

# 다경간 연속보의 자동화 해석

## Automatic Analysis of Continuous Beams with Variable Cross-Section

신 성 철\* · 김 영 일 · 이 태 은 · 이 병 구(원광대)

Shin, Seong Cheol · Kim, Young Il · Lee, Tae Eun · Lee, Byoung Koo

### Abstract

This paper deals with the Automatic Analysis of Continuous Beams with Variable Cross-Section. Based on the principle of superposition and the method of consistent deformations, the governing differential equation is derived for the deflection and stress resultants of such continuous beam.

The effects of variable load conditions, the end constraints on the deflection and the stress resultants are analyzed. It is expected that the results obtained herein can be used practically in the structural engineering.

### I. 서 론

보는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 각종 구조공학 관련분야에서 가장 기본이 되는 구조단 위계이다. 특히 보를 연속보로 시공하는 경우에는 역학적으로 유리하여 실제 현장에서도 많이 이용되고 있다. 보를 변단면으로 시공하는 경우 재료가 절약되는 경제적 이점이 있을 뿐만 아 니라 미적 감각, 시공성 등의 이유로 변단면을 더욱 많이 이용할 전망이다. 집중하중이 작용하 는 경우 보에 발생하는 여러 정적 거동들은 보의 설계에서 가장 기본이 되는 설계자료들이 되 고 있다. 이러한 정적 거동들은 등단면 보에 비하여 변단면 보의 경우에는 그 해석이 훨씬 복 잡하다. 이러한 관점에서 본 연구는 집중하중을 받는 변단면 보의 정적 거동을 체계적으로 해 석함으로써 변단면 보의 설계시에 여러 가지 설계자료들을 제공하는 데 연구목적이 있다.

변단면 구조를 대상으로 하는 주요 연구들은 많은 문헌들<sup>1)~4)</sup>에서 찾아 볼 수 있다. 본 연구 에서는 그림 1과 같이 높이는 일정하고 폭이 단계적으로 변하는 불연속 변단면 보를 채택하였 다. 그림 1에서  $l$ 은 지간길이고,  $I_1, I_2, \dots, I_n$ 는 각각 불연속 단면에 대한 단면이차모멘트이 며,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 는 각각 단면의 길이를 나타낸다. 그림 2는 다양한 지점조건하에서 다경간 불연속 변단면 보에 임의 개수의 집중하중  $P_i$ , 분포하중  $w_i$  및 모멘트하중  $M_i$ 가 재하된 것 을 형상화한 것이다. 본 연구에서의 단부조건은 그림 2와 같이 회전-회전, 회전-고정, 고정-회 전, 고정-고정, 고정-자유 및 자유-고정의 6 가지 조건으로 변화시킬 수 있다.

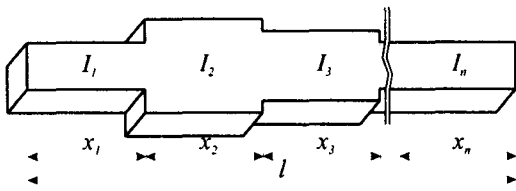


그림 1. 불연속 변단면 보의 기하학적 형상

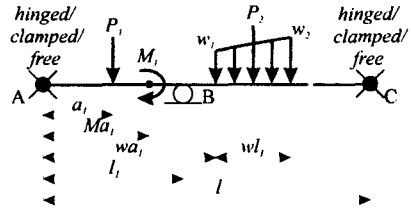


그림 2. 연구대상 보의 제변수 및 하중형상

## II. 미분방정식의 유도

그림 3은 그림 2의 보에서 부정정력을 택하여 변형일치법을 적용, 정정구조물로 만든 후 집중하중  $P$ 를 받고, 지간길이가  $l$ 인 변단면 보의 정적거동을 나타낸 것이다. 그림 3에서  $a$ 는 집중하중  $P$ 의 작용위치,  $R_m$  및  $R_v$ 는 보의 좌단에 발생하는 모멘트반력 및 수직반력을 나타낸다. 또한 보의 임의점  $x$ 에서  $I$ ,  $M$ ,  $u$ 는 각각 단면이차모멘트, 휨모멘트 및 처짐을 나타낸다.

