

단일 도립 진자의 스윙업 제어

김상철, 윤태웅
고려대학교 전기공학과

Swing-up Control of Single Inverted Pendulum

Sang-Chul Kim and Tae-Woong Yoon
Department of Electrical Engineering, Korea Univ

Abstract - 본 논문은 단일 도립 진자 계통(single pendulum systems)의 경우 계통의 에너지를 슬라이딩 평면을 구성하는데 이용한 슬라이딩 모드 제어를 설계하고 기존의 에너지 기반 제어 기법의 결과와 비교, 그 성능에서 우위에 있음을 보인다.

본 논문은 단일 도립 진자의 경우 슬라이딩 모드 제어 기법을 이용하여 그 설계의 이론적 근거를 제시하고 Åstrom의 단일 도립 진자에 대한 에너지 기반 제어 기법의 결과와 비교, 그 성능의 우월함을 보인다.

1 서 론

일반적으로 도립 진자는 이론의 실용성을 검증하기 위하여 간단한 계통의 제어 합성 문제(control synthesis problems)를 보이는데 자주 사용된다. 도립 진자는 안정한 평형점과 불안정한 평형점을 동시에 가지는 특성상, 입력을 가하지 않으면 항상 안정한 평형점을 향하려는 성질을 가지고 있다. 이러한 도립 진자의 위치 제어에 있어서 많은 경우 진자가 불안정한 평형점 근처에 있을 때 선형 모델로의 근사화를 통하여 제어를 설계하였으나 이론적으로 잘 설명할 수 없을 뿐만 아니라 실제의 경우 진자가 수평면(horizontal line) 아래에 위치하고 있을 때 불안정한 평형점으로 수렴하도록 만드는 스윙업(swing-up) 제어를 그 제어 목적으로 하는 경우에는 부적절하여 정상적으로 동작하지 않는다.

또한 도립 진자 계통의 제어 문제에 비선형 제어의 대표적인 기법인 선형화 기법(linearization method)의 적용을 고려할 때, 계통의 상대 차수(relative degree)가 상수가 아니므로 입출력 선형화(input-output linearization)가 불가능하고[1] 폐환 선형화(feedback linearization) 역시 불가능함을 Jakubczyk와 Respondek이 보였다[2].

도립 진자의 비선형 모델을 기반으로 하는 경우, 일반적으로 기계 계통에 나타나게 되는 계통의 패시브 성질(passivity)을 이용하여 계통의 에너지를 리아프노프 함수 선정하는 에너지 기반 제어 기법(energy-based control scheme)이 있다.

Åstrom[3]은 불안정한 평형점에서 계통의 에너지가 0이 된다는 사실에 착안, 단일 도립 진자(single pendulum)에서 에너지를 0으로 수렴하도록 만드는 제어를 설계하였고 Lozano[4]의 경우 이러한 Åstrom의 결과를 수레형 도립 진자(cart-type inverted pendulum)로 확장, 전체 계통의 에너지를 0으로 수렴토록 하고 진자가 불안정한 평형점 근처로 이동하면 균형 제어(balancing control)를 위하여 선형 제어기로 스위칭 하였다. Shiriaev[5]는 국부 안정도(local stability)만을 보장하던 Lozano의 결과를 전역적 안정도(global stability)를 갖는 결과로 확장하였다.

Kawashima[6]는 하나의 슬라이딩 모드 제어를 이용하여 수레형 도립 진자의 스윙업 제어와 균형 제어를 동시에 수행하였다. 그러나 그 이론적 타당성에 대한 수학적 근거를 갖지 못한다. Utkin[7]은 회전형 도립 진자(rotary inverted pendulum)의 진자와 회전 원판의 위치 제어를 위한 슬라이딩 모드 제어를 설계하였다.

2 본 론

2.1 단일 도립 진자 계통의 모델링

일반적으로 기계 계통은 그 비선형적 동특성에 의해 계통을 이루는 상태들 간에 복잡한 상호 작용이 일어나므로 계통의 운동 및 위치 에너지를 이용하여 오일러-라그랑지 운동 방정식(Euler-Lagrange's equations of motion)을 이용하여 그 수학적 모델을 얻는다[8].

Åstrom에 의해서 모델링된 단일 도립 진자의 수학적 모델은 다음과 같다.

$$J\ddot{\theta} - mg\ell\sin\theta + m\ell\cos\theta \cdot u = 0 \quad (1)$$

여기서 m 은 진자 추의 무게이고 J 는 진자의 회전 중심에 대한 관성 모멘트이며 l 은 진자의 회전중심에서 진자 추의 무게중심까지의 거리, g 는 중력가속도이다. 여기서는 일반성을 잃지 않고 모든 계수를 1로 한다.

