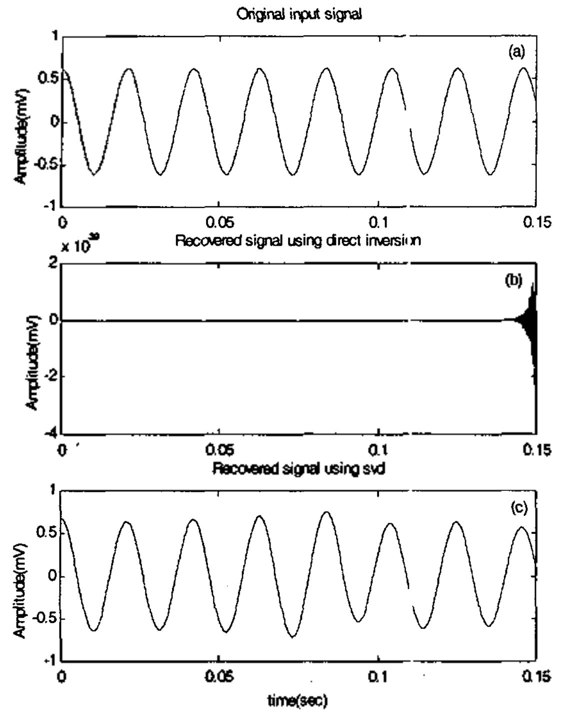

그림. 9. 원 정현파신호(a), 직접적인 역변환을 통해 구한 신호(b),SVD 역변환을 통해 구한 신호(c)

3. 결 론

본 논문은 비최소 위상 시스템에서의 역변환 문제에 대해 연구하였다. 비최소 위상 시스템의 시스템행렬은 근사특이행렬 또는 특이행렬이며 불량조건을 유발하기 때문에 역행렬을 가질 수 없다. 따라서 이러한 문제의 해결을 위해 SVD 를 이용하고 또한 잡음제거 필터로도 사용하였다. 실험결과에서 세가지 신호(충격신호, 두 충격신호, 정현파신호)에 대해 직접적인 역변환으로는 원 입력신호를 찾아냄이 불가능함을 알 수 있으며 SVD 를 이용하여 근사적인 역변환 필터를 구현하여 원 입력신호를 찾을 수 있음을 알 수 있다. 또한, 실제적 응용에서 시스템특성을 고려하여 시스템 행렬을 주의해서 구해야 함을 알 수 있다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부의 원자력연구 개발사업비의 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

1. S. Hashemi and J. K. Hammond "The Interpretation of Singular values in the Inversion of Minimum and Non-Minimum Phase Systems", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol **10**, No 3, pp.225-240, 1996
2. Golub G. H. & C. F. Van Loan "Matrix Computation", The John Hopkins University Press, 1996
3. 노경래, 이상권 "비최소 위상 시스템에서 음재생을 위한 역변환 필터의 구현", 한국소음진동학회 춘계학술대회논문집, pp.997-1002, 2001
4. Sadasivan P. K and Narayana Dutt D. "SVD based technique for Noise Reduction in Electro-encephalographic Signal", Signal Processing, Vol **55**, pp. 179-189, 1996
5. Callaerts, D. et al. "On-line Algorithm for Signal Separation based on SVD in : E.F. Deprettere. Ed. SVD and signal processing", Elsevier, pp.269-276, 1998