맘다니형 퍼지 시스템의 안정 해석

이창훈, 수게노 미치오*
한국과학기술연구원 휴먼로봇연구센터
*이화학연구소 뇌과학종합연구센터 언어지능시스템연구팀

A Stability Analysis of Mamdani Type Fuzzy Systems

Chang-Hoon Lee and Michio Sugeno*
Advanced RoboticsResearch Center, KIST
*Lab. for Language-Based Intelligent Systems, Brain Science Institute, RIKEN

Abstract - This paper is concerned with a stability analysis of Madani Type fuzzy systems. It introduces the canonical form of an unforced fuzzy system and its stability theorem suggested in the previous study. Then it gives new simplified stability conditions based on the Lyapunov function method. A common positive definite matrix in the stability conditions is searched by the LMI method.

1. 서론

퍼지 제어는 언어를 바탕으로 한 정성적 표현을 쉽게 다룰 수 있기 때문에, 다목적 타스크 지향의 제어를 가능하게 하고, 지능화 제어를 할 수 있다는 점에서 획기적 있었지만, 안정 해석과 같은 이론적 기반을 확립하지 못해 수학 모델을 바탕으로 한 설계에 있어 많은 어려움이 있었다. 이러한 문제에 대해 최근 모델에 기반을 둔 제어 방식이 연구자들의 관심을 받고 있으며, 특히 TSK 퍼지 시스템을 모델로 한 안정 해석과 모델 기반 제어에 관한 연구[3]가 활발히 진행되고 있다. 이들 안정 해석의 주된 아이디어는 시스템의 퍼지니스를 선형 시스템이 지닌 불확실함으로 보고, 로버스트 제어 이론의 틀 속에 넣어 해석하는 것이다. 그리고, 맘다니형 퍼지 시스템에 대한 안정 해석과 퍼지 모델 기반 제어에 관한 연구는 거의 없다. 대신에 선형 시스템에 퍼지 제어기를 가해 비선형 시스템, Lur'e 시스템으로 생각하고, 전통적인 비선형 제어 이론 속에 집어넣은 유형의 연구 [1]가 주류이다. 이와 같이 퍼지 제어 문제를 기존의 비선형 또는 로버스트 제어 이론의 틀 속에 넣어 해석하는 방법은 퍼지 시스템의 안정 문제를 다루기 쉽게할 지는 모르지만, 이러한 방법만으로는 중요한 퍼지 시스템의 특성을 잃어버려 그 특성을 충분히 살릴 수 없다.

그러나, 최근 저자 들에 의해 싱글톤 후반부를 갖는 퍼지 시스템에 대한 표준형의 제시와 안정 해석의 연구[2]가 진행되고 있다. 이 연구는 본 연구 및 앞으로의 퍼지 시스템의 안정에 관한 연구의 토대가 되리라 생각된다. 제시된 안정 조건은 영역별 리아프노프 함수 접근법에 따른 것으로 일부 영역을 제외한 영역에서의 조건은 충분조건이었고, 적절한 리아프노프 함수를 체계적으로 찾는 것이 문제로 남아 있었다.

그래서, 본 논문에서는 필요충분 조건인 새로운 안정조건을 유도하고, 공통 리아프노프 함수를 찾는 문제를 도출된 안정 조건에 스칼라 변수와 Schur complement를 적용하여 변환하면 선형행렬부등식(LMI)의 가해 문제로 귀착시킬 수 있음을 보인다. 종래의 비선형 시스템의 안정 판별법이나 로버스트 안정 해석법으로는 안정성을 판별하지 못하는 예를 통해 유도한 안정 조건을 검증한다.

2. 퍼지 시스템의 표준형

기본형인 맘다니형 시스템은 대부분 다음과 같은 후반부가 싱글톤인 퍼지 시스템으로 표현이 가능하므로 앞으로 이를 대상으로 논의하기로 한다. 그리고, 설명을 간단히 하기 위해 2차 시스템을 다루기로 한다.

