

## Nyquist 선도에 의한 개선된 모델 축소 알고리즘

조 준호\*, 최 정내, 황형수  
원광대학교 제어계측 공학과

## Improved Model Reduction Algorithm by Nyquist Curve

Joon-Ho Cho\*, Jung-Nae Choi, Hyung-Soo Hwang,  
Department of control and instrumentation Engineering, Wonkwang Univ.

**Abstract** - To improve the performance of PID controller of high order systems by model reduction, we proposed a new model reduction method in frequency domain. A new model reduction method we proposed, considered four points ( $\angle G(j\omega) = 0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2$ ) in stead of two points ( $\angle G(j\omega) = -\pi/2, \text{ and } -\pi$ ) in Nyquist curve. And for high order systems that it have not two point ( $\angle G(j\omega) = -\pi/2, \text{ and } -\pi$ ) in Nyquist curve, we proposed a method to annex very small dead time. This method has a annexed very small dead time on the base model for reduction, and we cancel it after to get the reduced model. It is shown that at the performance of proposed method is better than any other methods.

## 1. 서 론

PID(Proportional and Integral and Derivative) 제어기는 이해하기 쉽고 구조가 간단하며 실제 구현이 용이하여 공정 산업분야에서 널리 사용되고 있는 제어기이다. [1],[2],[3][4]. PID 제어기를 설계할 때 가장 중요한 것은 파라미터를 결정하는 것이다. 따라서 PID 제어기의 파라미터를 결정하는 방법에 대하여 많은 연구가 이루어지고 있다[5]. 그 중에서 Ziegler-Nichols Rule, Cohen-Coon Method, IAE, ISE, ITAE, IMC 방법들이 보편적으로 쓰이고 있다. 그러나 이러한 방법들 대부분은 1차 및 2차의 모델에 대해서는 적용이 용이하나, 고차 모델에 대해서는 적용하기가 쉽지 않다. 따라서 보다 일반적이고 범용성을 갖는 동조법에 대하여 연구가 이루어지고 있다.[6][7]. 그 중 한가지 방법이 고차 모델을 저차 모델로 축소하여 축소모델의 동조값을 실제의 모델에 적용하는 방법이 연구되어지고 있다. 그 중 대표적인 시간 영역에서 모델 축소방법으로는 Pade 근사화 방법, Routh stability 근사화 방법[9] 등이 있고, 주파수 영역에서의 방법으로는 Wang의 Nyquist 선도에 의한 근사화 방법이 있다. 그 중에서 Wang 이 제안한 근사화 방법은 Nyquist선도에서  $-\pi/2, -\pi$  지점을 같게 하는 방법으로 고차 모델을 지연시간항을 갖는 2차 모델로 축소하는 방법이다. 이 근사화 방법은 실제 고차 모델의 Nyquist 선도에서  $-\pi/2, -\pi$  지점 같게 하여 모델을 축소하는 방법이다. 하지만 이 방법은 Nyquist 선도의  $-\pi/2, -\pi$  지점만을 같게 했기 때문에 다른 부분에서는 실제의 모델과 축소 모델 사이에서 주파수 영역 및 시간 영역에서 오차가 발생하며,  $-\pi/2, -\pi$  지점을 지나지 않는 공정에 대해서는 적용할 수 없는 단점이 있다. 본 논문은 주파수 영역 및 시간영역에서 발생하는 오차를 줄이기 위하여 Wang의 방법에서 제안했던 방법에 두 점을 더 고려하여 즉,  $0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2$  4점을 고려하여 2차의 지연시간항을 갖는 축소모델을 구하는 방법과 실제 공정이  $-\pi/2, -\pi$  지

점을 지나지 않는 경우에는 실제 공정에 미소한 지연요소를 첨가하여 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하게 한 뒤, 지연요소가 첨가된 축소 모델을 제안한 알고리즘을 통하여 찾고, 그 후 축소 모델에서 첨가된 미소한 지연요소를 제거하여 실제 공정의 축소모델을 구하는 알고리즘을 제안하였다.

