

구조물의 효율적인 해석을 위한 모델 축소기법 연구

A Study on Model Reduction for Effective Analysis of Structure

박영창* · 황재혁** · 오화석**

Young-Chang Park and Jai-Hyuk Hwang and Hwa-Suk Oh

Key Words : component mode synthesis(구성품 모드 합성), constraint mode(구속조건 모드), model reduction(모델 축소), substructure coupling(부분 구조물 커플링).

ABSTRACT

Substructure coupling or component mode synthesis may be employed in the solution of dynamic problems for structure. The model is partitioned into several subdomains, and a generalized Craig-Bampton representation is derived. In this paper the mode sets(normal modes, constraint modes) have been employed for model reduction. A generalized model reduction procedure has been described. Those reduction methods which adapt constraint modes have been described in detail. As examples, a flexible structure and a 10 DOF damped system are analyzed. Comparison with a conventional reduction method based on a complete model has been made via eigenpairs and dynamic responses.

1. 서론

완성된 구조물은 일반적으로 매우 복잡하여 적절한 형태로 전체 구조물을 유한요소 모델로 조합하는 것은 어려운 것이 사실이다. 또한 전체 구조물의 유한요소 모델은 큰 자유도를 갖음에 따라 유한요소 방정식에 기초한 동역학적인 해석을 수행하는데 어려울 경우가 발생할 수 있다. 이러한 이유로 전체 구조물을 근사적인 수학적 모델로 개발하여 구성품 또는 부분 구조물로 분할하여 구조물 해석에 이용하는 방법들이 개발되었다. 이런 방법들을 구성품 모드 합성법 또는 부분 구조물 커플링 방법이라고 부른다[1]. 구성품 모드 합성법은 모드를 이용한 축소 기법으로 Craig-Bampton[2] 방법이 가장 많이 사용되고 있다. 이 방법은 Gyan[3] 방법을 개선한 것으로 Gyan은 정적인 구조물의 해석을 위하여 질량과 강성 행렬을 축소시키는 방법을 제안하였다. Gyan이 제안한 방법은 여러 문헌에서 새로운 기법을 연구하는 기초가

되었으며 정적인 상태에서는 매우 정확함이 입증되었다. 이후로는 구성품 모드 합성법에서 제안한 모드를 이용하여 모델을 축소시키는 방법이 연구되었으며 원래의 모델에 최대한 정확한 축소 모델을 제안하는 방법이 제시되었다[4 ~ 10].

본 논문은 모델 축소 기법에 대한 이론적인 해석을 통해서 구조물 사이의 특성을 이용한 축소 기법을 연구하여 그 적용 방안을 제시하였다. 사용한 방법은 고유 모드를 이용한 축소 방법과 고유 모드와 구속조건 모드를 합성한 방법을 이용하였으며 각 시스템의 고유치 및 응답 특성을 비교하였다. 해석에 이용한 모델은 첫 번째는 힌지로 연결된 유연한 구조물의 고유치를 비교하였으며 두 번째는 5자유도 모델을 10 자유도로 확장하여 각각 3, 5, 7 자유도로 축소하였을 때 주파수 응답 특성을 비교하였다.

2. 이론적 고찰

2.1 구성품 모드 합성법

그림 1의 외팔보를 두 개의 구성품 α , β 로 나누고 구성품의 물리적 좌표 x 를 결합된 좌표 J (변위는 x_j)와 내부 좌표 I (변위는 x_i)로 분할하면 구성품에 대한 비감

* 한국항공대학교 대학원

E-mail : morecomo@yahoo.co.kr

Tel : (02) 961-1463, Fax : (02) 962-3613

** 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부

최 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

물리적 좌표 x 를 구성품의 일반화된 좌표 p 를 이용하여 다음과 같이 좌표 변환을 한다.

$$x = \Psi p \quad (2)$$

여기서 Ψ 는 사전에 선정한 구성품 모드 행렬이며 일반적으로 강체 모드, 고유 모드, 구속조건 모드 및 Attachment 모드 등이 사용된다.