-퍼지 규칙으로 표현된 시스템

$$if\ \boldsymbol{x}\ is\ W^{\sigma\tau}(\boldsymbol{x}),\ then\ \dot{\boldsymbol{x}}\ is\ \boldsymbol{f}(\sigma,\tau). \tag{1}$$

여기서, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \Re^2$는 상태 벡터, $W^{\sigma\tau}(\boldsymbol{x}) = (W_1^{\sigma}(x_1),\ W_2^{\tau}(x_2))^T \in \Re^2$ 는 멤버쉽 벡터, $\boldsymbol{f}(\sigma,\tau) = (f_1(\sigma,\tau),\ f_2(\sigma,\tau))^T \in \Re^2$ 는 싱글톤 벡터, $-\infty < \sigma, \tau < \infty$ 는 정수, 그리고, W_1^{σ}과 W_2^{τ}는 아래와 같이 정의되는 정규 삼각형 멤버쉽 함수라 가정한다.

$$W_i^{\lambda_i} = \begin{cases} \dfrac{x_i - d_i(\lambda_i - 1)}{d_i(\lambda_i) - d_i(\lambda_i - 1)} & x_i \in [d_i(\lambda_i - 1), d_i(\lambda_i)] \\ \dfrac{d_i(\lambda_i + 1) - x_i}{d_i(\lambda_i + 1) - d_i(\lambda_i)} & x_i \in [d_i(\lambda_i), d_i(\lambda_i + 1)] \end{cases} \tag{2}$$

여기서, $\cdots < d_i(-1) < d_i(0) < d_i(1) < \cdots$, $\lambda_1 = \sigma$, $\lambda_2 = \tau$, $i = 1, 2$이다. 식 (2)에서 첨자 i, λ_i 등의 표기는 일반성을 위한 것으로, 본 논문에서는 간단히 x_1좌표의 값은 $d_1(\sigma)$, $-\infty < \sigma < \infty$으로 나타내고, x_2에 대해서는 $d_2(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$으로 나타낸다.

일반적으로 2차원 상태공간에서의 벡터 $\boldsymbol{d}(\sigma,\tau)$와 영역 $R_{\sigma\tau}$을

$$\boldsymbol{d}(\sigma,\tau) \equiv (d_1(\sigma), d_2(\tau))^T \quad (3)$$

$$R_{\sigma\tau} \equiv [d_1(\sigma), d_1(\sigma+1)] \times [d_2(\tau), d_2(\tau+1)] \quad (4)$$

로 정의한다. 특히, $d_1(\sigma) < 0 < d_1(\sigma+1)$와 $d_2(\tau) < 0 < d_2(\tau+1)$인 영역 $R_{\sigma\tau}$을 **제로 영역** $R^o_{\sigma\tau}$이라 부른다. 그리고, $\bigcup_\sigma \bigcup_\tau R_{\sigma\tau} = \Re^2$을 가정한다.
퍼지 추론의 결과는 $\boldsymbol{f}$의 **가중 평균**에 의해 구해진다고 하면, $\boldsymbol{x}(t) \in R_{\sigma\tau}$에 대해서 $\dot{\boldsymbol{x}}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} W_1^i(x_1) W_2^j(x_2) \boldsymbol{f}(i,j) \quad (5)$$

또, $\boldsymbol{x} \in R_{\sigma\tau}$에 대해서도 식 (5)와 같은 형식

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} W_1^i(x_1) W_2^j(x_2) \boldsymbol{d}(i,j) \quad (6)$$

로 나타낼 수 있다. 이 표현은 안정 조건의 유도에 있어 이용되는 중요한 식이다.

위의 사실과 가정으로 부터, 식 (1)의 퍼지 시스템은 다음 파라미터 표현이 얻어진다.

표준형 1 : 파라미터 표현([2]) $\boldsymbol{x} \in R_{\sigma\tau}$에 대해, 식 (1)의 퍼지 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^i \omega_2^j \boldsymbol{d}(i,j) \quad (7) \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^i \omega_2^j \boldsymbol{f}(i,j) \quad (8) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \omega_1^\sigma(x_1) &= (d_1(\sigma+1) - x_1)/(d_1(\sigma+1) - d_1(\sigma)) \\ \omega_2^\tau(x_2) &= (d_2(\tau+1) - x_2)/(d_2(\tau+1) - d_2(\tau)) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\omega_1^\sigma + \omega_1^{\sigma+1} = 1, \quad \omega_2^\tau + \omega_2^{\tau+1} = 1, \quad \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^i \omega_2^j = 1 \quad (10)$$

이고, $\omega_1^i, \omega_2^j \in [0,1]$ 이다. 그리고, ω_1^σ와 ω_2^τ은 각각 멤버쉽 함수 $W_1^\sigma(x_1)$와 $W_2^\tau(x_2)$를 나타낸다.