본 논문의 구성은 주파수 영역에서의 제안된 모델 축소 방법, 시뮬레이션 및 고찰, 결론으로 구성되어 있다.

## 2. 본 론

## 2.1 주파수 영역에서 모델 축소 방법.

Wang이 제안한 모델 축소 방법은 Nyquist 선도에서 두 점 ( $-\pi/2, -\pi$ )을 고려하여 나머지 부분에서는 실제의 공정과 축소 모델 사이에서 주파수 영역 및 시간 영역에서 오차가 발생한다. 본 논문은 첫째, Nyquist 선도의 4점 ( $0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2$ )을 고려하여 2차의 지연 시간을 갖는 공정으로 모델을 축소하는 방법과 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하지 않을 경우에는 미소한 지연시간을 첨가해서 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하게 한 뒤 제안한 방법으로 모델을 구하는 방법을 제시한다.

## 2.1.1 실제 공정이 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하는 경우

미지의 공정에 대한 주파수 응답  $G(j\omega)$ 으로부터 식 2차 시연모델로 모델링 할 수 있다.

축소 모델은 2차의 지연항을 포함하므로 실근 또는 허근을 가지므로 진동하는 공정의 동특성을 표현할 수 있다.

본 논문에서는 기존의 방법에서 오는 오차를 줄이기 위해서 Nyquist 선도의  $0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2$  4점을 고려하여 2차의 지연시간항을 갖는 축소모델을 구하는 방법을 제안하였다. 그 결과 기존의 방법보다 오차가 줄어들음을 확인 할 수 있었다. 제안된 알고리즘은 크게 3단계로 나누어지며, 각 단계별 설명은 아래와 같다.

단계1) 수학적 계산을 통해 축소모델의 파라미터 값 ( $a, b, c, L$ )을 초기 값으로 사용.

• 실제의 고차 모델

$$G(s) = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} s + \beta_m}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (1)$$

• 2차의 지연시간항을 갖는 축소모델

$$\overline{G}(s) = \frac{e^{-Ls}}{as^2 + bs + c} \quad (2)$$

여기서 결정해야할 것은 a,b,c, L 의 값이고, 결정하는 방법은  $\angle G(j\omega_0) = 0, \angle G(j\omega_b) = -\frac{\pi}{2}, \angle G(j\omega_c) = -\pi$ .

$\angle G(j\omega_d) = -\frac{3\pi}{2}$  인 주파수  $w_a, w_b, w_c, w_d$ 에서 원래의 고차모델과 축소모델의 주파수 응답이 일치하도록 함으로써 미지수를 결정할 수 있다.

식 (2)의 지연시간  $e^{-sL}$ 을 Pade 근사식 사용하여 식 (3)과 같이 나타내었다.

$$\widehat{G}(s) = \frac{2 - Ls}{Las^3 + (2a + bL)s^2 + (2b + Lc)s + 2c} \quad (3)$$

다음과 같은 조건으로  $G(j\omega_a) = \widehat{G}(j\omega_a)$ ,  $G(j\omega_b) = \widehat{G}(j\omega_b)$ ,  $G(j\omega_c) = \widehat{G}(j\omega_c)$ ,  $G(j\omega_d) = \widehat{G}(j\omega_d)$  다음 식을 유도할 수 있다.

$$2c - (2a + bL)w_a^2 + jw_a(2b + Lc - Lw_a^2) = \frac{2 - jLw_a}{|G(j\omega_a)|} \quad (4)$$

$$2c - (2a + bL)w_b^2 + jw_b(2b + Lc - Lw_b^2) = \frac{2 - jLw_b}{-j|G(j\omega_b)|} \quad (5)$$

$$2c - (2a + bL)w_c^2 + jw_c(2b + Lc - Lw_c^2) = \frac{2 - jLw_c}{-j|G(j\omega_c)|} \quad (6)$$

$$2c - (2a + bL)w_d^2 + jw_d(2b + Lc - Lw_d^2) = \frac{2 - jLw_d}{j|G(j\omega_d)|} \quad (7)$$

