

다변수 비선형 시스템의 관측기 설계

이성렬, 신현석, 박민용
연세대학교 전기전자공학과

An Observer Design for MIMO Nonlinear Systems

Sungryul Lee, Hyunseok Shin and Mignon Park
Dept. of Electrical and Electronic Eng., Yonsei University

Abstract - 본 논문에서는 블록 삼각구조를 갖는 다변수 비선형 시스템의 상태 관측기의 설계 문제를 다룬다. 이를 위해 단일 입출력 삼각구조 시스템에 대한 기존의 설계 기법을 다변수 시스템으로 확장한다. 특히, 제안한 관측기의 이득은 시스템의 선형 부분뿐만 아니라 비선형성을 기반으로 설계되어지기 때문에 기존의 고이득 관측기에 비해 과도응답 특성을 개선한다. 또한 오차방정식에 대한 유사 변환을 이용하여 제안한 관측기가 전역 지수적 수렴성을 보임을 증명한다. 마지막으로, 시뮬레이션 예제를 통해 본 논문에서 제안한 설계 기법의 타당성을 입증한다.

1. 서 론

최근에 다변수 비선형 시스템에 대한 관측기 설계 문제가 여러 논문에서 많은 관심을 받아왔다. 다변수 비선형 관측기에 대한 연구는 크게 두 가지 방향으로 분류할 수 있다. 첫 번째 방향은 오차 선형화에 기반한 관측기 설계이다. 이것은 선형의 오차방정식을 가지는 비선형 관측기의 설계를 가능하게 한다. [1]에서는 다변수 시변 비선형 시스템을 관측기 표준형으로 변환할 수 있는 필요충분 조건이 제시되었다. 사실 [1]의 결과는 [2]의 연구를 다변수 시스템으로 확장한 것이다. 또한 논문 [3]에서는 다변수 비선형 시스템을 선형의 관측 가능한 형태로 변환하는 연구를 수행하였다. 기존의 연구가 듀얼 브루노프스키 형태로 변환될 수 있는 시스템만을 다룬 반면 이 논문에서는 이 형태를 포함한 일반적인 관측 가능한 형태를 다룸으로써 더 넓은 범위의 시스템에 적용 가능하다는 장점을 가진다. 그러나 이 방향으로의 대부분 연구들은 일반적으로 풀기 어려운 편미분 방정식의 해를 필요로 한다. 따라서, 실제 시스템에 응용을 어렵게 만든다. 다른 연구 방향은 삼각구조의 비선형 시스템에 응용 가능한 고이득 관측기이다. 단일 입출력 시스템의 경우 이런 구조적 특성이 지수적 수렴성을 보장하는 비선형 관측기 설계를 보장함이 널리 알려져 있다. 이런 사실로 인해 블록 삼각구조가 다변수 시스템에 대해 개발되었다. [5]에서는 블록 삼각구조를 갖는 비선형 시스템에 기존의 고이득 관측기를 확장하였다. 이는 블록 간의 상호 의존성을 허용한다는 점에서 장점을 가진다. 그러나 일반적으로 고이득 형태의 관측기는 과도 응답에서 큰 오버슈트를 보이고 출력 잡음에 민감한 단점을 가진다. 최근의 연구 [6]은 관측기의 설계에 비선형 항을 고려함으로써 이런 단점을 개선하는 연구를 수행하였다. 본 논문에서는 [6]의 결과를 다변수 시스템으로 확장하는 연구를 수행한다. 이를 위해 먼저 선형의 관측 가능한 부분과 삼각구조를 갖는 비선형 항으로 구성되는 다변수 비선형 시스템을 고려한다. 이런 부류의 시스템에 대해 [6]의 관측기의 상호연결로 볼 수 있는 비선형 상

태 관측기를 제안한다. 또한 오차 방정식에 대한 유사 변환을 다변수 시스템으로 확장하고 이를 이용하여 어떤 가정 하에서 제안된 관측기의 지수적 수렴성을 증명한다. 마지막으로 [5]에서 제시한 시뮬레이션 예제를 통하여 제안된 관측기가 [5]의 관측기의 성능을 개선하고 있음을 입증한다.