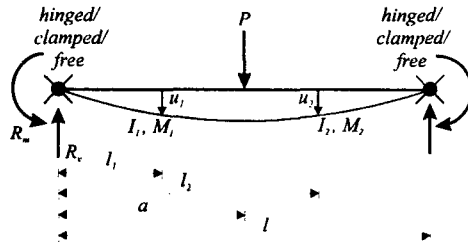


그림 3. 연구대상 보의 수학적 모형

휨모멘트를 받는 보 요소에서 미소처짐이론에 의한 휨-곡률 관계식은 다음과 같다.<sup>[4]</sup>

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = -M \quad (1)$$

여기서,  $E$ 는 탄성계수이고, 그림 3에서 보의 임의점  $x$ 에서의 휨모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$M = R_m + R_v x \quad [0 \leq x \leq a], \quad M = R_m + Pa + R_v x - Px \quad [a < x \leq l] \quad (2, 3)$$

식 (1)에 식 (2)와 식 (3)을 대입하고 정리하면 집중하중을 받는 변단면 보의 정적 거동을 지배하는 다음의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{EI} (-R_m - R_v x) \quad [0 \leq x \leq a], \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{EI} (-R_m - Pa - R_v x + Px) \quad [a < x \leq l] \quad (4, 5)$$

식 (4)와 식 (5)로부터  $du/dx$  및  $u$ 를 얻기 위하여 부정적분을 두 번 시행하면 다음과 같다.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E} (-R_m S_1 - R_v S_2 + C_1), \quad u = \frac{1}{E} (-R_m S_3 - R_v S_4 + C_1 x + C_2) \quad [0 \leq x \leq a] \quad (6, 7)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E}(-R_m S_1 - PaS_1 - R_v S_2 + PS_2 + C_3) \quad [a < x \leq l] \quad (8)$$

$$u = \frac{1}{E}(-R_m S_3 - PaS_3 - R_v S_4 + PS_4 + C_3 x + C_4) \quad [a < x \leq l] \quad (9)$$

여기서,  $S_1 = \int_0^x \frac{1}{I} dx$ ,  $S_2 = \int_0^x \frac{x}{I} dx$ ,  $S_3 = \int_0^x (\int_0^x \frac{1}{I} dx) dx$  및  $S_4 = \int_0^x (\int_0^x \frac{x}{I} dx) dx$ 이다.

식 (6), 식 (7), 식 (8) 및 식 (9)에 포함되어 있는 미지수인  $R_m$ ,  $R_v$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ 는 단부의 경계조건에 의하여 결정될 수 있다. 여기서  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ 는 적분 상수이다.  $R_m$ ,  $R_v$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ 가 결정되면 식 (2), (3) 및 식 (7), (9)에 의하여 보 임의점에서의 휨모멘트 및 처짐을 각각 산정할 수 있다.

### III. 미지반력 및 적분상수 결정

식 (7) 및 식 (9)의 탄성곡선식에 포함되어 있는 미지수인 반력요소  $R_m$ ,  $R_v$ 와 적분상수  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ 를 구하기 위하여 다음과 같은 보의 경계조건을 이용한다.

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 0, \quad R_m = 0, \quad R_v = 0 \quad (10 \sim 13)$$

$$C_1 - C_2 + PaS_1(a) - PS_2(a) = 0, \quad C_1 a + C_2 + PaS_3(a) - PS_4(a) - C_3 a - C_4 = 0 \quad (14, 15)$$

$$-R_m S_3(l) - R_v S_4(l) + PS_4(l) - PaS_3(l) + C_3 l + C_4 = 0, \quad R_m + R_v l - Pl + Pa = 0 \quad (16, 17)$$

$$-R_m S_1(l) - R_v S_2(l) + PS_2(l) - PaS_1(l) + C_3 = 0, \quad R_v = P \quad (18, 19)$$

이상에서 식 (10)~(19)의 10개 1차 방정식을 단부조건에 따라서 조합하여 풀면 미지수  $R_m$ ,  $R_v$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ 를 구할 수 있다.

### IV. 수치해석 결과 및 고찰

본 연구의 해석결과를 검증하기 위하여 본 연구와 SAP 2000, ANSYS의 해석 결과를 표 1에서 비교하였다.