식 (5)와 식(6)과의 관계에서 식 (8)를 구할 수 있다.

$$(2a + Lb)(w_c^2 - w_b^2) = \frac{Lw_b}{|G(j\omega_b)|} + \frac{2}{|G(j\omega_c)|} \quad (8)$$

식 (5)과 식(7) 관계에서 식 (9)를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{L}(2a + Lb)(w_d^2 - w_b^2) = \frac{Lw_b}{|G(j\omega_b)|} + \frac{Lw_d}{|G(j\omega_d)|} \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)의 관계에서 식(2)의 미지값 L을 구하면 식 (10)와 같다.

$$L = \frac{(w_d^2 - w_b^2)|G(j\omega_c)|}{2(w_c^2 - w_b^2)} x_1 - \frac{w_d|G(j\omega_c)|}{2|G(j\omega_b)|} \quad (10)$$

여기서  $x_1, x_2$ 는 아래와 같다.

$$x_1 = \frac{w_b}{|G(j\omega_b)|} + \frac{w_a}{|G(j\omega_a)|}, \quad x_2 = \frac{Lw_b}{|G(j\omega_b)|} + \frac{2}{|G(j\omega_c)|}$$

식 (8)을 (6)에 대입하여 정리하면 c 값을 구할 수 있다.

$$c = \frac{(x_2 w_c^2)}{2(w_c^2 - w_b^2)} - \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \quad (11)$$

식 (6)과 식(8)의 관계에서 아래와 같이 a 값을 구할 수 있다.

$$a = \frac{1}{4 + L^2 w_c^2} \left( \frac{2x_2}{(w_c^2 - w_b^2)} - \frac{L^2}{|G(j\omega_c)|} + L^2 c \right) \quad (12)$$

마지막으로 b의 값은 식 (8)에서 구할 수 있다.

$$b = \frac{1}{L} \left( \frac{x_2}{(w_c^2 - w_b^2)} - 2a \right) \quad (13)$$

이렇게 구해진 파라미터 값들은 지연시간 ( $e^{-sL}$ )을 pade 근사식을 통하여 구했기 때문에 실제의 값과 오차가 발생한다. 따라서 이렇게 구한값은 초기치로 활용한다.

#### 단계2) 최적의 c값 결정

$\angle G(0)$ 일 때의 크기와  $\angle \widehat{G}(0)$  일 때의 크기가 같게 되는 것은 오직 c값에 의해 결정된다. 즉, 단계1)에서 구한 a, b, L 값을 고정하고, c값만을 변화해 가면 최적의 c값을 알고리즘을 통해 찾는다.

#### 단계3) 최적의 a, b, L 값 결정

L값은 지연시간에 포함된 값이다. 그러므로 L값에 따라 Nyquist 선도의  $\angle G(\pi/2)$ 와  $\angle \widehat{G}(\pi/2)$ 일 때의 크기가 같게되는 L값에 의해 결정될 수 있다. 나머지 두 개의 값 a, b는 각 각 Nyquist 선도의  $-\pi, -\pi/2$  지점의 크기를 각 각 결정 할 수 있다. 따라서  $-\pi/2, -\pi, -3\pi/2$  3점에서 각각  $\angle G(j\omega)$ 일 때의 크기와  $\angle \widehat{G}(j\omega)$ 일 때의 크기를 비교해서 가장 큰 차이가 나는 것의 값을 변경하면서 이 세 개의 오차의 합이 정해진 오차범위

안으로 들어오게 하는 알고리즘을 통해 최적의 a, b, L 값을 찾는다. 지금까지 설명한 것을 알고리즘으로 나타내면 그림1과 같다.