2. 다변수 비선형 시스템

본 논문에서는 다음과 같은 형태의 다변수 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$ 는 상태벡터, $u \in R^m$ 는 입력, $y \in R^p$ 은 출력 f 와 h 는 충분히 미분 가능한 벡터 필드이다. 특별히 (1)의 형태의 시스템 중에서 본 논문에서는 다음과 같은 블록 삼각구조를 갖는 특수한 형태의 시스템만을 다루도록 하겠다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + g_i(x_1, \dots, x_i, u, y_{i+1}, \dots, y_p) \\ \dot{y}_i &= C_i x_i \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $1 \leq i \leq p$ 이고 시스템 (2)는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]^T \in R^n \\ y &= [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]^T \in R^p \\ x_i &= [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in_i}]^T \in R^{n_i} \\ A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \\ g_i &= \begin{bmatrix} g_{i1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i1}, u, y_{i+1}, \dots, y_p) \\ g_{i2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i1}, x_{i2}, u, y_{i+1}, \dots, y_p) \\ \vdots \\ g_{in_i}(x_1, \dots, x_i, u, y_{i+1}, \dots, y_p) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

일반성을 잃지 않고 모든 n_i 는 같은 크기를 가진다고 가정한다. 시스템 (1)이 (2)로 변환될 수 있는 필요충분 조건은 [5]에서 주어졌다. 여러 연구에서 언급되었듯이 위의 블록 삼각구조는 단일 입출력 시스템의 고이득 관측기의 확장을 가능하게 한다. 관측기 설계를 위하여 다음과 같은 가정이 필요하다.

가정 1: x 에 대한 모든 g_i 의 편미분과 그것의 모든 시간 도함수는 모든 x 와 u 에 대하여 유계된다. 실제 응용의 측면에서 위의 가정은 다소 제한적인 가정으로 생각될 수 있다. 그러나 만약 시스템 (2)가 어떤 컴팩트 집합에서 유계 된다면 가정 1은 [5]에서와 같이 완화되어질 수 있다. 한편, 비교를 위하여 [5]에서 제안

된 관측기는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{x}_i = A_i \hat{x}_i + g_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i, u, y_{i+1}, \dots, y_p) + \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i (y_i - C_i \hat{x}_i), \quad 1 \leq i \leq p \quad (3)$$

여기서 $\Delta_{\theta_i} = \text{diag}(1/\theta_i, 1/\theta_i^2, \dots, 1/\theta_i^n)$ 이고 이득행렬 K_i 는 행렬 $A_i - K_i C_i$ 의 모든 고유값이 음의 실수부를 갖도록 결정된다. 나중에 위의 관측기는 제안된 관측기와 비교되어질 것이다.

3. 비선형 관측기 설계

이 장에서는 시스템 (2)에 대한 지수적 수렴성을 보장하는 관측기를 제안한다. 이를 위해 먼저 [6]에서 개발된 유사변환을 다변수 시스템으로 확장한다. 유사변환은 다음의 단계를 거쳐 유도할 수 있다.

단계1: 행렬 $\overline{M}_i(x, u)$ 를 다음처럼 정의한다.

$$\overline{M}_i(x, u) = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i F_i \\ \vdots \\ C_i F_i^{n_i-1} \end{bmatrix}$$

여기서 $F_i(x, u) = A_i + G_{ii}(x, u)$, $G_{ij} = \partial g_{ij} / \partial x_j$ 이다. 정의에 의하여 $\overline{M}_i(x, u)$ 는 삼각행렬이 되고 따라서 비특이 행렬이다.

단계2: 행렬 Q_i 를 다음처럼 놓는다.

$$Q_i = \overline{M}_i F_i \overline{M}_i^{-1} - A_i$$

단계3: 행렬 N_i 를 다음처럼 놓는다.

$$N_i = R_i Q_i^T R_i$$

여기서 행렬 R_i 와 B_i 는 다음처럼 정의된다.

$$R_i = [B_i \ A_i B_i \ \dots \ A_i^{n_i-1} B_i]$$

$$B_i = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$$

더욱이, 행렬 N_i 를 $N_i = L_i C_i$ 으로 분해할 수 있다.

L_i 는 어떤 $(n_i \times 1)$ 행렬을 나타낸다.