2.2 단일 도립 진자의 스윙업 슬라이딩 모드 제어기 설계

슬라이딩 모드 제어기의 설계를 위해서는 원하는 제어 목표로의 점근적 안정도가 보장되는 슬라이딩 평면의 설계가 중요하다. 본 논문의 목적은 단순 도립 진자를 수평면 아래의 초기 위치에서 불안정한 평형점에서의 스윙업 및 목표점 부근에서의 균형 제어이며 이를 위해 슬라이딩 평면을 계통의 에너지를 이용하여 선정하고 그에 따른 슬라이딩 모드 제어를 설계한다.

2.2.1 스윙업을 위한 슬라이딩 평면 선정

도립 진자의 스윙업 제어를 위해서는 안정한 평형점에서 불안정한 평형점으로 접근하는 진자의 각도와 각속도의 관계로 슬라이딩 평면을 구성하여야 한다. 즉, 진자와 기준점과의 각도가 어떤 값이든 원점과 가까운 방향으로 회전하도록 각속도의 방향이 유지되어야 한다. 이러한 도립 진자의 스윙업을 위해서 다음과 같은 조건을 생각해 볼 수 있다.

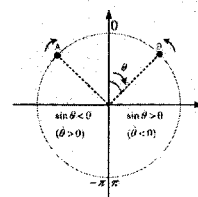


그림 1

그림 1에서 볼 때, 진자가 점 A에 있는 경우는 진자의 각속도가 양의 값을 가지며 회전하고 점 B에 있는 경우는 음의 값을 가지고 회전한다면 진자는 항상 원점으로 수렴할 수 있다. 이러한 관계는 원하는 제어 목표인 불안정한 평형점으로서의 수렴 시 진자 계통이 가지게 되는 전체 에너지가 0인 관계를 이용하여 구할 수 있다. 진자의 상태에 의한 계통의 에너지가 0인 경우는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + (\cos \theta - 1) = 0$$

$$\rightarrow \dot{\theta}^2 = 2(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

따라서 식 (2)의 관계를 만족하고 동시에 진자의 각도 θ 와 각속도 $\dot{\theta}$ 가 그림 1과 같은 부호 관계를 가지고 회전한다면 진자는 임의의 시간에 임의의 위치에 있더라도 항상 불안정한 평형점인 원점을 향하여 회전하여 올라갈 수 있다. 따라서 위의 식 (2)에서 정의된 진자의 각도와 각속도의 관계를 이용하여 진자의 스윙업 제어를 위한 슬라이딩 평면은

$$s = \dot{\theta} + \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \cdot \text{sgn}(\sin \theta) \quad (3)$$

로 정할 수 있다[6]. 식 (3)과 같이 설계된 슬라이딩 평면의 안정도는 다음의 정리에서 증명된다.

정리 1. 식 (1)로 표현되는 단일 도립 진자 계통에서 이러한 계통의 스윙업 제어를 위하여 슬라이딩 평면을 식(3)과 같이 정의하면 제어 입력을 슬라이딩 평면에 도달하여 유지될 수 있도록 인가하면 슬라이딩 평면에 도달한 이후 계통의 상태는 $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ 로 수렴한다.

증명 계통의 상태가 제어 입력에 의해 슬라이딩 평면에 도달한 이후 $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ 으로 수렴하는지를 보기 위해 다음과 같은 양정치 함수를 선정한다.

$$V = 1 - \cos \theta + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

슬라이딩 평면에 도달한 이후에는

$$s = \dot{\theta} + \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \cdot \text{sgn}(\sin \theta) = 0$$

의 관계가 만족된다. 따라서 식 (4)는

$$\frac{dV}{dt} = -2\sqrt{2(1 - \cos \theta)} \cdot |\sin \theta| \leq 0$$

과 같이 항상 0 또는 음의 값을 가진다. 함수 V 의 일차 미분이 0이 되는 상태는 $\theta = n\pi$, n : 정수인 경우이다. 이중 $n=2k-1$ (k : 정수)인 경우는 양정치 함수의 미분을 0으로 만들기는 하나 이때의 $\dot{\theta}$ 는 식 (2)의 관계에 의해서 0이 아닌 값을 갖게 되므로 불변 집합(invariant set)이 아니다. 따라서 $n=2k$ 인 경우 즉, $\theta=2k\pi$ 인 경우일 때만 \dot{V} 이 0이다.