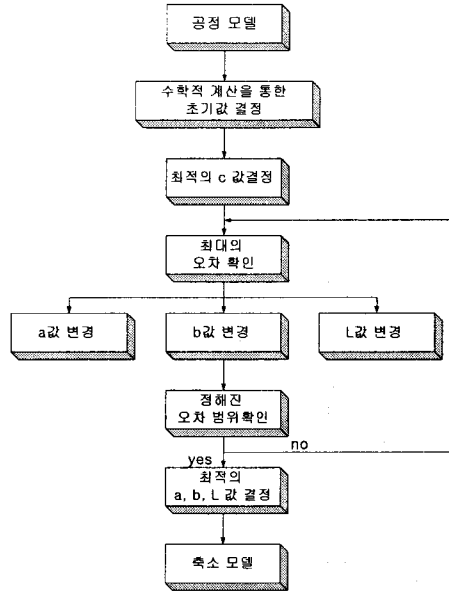


그림 1. 제안된 알고리즘

### 2.2.1 실제 공정이 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하지 않는 경우

지금까지 제시된 방법들 중 가장 우수한 방법으로 평가되는 Wang의 방법[8]과 제안된 모델 축소 방법을 적용하기 위해서는 Nyquist 선도가 주파수 전 영역에 있을 때 가능하나 그렇지 않은 경우에는 적용할 수 없다. 본 논문에서는 위와 같은 문제점을 해결하기 위해서 Nyquist 선도가 주파수 전 영역을 통과하지 않을 경우 Nyquist 선도에서 지연시간의 특성인 회전을 이용하여 실제 모델에 Nyquist선도가 주파수 전 영역을 통과할 수 있는 미소한 지연요소를 첨가하여 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하게 한 뒤, 제안된 알고리즘을 통하여 지연 요소가 첨가된 축소 모델을 찾고, 지연 요소가 포함된 모델에서 첨가된 지연요소를 제거하여 실제의 모델의 축소 모델을 찾는 방법을 제안한다.

Nyquist 선도가  $0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2$  4점을 모두 통과하지 않는 실제의 모델이 식 (1)과 같다. 식 (1)에 Nyquist선도가 주파수 전 영역을 통과 할 수 있게 미소한 지연요소를 첨가한 모델이 식 (14)와 같다.

$$G(s) = \frac{(\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} s + \beta_m)(e^{-\rho s})}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (14)$$

여기서,  $e^{-\rho s}$ 는 첨가된 미소한 지연요소이다.

실제의 모델에 지연요소를 첨가하여 구한 2차의 지연시간을 갖는 축소모델은 식 (15)와 같다.

$$\widehat{G}(s) = \frac{e^{-(L+\rho)s}}{as^2 + bs + c} \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)를 앞 절에서 제시한 축소 모델을 구하는 방법으로 단계 1에서 단계 3까지를 통해 지연요소가 첨가된 축소 모델을 찾는다. 이렇게 구한 축소모델에서 첨가된 지연요소를 제거하면 실제의 모델의 축소 모델 식 (2)와 같이 된다. 그림 2는 제안된 모델 축소 알고리즘 II 을 나타낸 것이다.

