

Taper가 있는 동맥 내부 맥동유동에 관한 변형된 Womersley해

변수영* · 손정락** · 심은보*** · 노승탁**

1. 서 론

심장의 수축 및 팽창 운동에 의해 야기되는 동맥내부 혈류유동의 맥동유동에 대한 수학적 고찰은 1958년에 Womersley에 의해서 이론적으로 정립되었다. Womersley는 유체역학자이면서 의사인 Poiseuille에 의해서 정립된 균일 직경 혈관 내부에서의 정상상태 유동해를 확장하여 맥동 유동 환경에서의 압력과 속도의 관계를 설명할 수 있는 Womersley해를 수학적으로 유도하였다.

그 후에도 보다 복잡한 혈관 형상과 유동 조건에서의 혈류 유동을 수학적으로 표현하고자 하는 많은 시도가 있었으나, 혈류 유동을 지배하는 방정식의 비선형성으로 인하여 이러한 노력은 한계가 있을 수 밖에 없었다. 그러나, 최근 들어 전산 해석능력의 획기적인 발달과 함께 전산유체역학적 기법을 이용한 수치 해석적 방법으로 수학적 접근의 한계를 극복해 나가고 있으며, 이러한 노력은 최근에는 인체 내부의 대부분의 혈류 유동을 해석적으로 모사할 수 있는 수준에 까지 이르게 되었다. 그럼에도 불구하고 이러한 전산유체역학을 이용한 방법은 전산 처리 능력의 한계 등으로 인하여 아직도 본격적으로 실용화되기 위해서는 많은 투자가 필요한 상황이다. 반면에, 이와 같은 수치 해석적 방법보다는 적용의 다양성에 한계가 있기는 하지만 혈류 유동의 정성적 특성을 파악하기 위해서는 수학적 접근 방법이 더욱 유리한 경우가 있을 수 있다. 따라서, 복잡한 환경에서의 혈류 유동의 정확한 해석을 위한 전산유체역학적 방법의 지속적인 개발과 함께, 기존의 수학적 방법의 한계를 극복하기 위한 고찰도 동시에 필요하다.

본 연구에서는 동맥내부에서의 맥동 유동과 관련된

Womersley해를 보다 실제적인 경우로 확장하기 위해서 혈관의 면적이 길이방향으로 수축하는 taper가 있는 혈관에서의 혈류 유동을 수학적으로 고찰해 보고자 한다.

2. 변형된 Womersley해의 유도 및 적용

혈관 내부 맥동유동의 가장 고전적인 수학적 표현으로 알려져 있는 Womersley해는 다음과 같이 표현된다.

$$Q = \sum_{n=1}^N \operatorname{Re} \left[(a_n - b_n i) \cdot \frac{\pi R^2}{i\omega\rho} \left(1 - \frac{2J_1(i^{3/2}\alpha)}{i^{3/2}\alpha J_0(i^{3/2}\alpha)} \right) e^{in\omega t} \right] \quad (1)$$

이때, α 는 Womersley 수이고, a_n 과 b_n 은 혈관 내부 맥동 유동의 원동력인 압력 구배를 Fourier 적분하여 얻어진 계수이며, 이와 관련된 압력 구배는 아래의 식처럼 표현된다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (2)$$

그러나, 이러한 Womersley해는 균일한 단면적을 가지는 원관 형태의 혈관에만 적용되므로 실제 인체 내부의 다양한 혈관 내부 유동을 규명하기에는 불충분하다. 만약, 혈관 형상이 길이 방향에 따라 축소하는 형태의 taper가 있는 경우와 같이 단순한 변화가 있더라도 Womersley해는 적용이 불가능하며, 전산유체역학적 방법만이 유일한 접근방법으로 알려지고 있다.⁽¹⁾ 그러나, 본 연구에서는 이를 수치 해석이 아닌 수학적 방법을 통하여 아래와 같은 변형된 Womersley해를 유도 할 수 있었다.