단계4: 행렬 $W_i(x, u)$ 를 다음처럼 정의한다.

$$W_i(x, u) = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i \overline{A}_i \\ \vdots \\ C_i \overline{A}_i^{n_i-1} \end{bmatrix}$$

여기서 $\overline{A}_i = A_i + N_i$ 이다. 위와 비슷하게 $W_i(x, u)$ 는 또한 삼각행렬이므로 비특이하다.

단계5: $M_i = W_i^{-1} \overline{M}_i$.

결과적으로 M_i 는 오차방정식에 대한 유사변환의 역할을 한다. 쉬운 계산을 통하여 다음과 같은 사실을 쉽게 보일 수 있다.

$$M_i F_i M_i^{-1} = A_i + L_i C_i$$

$$C_i M_i^{-1} = C_i$$

이제 시스템 (2)에 대하여 다음과 같은 관측기를 제안한다.

$$\hat{x}_i = A_i \hat{x}_i + g_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i, u, y_{i+1}, \dots, y_p) + M_i^{-1} [L_i + \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i] (y_i - C_i \hat{x}_i), \quad 1 \leq i \leq p \quad (4)$$

여기서 이득행렬 Δ_{θ_i} 와 K_i 는 관측기 (3)에서와 같이 결정된다. 위 관측기에 대한 안정도 증명을 위해 다음 보조정리가 필요하다.

보조정리 1: 시스템 (2)에 대하여 가정1이 성립한다고 하자. $1 \leq \theta_i$, $\theta_{i-1}^{n_i} \leq \theta_i$, $1 \leq i \leq p$ 를 만족하는 임의의 θ_i

에 대하여 다음식을 만족시키는 θ_j 와 θ_k 에 무관한 상수 $c_{jk} > 0$ 가 항상 존재한다.

$$\|\Delta_{\theta_j} M_j G_{jk} M_k^{-1} \Delta_{\theta_k}^{-1}\| \leq C_{jk}, \quad j > k, \quad 1 \leq j, k \leq p$$

증명: 먼저 $H = M_j G_{jk} M_k^{-1}$ 으로 놓는다. 그러면 간단한 계산을 통해 다음을 얻을 수 있다.

$$(\Delta_{\theta_j} H \Delta_{\theta_k}^{-1})_{l,m} = (H)_{l,m} \frac{\theta_k^m}{\theta_j^l}, \quad 1 \leq l, m \leq n_j = n_k$$

여기서 $(\cdot)_{l,m}$ 는 행렬 (\cdot) 의 (l, m) 의 성분을 나타낸다. 가정1을 고려하면 행렬 H 의 모든 성분은 유계이다. 또한 $1 \leq \theta_i$, $\theta_{i-1}^{n_i} \leq \theta_i$ 를 고려하면 위 보조정리의 결과를 쉽게 얻을 수 있다.

정리 1: 시스템 (2)에 대하여 가정1이 만족한다면 $1 \leq \theta_i$, $\theta_{i-1}^{n_i} \leq \theta_i$ 를 만족하는 임의의 $\theta_i > \theta_0$ 에 대하여 시스템 (4)가 지수적 수렴성을 보장하는 관측기가 되도록 하는 어떤 상수 $\theta_0 > 0$ 가 반드시 존재한다.

증명: 제안한 관측기 (4)의 첫 번째 서브시스템을 고려해 보자. $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ 으로 놓으면 다음 오차방정식을 얻는다.

$$\dot{e}_1 = A_1 e_1 + g_1(x_1, u, y_2, \dots, y_p) - g_1(\hat{x}_1, u, y_2, \dots, y_p) - M_1^{-1} (L_1 + \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1) C_1 e_1$$

평균값정리에 의해 다음을 만족시키는 벡터 η_1 이 존재한다.

$$\begin{aligned} & g_1(x_1, u, y_2, \dots, y_p) - g_1(\hat{x}_1, u, y_2, \dots, y_p) \\ &= G_{11}(\eta_1, u) e_1 \\ &= G_{11}(\hat{x}, u) e_1 + G_{11}(\eta_1, u) e_1 - G_{11}(\hat{x}, u) e_1 \\ &= G_{11}(\hat{x}, u) e_1 + R_{11} e_1 \end{aligned}$$