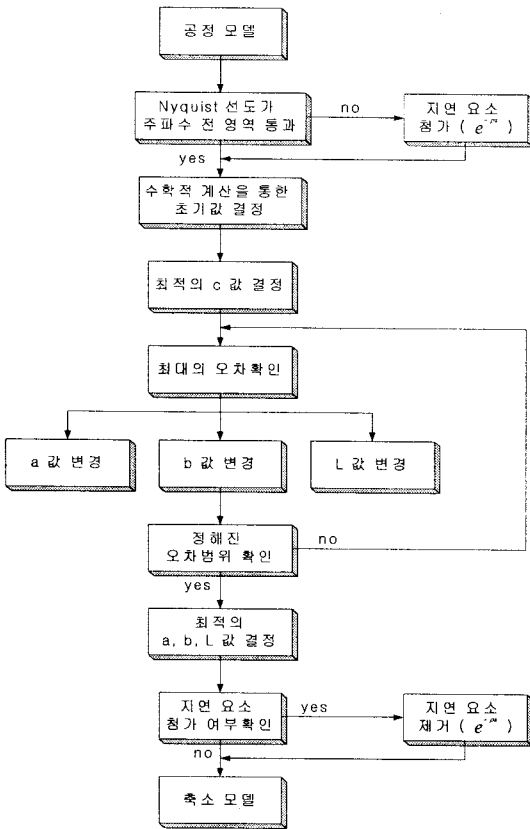


그림 2 제안된 알고리즘 II

### 3. 시뮬레이션 및 고찰

시뮬레이션을 통해 모델 축소 방법에 있어 기존의 방법과 제안된 알고리즘을 통한 축소 방법을 그래프를 통해 비교, 분석하였다.

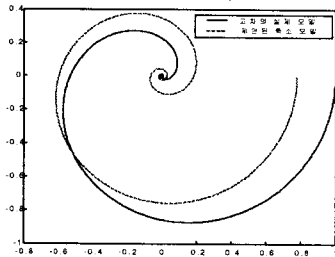
Example 1) 축소 모델의 단계도.

- 실제의 고차 모델

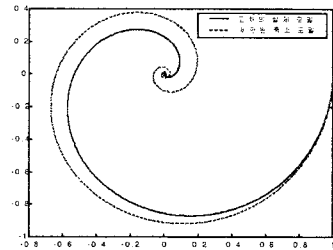
$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{(s+1)(s+5)^2}$$

- 2차의 시간지연항을 갖는 축소모델

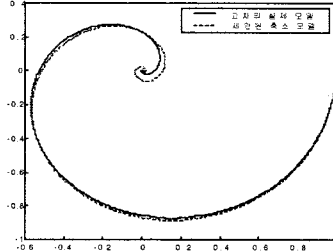
$$\hat{G}(s) = \frac{e^{-0.6072s}}{6.8622s^2 + 32.1506s + 25.0632}$$



a) 1단계



b) 2단계



c) 3단계

그림 3  $G(s) = e^{-0.5s}/(s+1)(s+5)^2$ 에 대한 축소 단계도

Example 2) Wang의 모델과 비교

- 실제의 고차 모델

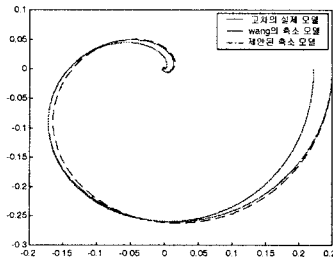
$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(s^2 + s + 1)(s + 2)^2}$$

- 제안된 방법에 의한 축소 모델

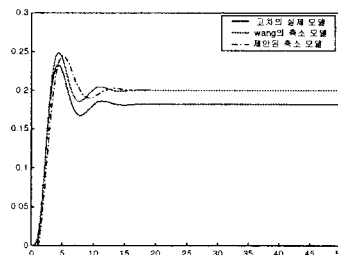
$$\hat{G}(s) = \frac{e^{-0.9836s}}{6.7159s^2 + 5.9684s + 4.01}$$

- Wang의 방법에 의한 축소 모델

$$\hat{G}_w(s) = \frac{e^{-0.837s}}{5.648s^2 + 4.950s + 4.497}$$



a) Nyquist 응답 비교



b) 시간응답 비교

그림4. 주파수 영역 및 시간영역에서 비교

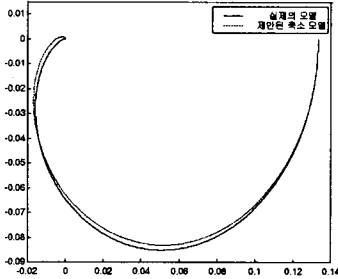
Example 3) 주파수 전 영역을 통과하지 않는 경우

- 실제의 고차 모델

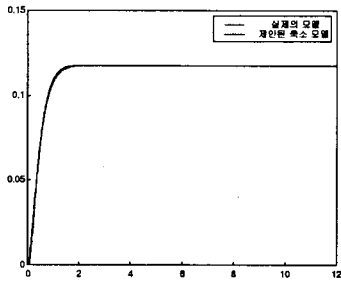
$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+5)(0.5s+1)}$$