또 이 때의 $\dot{\theta}$ 는 역시 식 (2)에 의해서 0이므로 라살레의 불변 집합 법칙(Lasalle's invariant set theorem)[10]에 의해서 계통의 상태는 슬라이딩 평면에 도달한 뒤에 불안정한 평형점으로 점근적 수렴을 한다고 볼 수 있다. □

2.2.2 슬라이딩 모드 제어기 설계

식 (3)과 같이 설계된 슬라이딩 평면에 수렴하는 슬라이딩 모드 제어기를 설계하기 위하여 식 (3)의 미분을 구하여 모델 식 (1)의 관계를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{\theta} + \frac{d}{dt} \left[2\sin \frac{\theta}{2} \right] \cdot \text{sgn} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \ddot{\theta} + \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \dot{\theta} \\ &= -\cos \theta \cdot u + \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \cdot s \end{aligned} \quad (5)$$

슬라이딩 평면에 따른 입력 u 는 s 가 양일 때, s 값이

음이고 s 가 음이면 s 값이 음이 되도록 설계한다[9].

즉, 이러한 제어 입력은

$$s \cdot \dot{s} = -\cos \theta \cdot s \cdot u + \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \cdot s^2 < 0 \quad (5-1)$$

의 조건을 만족하여야 하고 따라서 제어 입력을

$$u = k \left| \frac{s \cos(\theta/2)}{\cos \theta} \right| \text{sgn}(s \cos \theta) \quad \text{for } k > 1 \quad (6)$$

을 제안한다. 그러나 식 (6)과 같은 제어 입력은 $\cos \theta$ 가 0에 가까워질수록 무한히 커지는 문제가 있으므로 식 (6)을 다음과 같이 변형한다.

$$u = u^* \cdot \text{sgn}(s \cos \theta) \quad \text{for } k > 1$$

$$u^* = \min \left(a, k \left| \frac{s \cos(\theta/2)}{\cos \theta} \right| \right) \quad (7)$$

식 (7)과 같이 설계한 입력에 의해서 도달 조건을 만족하는 영역을 알아보기 위하여 식 (5-1)을 u^* 를 이용하여 정리해 보면

$$u^* > \left| \frac{s \cos(\theta/2)}{\cos \theta} \right| \quad (7)$$

와 같다. 따라서 도달 조건을 만족하는 범위는

$$|s| < a \cdot \left| \frac{\cos \theta}{\cos(\theta/2)} \right| \quad (8)$$

와 같이 정의할 수 있다.

또한 식 (7)에서 u^* 가 상수 a 가 되는 영역은

$$|s| > \frac{a}{k} \cdot \left| \frac{\cos \theta}{\cos(\theta/2)} \right| \quad (9)$$

로 정리된다.

위와 같은 영역과 식 (7)과 같은 제어 입력에 의해 생기는 상태 궤적을 도시하여 보면 그림 2와 같다.

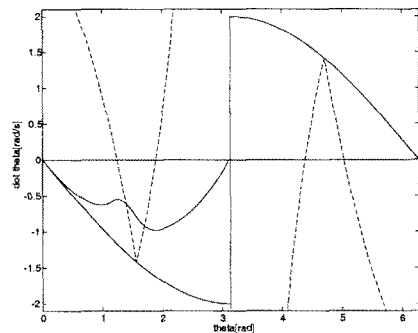


그림 2

그림 2는 안정한 평형점 부근에서 식 (7)과 같은 제어 입력을 인가할 때 계통의 상태 궤적을 그린 것이다. 곡선은 상태 궤적이고 실선은 슬라이딩 평면을 도시한 것이며 파선은 도달 조건을 만족하는 영역의 경계를 나타낸다. 여기서 $a=3$, $k=3$ 이다. 만일 이득을 작게 한다면 진자는 충분한 에너지를 얻지 못하여 한계 순환(limit cycle)에 빠지게 되고 이득을 크게 한다면 더 빠른 속도로 슬라이딩 평면에 도달할 것이다.