여기서 $R_{11} = G_{11}(\eta_1, u) - G_{11}(\hat{x}, u)$. 위 성질을 이용하면 오차방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{e}_1 = [F_1 - M_1^{-1} (L_1 + \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1) C_1] e_1 + R_{11} e_1$$

여기서 유사변환 $\overline{e}_1 = M_1 e_1$ 을 이용하면 위식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\overline{e}}_1 &= M_1 \dot{e}_1 + \dot{M}_1 e_1 \\ &= M_1 F_1 M_1^{-1} \overline{e}_1 - (L_1 + \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1) C_1 M_1^{-1} \overline{e}_1 \\ &\quad + M_1 R_{11} M_1^{-1} \overline{e}_1 + \dot{M}_1 M_1^{-1} \overline{e}_1 \\ &= (A_1 + L_1 C_1) \overline{e}_1 - (L_1 + \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1) C_1 \overline{e}_1 \\ &\quad + M_1 R_{11} M_1^{-1} \overline{e}_1 + \dot{M}_1 M_1^{-1} \overline{e}_1 \end{aligned}$$

다시 변환 $\tilde{e}_1 = \Delta_{\theta_1} \overline{e}_1$ 을 취하면 위 오차다이나믹스는 다음과 같다.

$$\dot{\tilde{e}}_1 = \theta_1 (A_1 - K_1 C_1) \tilde{e}_1 + \Delta_{\theta_1} M_1 R_{11} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \overline{e}_1 + \Delta_{\theta_1} \dot{M}_1 M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \overline{e}_1$$

$A_1 - K_1 C_1$ 는 안정행렬이므로 다음을 만족하는 양한정 대칭행렬 P_1 이 존재한다.

$$(A_1 - K_1 C_1)^T P_1 + P_1 (A_1 - K_1 C_1) = -I_{n_1}$$

여기서 I_{n_1} 는 $n_1 \times n_1$ 단위행렬이다.

여기서 관측기 (4)의 첫 번째 서브시스템에 대한 리아푸노프 후보함수를 다음과 같이 놓는다.

$$V_1(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_1^T P_1 \tilde{e}_1$$

그러면 V_1 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\tilde{e}_1) &= \tilde{e}_1^T P_1 \tilde{e}_1 + \tilde{e}_1^T P_1 \tilde{e}_1 \\ &= -\theta_1 \|\tilde{e}_1\|^2 + \tilde{e}_1^T P_1 \Delta_{\theta_1} M_1 R_{11} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \tilde{e}_1 \\ &\quad + \tilde{e}_1^T P_1 \Delta_{\theta_1} \tilde{M}_1 M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \tilde{e}_1 \\ &\leq -\theta_1 \|\tilde{e}_1\|^2 + \|P_1 \tilde{e}_1\| \|\Delta_{\theta_1} M_1 R_{11} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \|\tilde{e}_1\| \\ &\quad + \|P_1 \tilde{e}_1\| \|\Delta_{\theta_1} \tilde{M}_1 M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \|\tilde{e}_1\|\end{aligned}$$

가정 1과 $\theta_1 \geq 1$ 로부터 다음을 만족시키는 θ_1 에 무관한 상수 C_{01}, c_{11} 이 존재한다.

$$\|\Delta_{\theta_1} M_1 R_{11} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \leq c_{10}$$

$$\|\Delta_{\theta_1} \tilde{M}_1 M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \leq c_{11}$$

따라서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_1(\tilde{e}_1) = -\theta_1 \|\tilde{e}_1\|^2 + \mu_{11} \|\tilde{e}_1\|^2$$

여기서 $\mu_{11} = (c_{10} + c_{11})\lambda_M(P_1)$ 이고 $\lambda_M(P_1)$ 은 P_1 의 가장 큰 고유값을 나타낸다.

다음으로 두번째 서브시스템에 대해 고려해보자.