- 첨가된 지연 시간 :  $e^{-0.1s}$
- 2차의 시간지연항을 갖는 축소모델

$$\tilde{G}(s) = \frac{e^{-0.0186s}}{0.3769s^2 + 3.9030s + 7.500}$$



a) Nyquist 응답 비교



b) 시간응답 비교

그림5. 주파수 영역 및 시간영역에서 비교

그림3은 제한된 방법에 의한 축소 모델의 단계도를 나타낸 것이고, 그림에서 보면 실제의 모델과 축소 모델이 근접하게 축소됨을 확인 할수 있었고, 그림 4에서는 Wang의 방법과 제안된 방법을 서로 비교한 것으로서, 제안된 방법이 시간영역 및 주파수 영역에서 Wang의 방법보다 오차가 적음을 볼 수 있고, 그림5는 지연항을 포함하지 않는 모델로서 기존의 방법으로는 축소 모델을 구할 수 없으나 미소 지연항을 포함하는 제안한 방법에 의해서 축소 모델을 구하였고, 그 특성이 우수함을 보였다.

#### 4. 결 론

기존의 PID 동조 방법은 대부분 1차 및 2차의 모델에 대해서는 적용이 용이하나, 고차 모델로 축소하는 방법이 많이 연구되어지고 있다. 본 논문은 고차의 실제 모델과 축소 모델의 오차를 줄이기 위해서 Nyquist 선도의 4점 ( $0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2$ )을 용하여 축소 모델을 구하는 알고리즘을 제안하였고, 또한 실제의 모델이 Nyquist 선도의 전 영역을 통과하지 않을 경우에 대해서는 미소한 지연요소를 첨가하여 2차의 지연시간을 갖는 축소 모델을 구하는 방법을 제안하였다. 시뮬레이션 결과

기존의 방법보다 제한된 방법이 우수함을 확인하였다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] K.J.Astrom and T.Hagglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins", Automatica, vol. 20, no. 5, pp. 645-651,1984.
- [2] W.K.Ho, C.C.Hang, W.Wojsznis, and Q.H.Tao, "Frequency domain approach to self-tuning PIDcontrol", contr.Eng. Practice, vol. 4, no.6, pp.807-813, 1996
- [3] W.K.Ho, O.P.Gan, E.B.Tay, and E.L.Ang, "Performance and gain and phase margins of well-known PID tuning formulas", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, pp. 473-477, 1996
- [4] M.Zhuang and D.P.Atherton, "Automatic tuning of optimum PID controllers", Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 140, pt. D, no. 3, pp. 216-224, May 1993.
- [5] K.J.Astrom, "Automatic tuning of PID regulators", Instrument Soc. Amer., 1998
- [6] W.K.Ho, C.C.Hang, and L.S.Cao, "Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications", Automatica, vol. 31, no. 3, pp. 497-502, 1995.
- [7] K.Y.Kong, S.C.Goh, C.Y.Ng, H.K.Loo, K.L.Ng, W.L.Cheong, and S.E.Ng, "Feasibility report on frequency domain adaptive controller", Dept. Elect. Eng., Nat. Univ. Singapore, Internal Rep., 1995.
- [8] Q.G.Wang, T.H.Lee, H.W.Fung, Q.Bi and Y. Zhang, "PID tuning for Improved performance", IEEE Trans. Contro. Syst. Technol., vol. 7, no.4, pp. 457-465, July 1999.
- [9] Y.Shamash, "Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade approximation technique", Int. J. Control, vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1975