그러나 진자의 초기 위치가 그림 2에서 2사분면과 4사분면 즉, $\sin \theta \cdot \dot{\theta}$ 가 양의 값을 갖는 구간에 있다면 그림 1과 같은 스윙업 조건과 반대 방향으로 움직이므로 제어 입력을 상쇄시키는 힘이 작용한다. 또, 안정한 평형점이 초기 위치라면 슬라이딩 평면의 미분이 정의되지 않으므로 식 (6)과 같은 제어 입력이 수학적으로 성립되지 않는다. 따라서 다음과 같이 입력을 수정한다.

$$u = \begin{cases} a & , (\theta, \dot{\theta}) = (0, 0) \\ a \cdot \text{sgn}(\sin \theta) & , \sin \theta \cdot \dot{\theta} > 0 \\ \text{식 (7)} & , \sin \theta \cdot \dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (9)$$

2.3 모의 실험 및 타 제어기와 성능 비교

식 (9)와 같이 설계한 제어기를 단일 도립 진자 계통에 인가한 결과를 모의 실험을 통해 알아본다. 식 (1)에서 각 계수는 모두 1이고 식 (9)에서 α 는 2, β 는 1로 선정하며 초기치는 $(\theta, \dot{\theta}) = (3.5, -0.1)$ 로 선정한다.

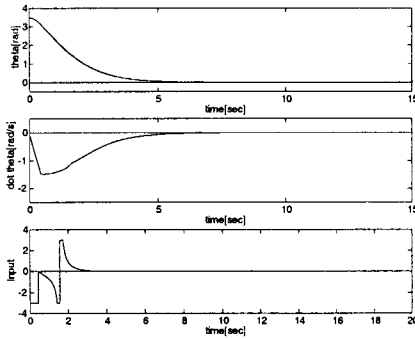


그림 3

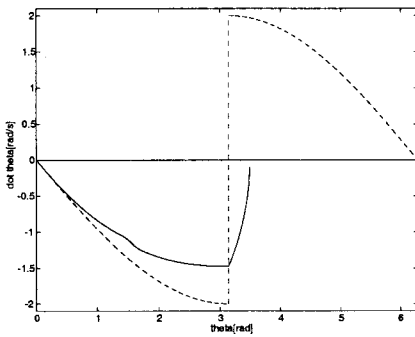


그림 4

그림 3에서 보는 바와 같이 진자의 각도와 각속도는 0으로 수렴함을 알 수 있다. 제어 입력은 슬라이딩 평면에 도달한 후 점차로 작아져 0에 가까워짐을 알 수 있다.

그림 4는 계통의 상태 궤적으로 진자의 각도와 각속도와의 관계를 나타낸다. 4사분면 ($\sin\theta < 0, \dot{\theta} < 0$)인 부분에서 출발한 상태 궤적은 점차로 점선으로 표시된 슬라이딩 평면에 가까워져서 불안정한 평형점으로 수렴함을 보여준다.

본 논문에서 다루는 식 (1)과 같은 단일 도립 진자에 대하여 Åstrom은 계통의 에너지를 리아프노프 함수로 선정하여 제어기를 다음과 같이 설계한다.

$$u = k \cdot (E - E_0) \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}, \quad k > 0 \quad (10)$$

식 (10)에서 E 는 계통의 총 에너지, E_0 는 계통의 초기 조건이 가지는 에너지이고 k 는 입력 이득이다.

본 논문의 제어기와 그 성능을 비교하기 위하여 입력 이득을 $k=3$ 으로 선정하고 나머지 조건을 동일하게 하여 모의 실험을 한다.

그림 5의 실험 결과처럼 점선으로 표시된 Åstrom의 결과는 대략 12초 정도에 불안정한 평형점으로 수렴하나 본 논문의 제어기는 약 5초 가량이 수렴한다. Åstrom은 최대한 빠른 수렴을 위하여 식 (10)을

$$u = k^* \cdot \text{sgn}(E - E_0) \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}, \quad k^* > 0 \quad (11)$$

와 같이 변형 가능하고 언급하였다. 식 (11)과 같은 제어 입력은 본 논문이 제안한 제어기와 그 성능에 있어서 거의 차이가 없었다. 그러나 불안정한 평형점에 수렴 후 임펄스와 같은 외란이 들어왔을 때 흔들리다가 다시 불안정한 평형점으로 수렴하는 결과를 비교하면 성능의 차

이가 있다.