$e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ 로 놓으면 다음 오차방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= A_2 e_2 + g_2(x_1, x_2, u, y_3, \dots, y_p) - g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u, y_3, \dots, y_p) \\ &\quad - M_2^{-1}(L_2 + \Delta_{\theta_2}^{-1} K_2) C_2 e_2\end{aligned}$$

평균값정리에 의해 다음을 만족시키는 벡터 η_1 이 존재한다.

$$\begin{aligned}g_2(x_1, x_2, u, y_3, \dots, y_p) - g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u, y_3, \dots, y_p) \\ &= G_{21}(\eta_1, \eta_2, u) e_1 + G_{22}(\eta_1, \eta_2, u) e_2 \\ &= G_{22}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) e_2 + G_{22}(\eta_1, \eta_2, u) e_2 \\ &\quad - G_{22}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) e_2 + G_{21}(\eta_1, \eta_2, u) e_1 \\ &= G_{22}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) e_2 + R_{22} e_2 + G_{21}(\eta_1, \eta_2, u) e_1\end{aligned}$$

여기서 $R_{22} = G_{22}(\eta_1, \eta_2, u) - G_{22}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u)$. 위 성질을 이용하면 오차방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{e}_2 = [F_2 - M_2^{-1}(L_2 + \Delta_{\theta_2}^{-1} K_2) C_2] e_2 + R_{22} e_2 + G_{21} e_1$$

여기서 유사변환 $\tilde{e}_2 = \Delta_{\theta_2} M_2 e_2$ 을 이용하면 위식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{e}}_2 &= \theta_2 (A_2 - K_2 C_2) \tilde{e}_2 + \Delta_{\theta_2} M_2 R_{22} M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1} \tilde{e}_2 \\ &\quad + \Delta_{\theta_2} M_2 G_{21} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \tilde{e}_1 + \Delta_{\theta_2} \tilde{M}_2 M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1} \tilde{e}_2\end{aligned}$$

$A_2 - K_2 C_2$ 는 안정행렬이므로 다음을 만족하는 양한정 대칭행렬 P_2 이 존재한다.

$$(A_2 - K_2 C_2)^T P_2 + P_2 (A_2 - K_2 C_2) = -I_{n_2}$$

여기서 I_{n_2} 는 $n_2 \times n_2$ 단위행렬이다.

여기서 관측기 (4)의 첫 번째 서브시스템에 대한 리아푸노프 후보함수를 다음과 같이 놓는다.

$$V_2(\tilde{e}_2) = \tilde{e}_2^T P_2 \tilde{e}_2$$

그러면 V_2 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(\tilde{e}_2) &= \tilde{e}_2^T P_2 \dot{\tilde{e}}_2 + \tilde{e}_2^T P_2 \tilde{e}_2 \\ &= -\theta_2 \|\tilde{e}_2\|^2 + \tilde{e}_2^T P_2 \Delta_{\theta_2} M_2 R_{22} M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1} \tilde{e}_2 \\ &\quad + \tilde{e}_2^T P_2 \Delta_{\theta_2} \tilde{M}_2 M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1} \tilde{e}_2 + \tilde{e}_2^T P_2 \Delta_{\theta_2} M_2 G_{21} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \tilde{e}_1 \\ &\leq -\theta_2 \|\tilde{e}_2\|^2 + \|P_2 \tilde{e}_2\| \|\Delta_{\theta_2} M_2 R_{22} M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1}\| \|\tilde{e}_2\| \\ &\quad + \|P_2 \tilde{e}_2\| \|\Delta_{\theta_2} \tilde{M}_2 M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1}\| \|\tilde{e}_2\| + \|P_2 \tilde{e}_2\| \|\Delta_{\theta_2} M_2 G_{21} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \|\tilde{e}_1\|\end{aligned}$$

가정 1과 $\theta_2 \geq 1$ 로부터 다음을 만족시키는 θ_2 에 무관한 상수 C_{21}, c_{21} 이 존재한다.

$$\|\Delta_{\theta_2} M_2 R_{22} M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1}\| \leq c_{20}$$

$$\|\Delta_{\theta_2} \tilde{M}_2 M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1}\| \leq c_{21}$$

더욱이, 보조정리 1과 $1 \leq \theta_1^{n_1} \leq \theta_2$ 를 고려하면 다음을 만족하는 θ_1, θ_2 에 무관한 양의 상수 c_{22} 가 존재한다.

$$\|\Delta_{\theta_2} M_2 G_{21} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \leq c_{22}$$

따라서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_2(\tilde{e}_2) \leq -\theta_2 \|\tilde{e}_2\|^2 + \mu_{21} \|\tilde{e}_2\|^2 + \mu_{22} \|\tilde{e}_2\|^2 + \mu_{12} \|\tilde{e}_1\|^2$$

여기서 $\mu_{21} = (c_{20} + c_{21})\lambda_M(P_2)$, $\mu_{12} = \mu_{22} = \lambda(P_2)c_{22}/2$.