$$Q = \sum_{n=1}^N \operatorname{Re} \left[\frac{(a_n - b_n i) e^{in\omega t}}{\int_{x=0}^{x=l} \frac{\mu l}{\pi R(x)^4 [\beta(x) J_0(\beta(x)) - 2J_1(\beta(x))]} dx} \right] \quad (3)$$

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

** 서울대학교 기계항공공학부

*** 금오공과대학교 기계공학부

그림 1은 흉부 대동맥 내부의 맥동유동을 수학적으로 해석한 결과를 보여주고 있다. 여기서 적용한 흉부 대동맥의 기하학적 형상과 유동조건은 Ozawa 등⁽²⁾이

적용시켰으며, 길이방향으로 taper가 있는 형상의 경우에는 본 연구에서 제안된 변형된 Womersley 해를 적용시켰다. 동일한 압력이 주어졌을 때 변형된 Womersley해는 taper가 고려되지 않은 경우에 적용된 Womersley해 보다 유동의 시간에 따른 변화량이 적으며, 특히 최대 systole 상태에서의 최대 유량의 크기가 상대적으로 적음을 알 수 있는데, 이는 taper가 있는 혈관 내부 맥동유동을 비선형 수치해석을 통하여 구한 결과⁽¹⁾와 유사한 경향을 나타냄을 알 수 있었다.

3. 결 론

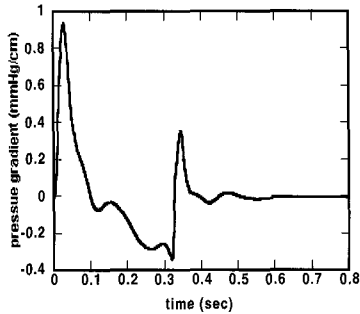
본 연구에서는 길이방향 단면적 축소에 의하여 taper가 존재하는 동맥 내부에서의 맥동유동을 복잡한 비선형 전산유체역학적 접근이 아닌 수학적 방법을 사용하여 변형된 Womersley해를 유도하였다. 변형된 Womersley해를 인체의 흉부 대동맥에 적용해본 결과가 이미 발표된 비선형 전산유체역학적 해석결과와 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서, 변형된 Womersley해는 일부 제한적인 유동 조건에서만 적용이 가능하기 때문에 전산유체역학적 해석과 같이 다양한 상황에 적용하기에는 한계가 있을 수 밖에 없으나 동맥 내부 혈류유동을 비교적 간단하게 정성적으로 분석하기에는 편리한 도구가 될 수가 있음을 확인할 수 있었다.

후 기

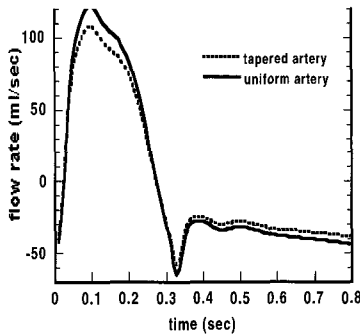
이 연구는 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고 문헌

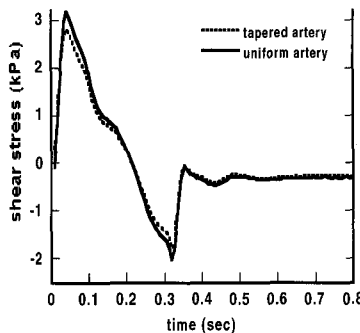
- (1) Cezeaux J.L. and van Grondelle, A., "Accuracy of the inverse Womersley method for the calculation of hemodynamic variables", *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 25, pp. 536-546, 1997
- (2) Ozawa, E.T., Bottom, K.E., Xiao, X. and Kamm, R.D., 2001, "Numerical simulation of enhanced external counterpulsation", *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 29, pp. 284-297.



(a) Pressure gradient



(b) Flow rate



(c) Wall shear stress

Fig. 1 Mathematical solutions of pulsatile blood flow in thoracic aorta

발표한 논문의 데이터를 적용하였다. 본 해석에서 혈관을 균일 형상으로 가정한 경우에는 Womersley해를