식 (7)와 (8)은 $R_{\sigma\tau}$의 4 정점에 대한 $\boldsymbol{x}$의 값 $\boldsymbol{d}(i,j)$와 $\boldsymbol{f}$의 값 $\boldsymbol{f}(i,j)$에 의해 표현되며, $\omega_1^\sigma = 1$ or 0, $\omega_2^\tau = 1$ or 0로 둠으로써 $R_{\sigma\tau}$의 4 정점에 대한 다음과 같은 싱글톤을 포함한다는 것을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}(i,j) \longmapsto \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(i,j) \quad (11)$$

여기서, $i = \sigma, \sigma+1$, $j = \tau, \tau+1$이다. 따라서, 식 (1)의 퍼지 규칙과 식 (11)의 싱글톤을 동등하다고 볼 수 있다. 이것은 맘다니형 퍼지 시스템의 커다란 특징을 나타내고 있다.

원점에서는 다음 **제로 조건**(Zero Condition)을 가정한다.

$$ZC \;:\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\longmapsto\; \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \quad (12)$$

식 (8)와 (12)로 부터 다음 식이 얻어진다.

$$\sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^{i^o} \omega_2^{j^o} \boldsymbol{f}(i,j) = \boldsymbol{0} \quad (13)$$

여기서, $i = \sigma, \sigma+1$와 $j = \tau, \tau+1$에 대해

$$\omega_1^{i^o} = \omega_1^i(0), \quad \omega_2^{j^o} = \omega_2^j(0) \quad (14)$$

이다.

파라미터 표현에서 변수 ω_1와 ω_2 중 하나를 소거함으로써 다음 상태공간 표현을 얻을 수 있다.

표준형 2 : 상태공간 표현([2]) 퍼지 시스템 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau}, \quad \boldsymbol{x} \in R_{\sigma\tau} \quad (15) \\ \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau} &= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \omega_1^{i^o} \omega_2^{j^o} \boldsymbol{f}(i,j) \quad (16) \end{aligned}$$

여기서, 제로영역 $R^o_{\sigma\tau}$에서는 제로조건으로 부터 $\boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau} = \boldsymbol{0}$이다. 그리고, 상태의존 행렬 $A_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x})$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x}) &: \omega_1^\sigma S(\sigma,\cdot) + \omega_1^{\sigma+1} S(\sigma+1,\cdot) \quad (17) \\ A_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x}) &: \omega_2^\tau S(\cdot,\tau) + \omega_2^{\tau+1} S(\cdot,\tau+1) \quad (18) \end{aligned}$$

여기서,

$$S(\sigma,\cdot) = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12} \\ a_{21}^* & a_{22} \end{pmatrix}, \quad S(\sigma+1,\cdot) = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^+ \\ a_{21}^* & a_{22}^+ \end{pmatrix}$$

$$S(\cdot,\tau) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}^* \\ a_{21} & a_{22}^* \end{pmatrix}, \quad S(\cdot,\tau+1) = \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^* \\ a_{21}^+ & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad (19)$$

$k = 1, 2$에 대해

$$\begin{aligned} a_{k1} &= \frac{f_k(\sigma+1,\tau) - f_k(\sigma,\tau)}{d_1(\sigma+1) - d_1(\sigma)} \\ a_{k2} &= \frac{f_k(\sigma,\tau+1) - f_k(\sigma,\tau)}{d_2(\tau+1) - d_2(\tau)} \\ a_{k1}^+ &= \frac{f_k(\sigma+1,\tau+1) - f_k(\sigma,\tau+1)}{d_1(\sigma+1) - d_1(\sigma)} \\ a_{k2}^+ &= \frac{f_k(\sigma+1,\tau+1) - f_k(\sigma+1,\tau)}{d_2(\tau+1) - d_2(\tau)} \quad (20) \\ a_{k1}^* &= \omega_2^{\tau^o} a_{k1} + \omega_2^{\tau+1^o} a_{k1}^+ \\ a_{k2}^* &= \omega_1^{\sigma^o} a_{k2} + \omega_1^{\sigma+1^o} a_{k2}^+. \quad (21) \end{aligned}$$

이다.