같은 식으로 i 번째 서브시스템에 대해 전개하면 다음을 얻는다.

$$\dot{V}_i(\tilde{e}_i) \leq -\theta_i \|\tilde{e}_i\|^2 + \sum_{j=1}^i \mu_{ij} \|\tilde{e}_j\|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ji} \|\tilde{e}_j\|^2$$

전체 관측기 (4)에 대하여 다음과 같은 리아푸노프 후보함수를 잡는다.

$$V(\tilde{e}) = \sum_{i=1}^p V_i(\tilde{e}_i)$$

여기서 $\tilde{e} = [\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p]^T$ 이다. 시간도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{e}) &\leq (-\theta_1 + \sum_{j=1}^1 \mu_{1j}) \|\tilde{e}_1\|^2 + (-\theta_2 + \sum_{j=1}^2 \mu_{2j}) \|\tilde{e}_2\|^2 \\ &\quad + \dots + (-\theta_p + \sum_{j=1}^p \mu_{pj}) \|\tilde{e}_p\|^2\end{aligned}$$

결과적으로 임의의 $M > 0$ 이 주어진다면 다음식을 만족하는 $\theta_i, 1 \leq i \leq p$ 가 반드시 존재한다.

$$\dot{V}(\tilde{e}) \leq -M \|\tilde{e}\|^2$$

이것은 정리 1의 결과를 증명한다.

4. 시뮬레이션 예제

제안한 관측기의 성능을 입증하기 위하여 다음과 같은 다변수 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 0.01x_1 u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + x_3 u \\ \dot{x}_3 &= x_4 + 0.01x_2 x_3 \exp(u) \\ \dot{x}_4 &= -x_3 + (1 - x_3^2)x_4 + u \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3\end{aligned}\quad (5)$$

[5]에서 지정한 것처럼 위 시스템 (5)는 $u = 2\sin 3t$ 일 때 모든 상태변수는 유계됨을 알 수 있다. 결과적으로 관심있는 영역 밖에서는 시스템 (5)의 비선형 함수를 유계된 함수로 대체함으로써 가정 1을 만족시킬 수 있다. 제안된 관측기는 다음처럼 표현된다.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_2 + 0.01 \hat{x}_1 u \\ -\hat{x}_1 + (1 - \hat{x}_1^2) \hat{x}_2 + y_2 u \\ \hat{x}_4 + 0.01 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \exp(u) \\ -\hat{x}_3 + (1 - \hat{x}_3^2) \hat{x}_4 + u \end{bmatrix} + M_1^{-1}(L_1 + \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1)(y_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + M_2^{-1}(L_2 + \Delta_{\theta_2}^{-1} K_2)(y_2 - \hat{x}_3)\end{aligned}$$

여기서 이득행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}M_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 + \hat{x}_1^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 + \hat{x}_3^2 & 1 \end{bmatrix} \\ L_1 &= \begin{bmatrix} 0.01u + 1 - \hat{x}_1^2 \\ -1 - 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 - 0.01u + 0.01 \hat{x}_1^2 u \end{bmatrix} \\ L_2 &= \begin{bmatrix} 0.01 \hat{x}_2 \exp(u) + 1 - \hat{x}_3^2 \\ -1 - 2\hat{x}_3 \hat{x}_4 - 0.01 \hat{x}_2 \exp(u) + 0.01 \hat{x}_2 \hat{x}_3^2 \exp(u) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

시뮬레이션은 $u = 2\sin 3t$ 일 때 다음 파라미터를 가지고 수행하였다.

$$\begin{aligned}k_{11} &= 2, K_{12} = 1, k_{21} = 2, k_{22} = 1, \theta_1 = 3, \theta_2 = 9 \\ x_1(0) &= 2, x_2(0) = 1, x_3(0) = 3, x_4(0) = 3.5 \\ \hat{x}_1(0) &= 0.5, \hat{x}_2(0) = 0, \hat{x}_3(0) = 0.5, \hat{x}_4(0) = 0.5\end{aligned}$$