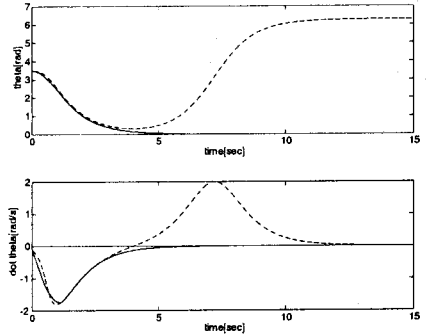


그림 5

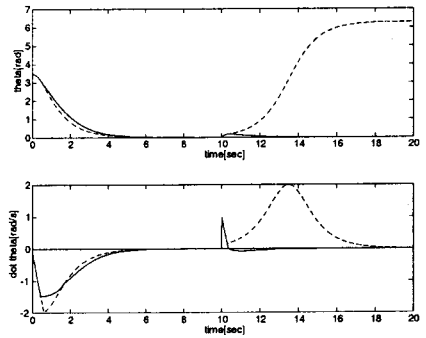


그림 6

그림 6은 시간 10초에 크기 100인 임펄스를 계통에 인가하였을 때, 식 (11)과 같이 표현되는 Åstrom의 제어기와 본 논문의 제어기의 결과를 비교한 것이다. 점선으로 표시되는 Åstrom의 결과는 인가된 외란에 의해 불안정한 평형점 쪽으로 한바퀴 회전하여 불안정한 평형점으로 대략 18초 가량이 수렴하였으나 본 논문의 제어기는 약간의 흔들림이 있는 후 다시 약 14초 정도에는 불안정한 평형점으로 수렴함을 알 수 있다.

3 결론

본 논문에서는 단일 도립 진자 계통에 대한 스윙업 제어기를 설계하고 모의 실험을 통하여 그 성능을 증명한다. 논문의 주요 목적은 대상으로 하는 계통에 대한 제어기 설계의 이론적 근거를 제시하고 기존의 결과와 비교하여 그 성능이 우수에 있음을 보이는 것이다.

본 논문에서는 스윙업 제어를 위한 제어기로 슬라이딩 모드 제어기를 사용한다.

슬라이딩 모드 제어 설계를 위한 슬라이딩 평면은 계통이 가지는 에너지를 이용하여 선정한다. 이러한 슬라이딩 평면은 제어 목적으로 하는 불안정한 평형점에서 계통의 에너지가 0이라는 점을 이용하여 진자가 항상 원점을 향하는 제어 입력을 인가할 수 있도록 구성된다.

설계된 제어기는 Åstrom이 단일 도립 진자의 스윙업 제어를 위하여 설계한 에너지 기반 제어기와 비교해 같은 입력의 상한에 대해 이용하여 진자가 항상 원점을 향하는 제어 입력을 인가할 수 있도록 구성된다. 또한 설계된 제어기는 그 형태가 비교적 간단하고 계통의 파라미터와 독립적이므로 불확실한 파라미터에 큰 영향을 받지 않는다는 장점을 가진다.

앞으로 일반적인 슬라이딩 모드 제어기가 가지는 불확실성에 대한 강인성을 이용하여 향후 설계된 제어기의 비선형적 불확실성에 대한 강인성의 수학적 고찰도 가능하리라 생각한다.

[참 고 문 헌]

- [1] Marino, R., & Tomei, P. "Nonlinear control design - geometric, adaptive and robust." University of Rome. 1995.
- [2] Jakubczyk, B., Respondek, W. "On the linearization of control systems." Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 28, pp. 517-522. 1980.
- [3] Astrom, K. J., Furuta, K. "Swing up a pendulum by energy control." *Automatica*, Vol. 36, Issue 2, pp. 287-295. 2000.
- [4] Lozano, R., Fantoni, I., & Block, D. J. "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit." *Systems & Control Letters*, Vol. 40, Issue 3, pp. 197-204. 2000.
- [5] Shiriaev, A., Pogromsky, A. Ludvigsen, H., & Ekeland, O. "On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum." *Int. J. Robust & Nonlinear control*, Vol. 10, pp. 283-300. 2000.
- [6] Kawashima, T. "Swing up and stabilization of inverted pendulum using only one sliding mode controller with nonlinear model observer." *MOVIC'98*, pp.97-102. 1998.
- [7] Utkin, Vadim., Guldner, J., & Shi, J. "Sliding mode control in electromechanical systems. Tatlor & Francis, Inc. 1999.
- [8] Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J., & Sira-Ramirez, H. "Passivity-based control of euler-lagrange systems." Springer. 1998.
- [9] Decarlo, R. A., Zak, S. H. and Matthews, G. P. "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial." *Proceedings of the IEE E*, Vol. 76, No.3. 1988.
- [10] Slotine, J. E., & Li, W. "Applied nonlinear control." Prentice-Hall International, Inc. 1991.