식 (18)의 $A_{\sigma\tau}$는 ω_2^τ를 통해서 x_2의 함수가 된다. 이로 부터 식 (15)의 시스템은 $\dot{\boldsymbol{x}} = \omega_2^\tau(S(\cdot,\tau)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau}) + \omega_2^{\tau+1}(S(\cdot,\tau+1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau})$ 와 같이 나타낼 수 있으므로, 두 extreme 시스템, $\dot{\boldsymbol{x}} = S(\cdot,\tau)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau}$ 와 $\dot{\boldsymbol{x}} = S(\cdot,\tau+1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau}$ 의 볼록 결합에 의한 구분적-폴리토픽-아핀-시스템(picewise polytopic affine system)으로 볼 수 있다. 단, 원점을 포함한 영역에서 $\boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau} = \boldsymbol{0}$이다.

다음의 **정점 조건**(Vertex Condition)을 구하면, $R_{\sigma\tau}$의 정점에 대한 식 (11)의 싱글톤 규칙을 얻을 수 있다. 그래

서, 상태공간 표현으로 부터 파라미터 표현을 재현할 수 있다.

$$VC \;:\; \boldsymbol{f}(i,j) = A_{\sigma\tau}(\boldsymbol{d}(i,j))\boldsymbol{d}(i,j) + \boldsymbol{\mu}_{\sigma\tau} \tag{22}$$

여기서, $i = \sigma, \sigma+1$, $j = \tau, \tau+1$이다. 또, 조건

$$AC \;:\; \boldsymbol{f}(\sigma+1,\tau) - \boldsymbol{f}(\sigma,\tau) = \boldsymbol{f}(\sigma+1,\tau+1) - \boldsymbol{f}(\sigma,\tau+1) \tag{23}$$

을 **아핀 조건**(Affine Condition)이라 부른다. AC가 성립하면, 식 (20)에서 $a_{ij} = a_{ij}^{+}$로 되므로, 식 (15)의 제2항의 계수가 0으로 되고, 시스템은 상수 행렬 $A = \{a_{ij}\}$을 갖는 아핀 시스템이 된다. 그래서, 모든 영역에서 ZC와 AC가 성립하면, 식 (15)의 퍼지 시스템은 선형 시스템과 완전히 일치하게 된다.

3. 안정 조건

안정 조건을 이끌어내기 위해, 리아프노프 함수 $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$, $P = P^T > 0$을 생각하고, $V(\boldsymbol{x})$의 시간 미분 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}^T P \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}}) = \dot{\boldsymbol{x}}^T P \boldsymbol{x}$ 이 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 로 되도록 하는 조건을 이끌어낸다. 여기서, $P > 0$은 양한정 행렬을 나타낸다.

각 영역 $R_{\sigma\tau}$에 있어, $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$로 나타낼 수 있으면 시스템은 안정이라 말할 수 있다. 이를 위해서, 모든 영역 $R_{\sigma\tau}$의 정점과 에지에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$일 필요가 있다.

우선, 정점 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}(i,j)$에 대한 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V}(i,j) \equiv \dot{V}(\boldsymbol{d}(i,j)) \tag{24}$$

그러면, 영역 내의 각 정점에서 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{V}(i,j) = \boldsymbol{f}(i,j)^T P \boldsymbol{d}(i,j), \quad i = \sigma, \sigma+1, j = \tau, \tau+1 \tag{25}$$

그리고, 정점에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$이 되기위한 다음 부등식을 **안정 정점 조건**(Stable Vertex Condition : SVC)이라 부른다.

$$SVC \;:\; \dot{V}(i,j) < 0, \quad \dot{V}(\boldsymbol{0}) = 0 \tag{26}$$

다음은 각 에지에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$이 되기 위한 조건을 이끌어낸다. 영역 $R_{\sigma\tau}$에 있어 에지에서의 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$는

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \omega_1^{\sigma}\dot{V}(\sigma,*) + \omega_1^{\sigma+1}\dot{V}(\sigma+1,*) - \omega_1^{\sigma}\omega_1^{\sigma+1}E(\cdot,*) \\ &= \omega_2^{\tau}\dot{V}(*,\tau) + \omega_2^{\tau+1}\dot{V}(*,\tau+1) - \omega_2^{\tau}\omega_2^{\tau+1}E(*,\cdot)\end{aligned} \tag{27}$$