그림 1-4는 제안된 관측기와 [5]의 관측기 (3)의 추정

오차를 보여준다. 실선은 제안한 관측기를 나타내고 점선은 관측기 (3)을 나타낸다. 설계변수들은 같은 값을 사용하였다. 그림에서 보듯이 제안한 관측기가 더 작은 오버슈트를 보임을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 MIMO비선형 시스템의 관측기 설계 문제가 다루어졌다. 이를 위해 [6]의 결과가 다변수 시스템으로 확장되었다. 또한 오차방정식에 대한 유사변환을 이용하여 제안한 관측기의 지수적 안정성을 증명하였다. 마지막으로 시뮬레이션 예제를 통해 본 논문의 결과의 타당성을 입증하였다.

(참 고 문 헌)

- [1] X.-H. Xia, W.-B. Gao, "Non-linear observer design by observer canonical forms", *Int. J. Contr.*, 47, pp. 1081-1100, 1988.
- [2] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers", *Systems & Control Letters*, 3, pp. 47-52, 1983.
- [3] M. Hou, A.C. Pugh, "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems", *Systems & Control Letters*, 37, pp. 1-9, 1999.
- [4] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems : Application to Bioreactors", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 37(6), pp. 875-880, 1992.
- [5] Hyungbo Shim, Young I. Son, Jin H. Seo, "Semi-global observer for multi-output nonlinear systems", *Systems & Control Letters*, 42, pp. 233-244, 2001.
- [6] K. Busawon and J. de Leon-Morales, "An observer design for uniformly observable nonlinear systems", *Int. J. Control*, 73(15), pp. 1375-1381, 2000.
- [7] K. Busawon and Mehrdad Saif, "A state observer for nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 44(11), pp. 2098-2103, 1999.

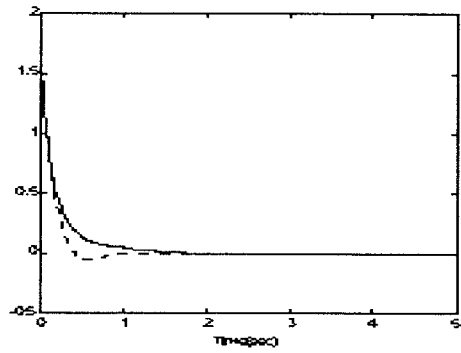


그림 1. 추정오차 e_1 의 비교

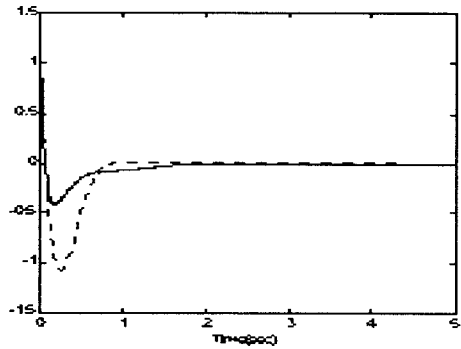


그림 2. 추정오차 e_2 의 비교

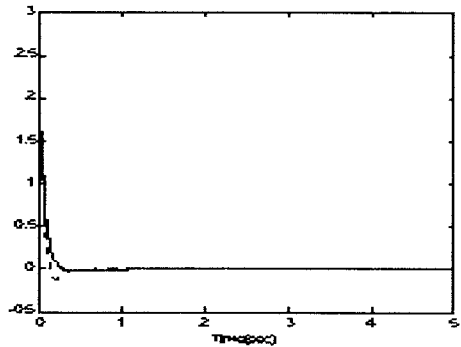


그림 3. 추정오차 e_3 의 비교

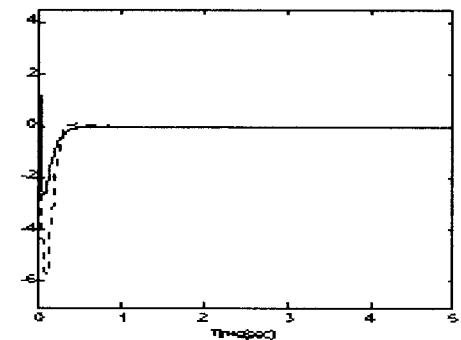


그림 4. 추정오차 e_4 의 비교