표 1. 본 연구 방법의 타당성 검증 ( $l = 10 \text{ m}$ ,  $E = 2.1 \times 10^7 \text{ tf/m}^2$ ,  $I = 1.728 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $P = 2 \text{ tf}$ ,  $a = 6 \text{ m}$ )

단부 조건	Data source	This study	SAP 2000	ANSYS	단부 조건	Data source	This study	SAP 2000	ANSYS
회전 - 회전	$R_{Va}$	0.80	0.80	0.80	고정 - 고정	$R_{Va}$	0.70	0.70	0.70
	$R_{Ma}$	0.00	0.00	0.00		$R_{Ma}$	-1.92	-1.92	-1.92
	$M_{\max}$	4.80	4.80	4.80		$M_{\max}$	2.30	2.30	2.30
	$u_{\max}$	0.0542	0.0544	0.0544		$u_{\max}$	0.0131	0.0131	0.0131
회전 - 고정	$R_{Va}$	0.42	0.42	0.42	고정 - 자유	$R_{Va}$	2.00	2.00	2.00
	$R_{Ma}$	0.00	0.00	0.00		$R_{Ma}$	-12.00	-12.00	-12.00
	$M_{\max}$	2.50	2.50	2.50		$M_{\max}$	-12.00	-12.00	-12.00
	$u_{\max}$	0.0212	0.0212	0.0212		$u_{\max}$	0.3968	0.3968	0.3968

그림 4, 5, 6은 변단면 단순보에  $l=10\text{m}$ ,  $P=2\text{tf}$ ,  $a=6\text{m}$ ,  $w_a$ 와  $w_b$ 가 각각  $0.2\text{tf/m}$ ,  $0.1\text{tf/m}$ 인 사다리꼴 분포하중이 보에 만재된 경우 각각의 단부조건인 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전, 고정-고정, 고정-자유 및 자유-고정일 때의 전단력도, 휨모멘트도, 처짐도를 나타낸 그림이다.

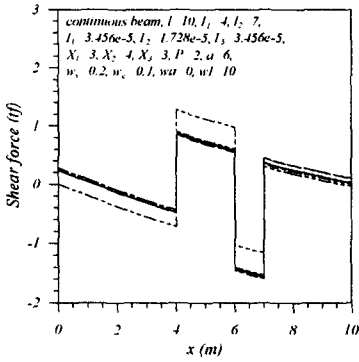


그림 4. 전단력도

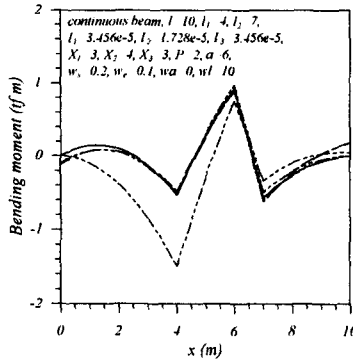


그림 5. 휨모멘트도

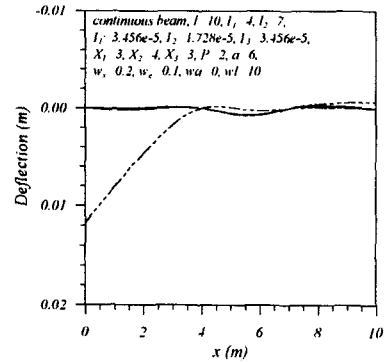


그림 6. 처짐도

## V. 결론

이 논문은 변단면 연속보에 집중하중, 분포하중, 모멘트하중 등이 재하되는 경우 보의 정적 거동해석에 관한 연구이다. 보의 해석에는 미소처짐이론에 의한 휨-곡률 관계식을 이용하여 보의 정적거동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 유도된 미분방정식을 수치적분하여 제변수 변화에 따른 각각의 거동값들을 산출하였고, 경계조건을 이용하여 미지반력과 적분상수를 결정하였다. 이 연구의 결과를 범용프로그램인 SAP 2000과 ANSYS를 이용하여 그 결과값들을 비교분석한 결과 매우 잘 일치하여 본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석 방법이 타당함을 알 수 있었다. 따라서 본 연구의 수치해석값들은 보의 설계시에 아주 유용하게 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 참고문헌

1. Heidebrecht, A. C., 1967, "Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 11, pp. 11-15.
2. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P. 1984, Mechanics of Materials, Wadsworth, Inc., pp. 351-355.
3. 이병구, 오상진, 최규도, 1991, "변단면 보의 자유진동 해석", 대한토목학회 논문집, 제11권 제3호, pp. 37-46.
4. Gupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 111, pp. 19-36.