로 나타낼 수 있다. 표기 $*$는 영역의 에지에 대한 $x_1 \in [d_1(\sigma), d_1(\sigma+1)]$ 또는 $x_2 \in [d_2(\tau), d_2(\tau+1)]$ 을 의미하고, $\boldsymbol{f}(i,j)$의 표기와 마찬가지로, 예를 들어, $\dot{V}(\sigma,*) = \dot{V}(\boldsymbol{d}(\sigma,*))$ 이다. 여기서,

$$\dot{V}(i,*) = \boldsymbol{f}(i,*)^T P \boldsymbol{d}(i,*), \quad \dot{V}(*,j) = \boldsymbol{f}(*,j)^T P \boldsymbol{d}(*,j) \tag{28}$$

$$E(\cdot,*) = (\boldsymbol{f}(\sigma+1,*) - \boldsymbol{f}(\sigma,*))^T P (\boldsymbol{d}(\sigma+1,*) - \boldsymbol{d}(\sigma,*))$$
$$E(*,\cdot) = (\boldsymbol{f}(*,\tau+1) - \boldsymbol{f}(*,\tau))^T P (\boldsymbol{d}(*,\tau+1) - \boldsymbol{d}(*,\tau)) \tag{29}$$

이다.

식 (28)을 전개하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{V}(i,*) = \omega_2^{\tau}\dot{V}(i,\tau) + \omega_2^{\tau+1}\dot{V}(i,\tau+1) - \omega_2^{\tau}\omega_2^{\tau+1}E(i,\cdot) \tag{30}$$
$$\dot{V}(*,j) = \omega_1^{\sigma}\dot{V}(\sigma,j) + \omega_1^{\sigma+1}\dot{V}(\sigma+1,j) - \omega_1^{\sigma}\omega_1^{\sigma+1}E(\cdot,j) \tag{31}$$

여기서,

$$E(\cdot,j) = (\boldsymbol{f}(\sigma+1,j) - \boldsymbol{f}(\sigma,j))^T P (\boldsymbol{d}(\sigma+1,j) - \boldsymbol{d}(\sigma,j))$$
$$E(i,\cdot) = (\boldsymbol{f}(i,\tau+1) - \boldsymbol{f}(i,\tau))^T P (\boldsymbol{d}(i,\tau+1) - \boldsymbol{d}(i,\tau)) \tag{32}$$

이고, $i = \sigma, \sigma+1$, $j = \tau, \tau+1$이다.

다음의 ϖ_1 또는 ϖ_2에 관한 2차 함수 관계와 보제를 바탕으로 논의를 진행한다.

$$\begin{aligned} g(\varpi_1,\varpi_2) &= (\varpi_1 a_1 + \varpi_2 b_1)(\varpi_1 a_2 + \varpi_2 b_2) \\ &= \varpi_1 a + \varpi_2 b - \varpi_1\varpi_2 e \end{aligned} \tag{33}$$

여기서, $\varpi_1 + \varpi_2 = 1$, $\varpi_1, \varpi_2 \in [0,1]$이고, $a = a_1 a_2$, $b = b_1 b_2$, $c = (a_1 b_2 + a_2 b_1)$, $e = a + b - c = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$이다.

보제 1 식 (33)의 ϖ_1 또는 ϖ_2에 관한 2차 함수 가 $\varpi_1, \varpi_2 \in [0,1]$에서 $g(\varpi_1,\varpi_2) < 0$로 될 필요충분 조건은

$$a < 0, b < 0 \; and \; e > -\left(\sqrt{-a} + \sqrt{-b}\right)^2 \tag{34}$$

가 성립하는 것이다.

보제 2 조건식 (34)는 스칼라 변수 $\beta > 0$를 도입하고, Schur complement를 이용하면 다음과 같이 등가 변환된다.

$$\begin{cases} a < 0, \quad b < 0, \\ \beta > -e + a + b, \quad \beta > 0, \\ \begin{pmatrix} -2a & \beta \\ \beta & -2b \end{pmatrix} > 0 \end{cases} \tag{35}$$

각 에지에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$이 되기 위해 식 (32)에 관계하는 다음 부등식을 **안정 에지 조건** SEC (Stable Edge Condition)이라 부른다.

$$SEC \;:\; E(i,\cdot) > -\left(\sqrt{-\dot{V}(i,\tau)} + \sqrt{-\dot{V}(i,\tau+1)}\right)^2$$
$$E(\cdot,j) > -\left(\sqrt{-\dot{V}(\sigma,j)} + \sqrt{-\dot{V}(\sigma+1,j)}\right)^2 \tag{36}$$

이고, $i = \sigma, \sigma+1$, $j = \tau, \tau+1$이다.

마지막으로, 영역 내부에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$이 되기 위한 조건을 유도한다. 식 (27)으로 부터 다음 조건을 이끌어낼 수 있다.

$$\dot{V}(\sigma,*) < 0 \tag{37}$$
$$\dot{V}(\sigma+1,*) < 0 \tag{38}$$
$$E(\cdot,*) > -\left(\sqrt{-\dot{V}(\sigma,*)} + \sqrt{-\dot{V}(\sigma,*)}\right)^2 \tag{39}$$

여기서, 식 (37)과 (38)는 위에서 얻은 SEC이다. 따라서, 식 (39)를 만족하는 조건식을 찾아내면 된다.

$i = \sigma, \sigma+1$, $j = \tau, \tau+1$에 대해

$$\begin{aligned} -\gamma(i,\cdot) &= \beta(i,\cdot) + E(i,\cdot) - \dot{V}(i,\tau) - \dot{V}(i,\tau+1) \\ -\gamma(\cdot,j) &= \beta(\cdot,j) + E(\cdot,j) - \dot{V}(\sigma,j) - \dot{V}(\sigma+1,j) \end{aligned} \tag{40}$$

$$
\begin{aligned}
-\Lambda(i,\cdot) &= \begin{pmatrix} -2\dot{V}(i,\tau) & \beta(i,\cdot) \\ \beta(i,\cdot) & -2\dot{V}(i,\tau+1) \end{pmatrix} \\
-\Lambda(\cdot,j) &= \begin{pmatrix} -2\dot{V}(\sigma,j) & \beta(\cdot,j) \\ \beta(\cdot,j) & -2\dot{V}(\sigma+1,j) \end{pmatrix} \qquad (41)
\end{aligned}
$$

이라 정의하면, 보제 2로 부터 식 (36)의 SEC는 다음과 등가이다.

$$
\begin{aligned}
SEC\ :\ & \beta(i,\cdot)>0,\quad -\gamma(i,\cdot)>0,\quad -\Lambda(i,\cdot)>0 \\
& \beta(\cdot,j)>0,\quad -\gamma(\cdot,j)>0,\quad -\Lambda(\cdot,j)>0 \qquad (42)
\end{aligned}
$$

여기서, $i=\sigma,\sigma+1$, $j=\tau,\tau+1$이다.

마찬가지로, 식 (39)의 등가 변환은 다음과 같다.

$$
\begin{cases}
\beta(\cdot,*) = \omega_2^{\tau}\beta(\cdot,\tau) + \omega_2^{\tau+1}\beta(\cdot,\tau+1) > 0, \\
\beta(\cdot,*) > -E(\cdot,*) + \dot{V}(\sigma,*) + \dot{V}(\sigma+1,*), \\
\begin{pmatrix} -2\dot{V}(\sigma,*) & \beta(\cdot,*) \\ \beta(\cdot,*) & -2\dot{V}(\sigma+1,*) \end{pmatrix} > 0
\end{cases} \qquad (43)
$$

위의 두번째 식은 다시 전개하여 변환하면

$$
\begin{cases}
\beta_c > 0, \\
\beta_c > -E(\sigma,\cdot) - E(\sigma+1,\cdot) + \gamma(\sigma,\cdot) + \gamma(\sigma+1,\cdot), \\
\begin{pmatrix} -2\gamma(\sigma,\cdot) & \beta_c \\ \beta_c & -2\gamma(\sigma+1,\cdot) \end{pmatrix} > 0
\end{cases} \qquad (44)
$$

이다. 그리고, 세번째 식은 다음과 같이 변환된다.

$$
\begin{cases}
M > 0, \\
M + F - \Lambda(\cdot,\tau) - \Lambda(\cdot,\tau+1) > 0, \\
\begin{pmatrix} -2\Lambda(\cdot,\tau) & M \\ M & -2\Lambda(\cdot,\tau+1) \end{pmatrix} > 0
\end{cases} \qquad (45)
$$

여기서, M은 2×2의 양한정 행렬이고,

$$
F = \begin{pmatrix} E(\sigma,\cdot) & 0 \\ 0 & E(\sigma+1,\cdot) \end{pmatrix} \qquad (46)
$$

이다.

영역 내부에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$이 되기 위한 부등식 (44)와 (45)를 **안정 내부 조건** SIC (Stable Inner Condition)이라 부르기로 한다. 그러면, 이상으로 부터 다음 안정 정리가 얻어진다.

정리 1 (안정 정리) 퍼지 시스템 (1)은 어떤 공통의 $P>0$에 대해 아래 조건을 만족하면 시스템은 전역 점근 안정이다.

(1) 제로 영역에서, **안정 제로 조건**SZC (Stable Zero Condition) 및 SVC과 SEC를 만족한다. 여기서, SZC은 다음과 같다.

$$
SZC\ :\ Q(\omega_2^{\tau^o}) = -A(\omega_2^{\tau^o})^T P - PA(\omega_2^{\tau^o}) > 0 \qquad (47)
$$

(2) 다른 영역에서, SVC와 SEC, SIC를 만족한다.

여기서, SZC은 원점 근방에서 선형 근사된 시스템 $\dot{\boldsymbol{x}} = A(\omega_\tau^{2^o})\boldsymbol{x}$이 안정인 것을 의미하고 있다. 앞에서 보인 바와 같이 안정 조건이 모두 선형행렬부등식(LMI)의 형식으로 변환되기 때문에, 안정 정리에서의 모든 영역에서 공통인 $P>0$를 찾는 문제는 LMI의 가해 문제로 귀착됨을 알 수 있다.

4. 예제

표1에 보인 퍼지 시스템의 안정성을 생각한다.
이 문제는 원점을 포함한 영역에서 두 extreme 시스템

표 1예1의 파라미터 표현

$f_1(d_1,d_2)$ / $f_2(d_1,d_2)$		$d_2(1)$ -2.0	$d_2(2)$ -1.0	$d_2(3)$ 1.0	$d_2(4)$ 2.0
$d_1(1)$	-2.0	4.60 3.82	2.40 1.94	-2.40 -2.18	-5.20 -4.60
$d_1(2)$	-1.0	7.80 6.76	0.40 0.20	-1.60 -1.40	-7.80 -6.88
$d_1(3)$	1.0	12.20 10.84	9.60 8.60	-8.40 -7.40	-12.20 -10.72
$d_1(4)$	2.0	13.80 12.34	6.80 6.14	-6.40 -5.54	-13.20 -11.56

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 4.6 & -5.0 \\ 4.2 & -4.4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x},\quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -3.4 & -5.0 \\ -3.0 & -4.4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}
$$

이 불안정하고, 그들의 볼록 결합으로 되어 있기 때문에 종래의 비선형 시스템의 안정 판별법 혹은 로버스트 안정 해석법으로는 안정 판별을 할 수 없다. 여기서는 전 절의 안정 정리를 바탕으로 안정 조건을 만족하는 공통 양한정 행렬 P를 찾을 수 있음을 보인다.

선형행렬부등식에 의해 얻어진 안정 조건을 만족하는 P는

$$
P = \begin{pmatrix} 0.2114 & -0.2347 \\ -0.2347 & 0.2906 \end{pmatrix}
$$

이고, 제로 영역에서의 선형 근사 시스템 행렬

$$
A = \begin{pmatrix} 0.6 & -5.0 \\ 0.6 & -4.4 \end{pmatrix}
$$

로 부터 SZC

$$
Q = \begin{pmatrix} 0.0279 & -0.0092 \\ -0.0092 & 0.2105 \end{pmatrix} > 0,\quad \boldsymbol{x}\in R_{22}
$$

를 만족한다.

그리고, 모든 영역에서 SVC, SEC, SIC를 만족하므로, 이 시스템은 안정이라 말할 수 있다.

참고 문헌

[1] J.Aracil et al., "Fuzzy Control of Dynamical Systems, and Stability Analysis Based on the Conicity Criterion," *IFSA World Congress*, Brussels, 1991.

[2] M.Sugeno, "On Stability of Fuzzy Systems Expressed by Fuzzy Rules with Singleton Consequents," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 7, 201/224, 1999.

[3] H.O.Wang et al., "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems : Stability and Design Issues," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, 14/23, 1996.