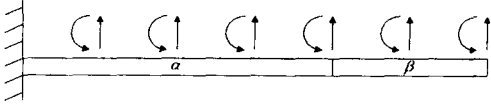


그림 1a Coupled structure

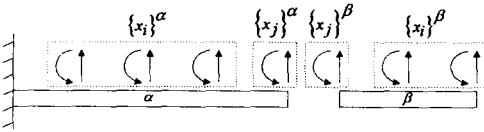


그림 1b Substructure physical coordinates

2.2 부분 구조물의 coupling 절차

여러 가지 모드를 이용하여 구성품의 운동방정식을 구한 후 구성품을 합성하여 원래의 시스템과 유사하도록 합성하는 방법이다. 그림 1과 같은 시스템의 특성을 식 (2)와 같이 나타내면 시스템 운동방정식의 미분은 라그랑지 방정식에 기초하며 그에 따라 운동에너지, 위치에너지 및 구속조건 식이 필요하다.

$$x = \begin{Bmatrix} x^\alpha \\ x^\beta \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$m = \begin{bmatrix} m^\alpha & 0 \\ 0 & m^\beta \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$$k = \begin{bmatrix} k^\alpha & 0 \\ 0 & k^\beta \end{bmatrix} \quad (2c)$$

$$f = \begin{Bmatrix} f^\alpha \\ f^\beta \end{Bmatrix} \quad (2d)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi^\alpha & 0 \\ 0 & \phi^\beta \end{bmatrix} \quad (2e)$$

$$p = \begin{Bmatrix} p^\alpha \\ p^\beta \end{Bmatrix} \quad (2f)$$

시스템의 운동에너지와 위치에너지 식은 다음과 같으며 부분 구조물 좌표 p 는 독립적이지 않다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T m \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{p}^T \mu \dot{p} \quad (3a)$$

$$U = \frac{1}{2} x^T k x = \frac{1}{2} p^T \chi p \quad (3b)$$

여기서

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^\alpha & 0 \\ 0 & \mu^\beta \end{bmatrix} = \phi^T m \phi \quad (4a)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi^\alpha & 0 \\ 0 & \chi^\beta \end{bmatrix} = \phi^T k \phi \quad (4b)$$

공유영역에서 변위와 구속조건 방정식은 다음과 같다.

$$x_j^\alpha = x_j^\beta \quad (5)$$

$$Bp = 0 \quad (6)$$

공유영역에서 힘에 대한 평형방정식은 식(7)과 같으며 p 의 항으로 쓰면 식 (8)과 같다.

$$f_j^\alpha + f_j^\beta = 0 \quad (7)$$

$$Ap = 0 \quad (8)$$

라그랑지 함수는 식 (9)와 같다.

$$L = \frac{1}{2} \dot{p}^T \mu \dot{p} - \frac{1}{2} p^T \chi p + \eta^T A p + \nu^T B p \quad (9)$$

여기서 η, ν : Lagrange multiplier vector

식 (9)를 식 (10)과 같이 정리하고 시스템의 운동방정식을 구하면 식 (12)와 같다.

$$L = \frac{1}{2} \dot{p}^T \mu \dot{p} - \frac{1}{2} p^T \chi p + \sigma^T C p \quad (10)$$

여기서

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \eta \\ \nu \end{Bmatrix} \quad (11b)$$

$$\mu \dot{p} + \chi p = \phi^T f + C^T \sigma \quad (12)$$

구속조건은

$$Cp = 0 \quad (13)$$

식 (12), (13)을 식 (14)를 이용하여 선형변환 시키며 p 를 비독립적인 좌표 p_d 와 선형적으로 독립된 좌표 p_l 로 나누면 식(13)은 식 (15)와 같다.

$$p = sq \quad (14)$$

$$[C_{dd} \ C_{dl}] \begin{Bmatrix} p_d \\ p_l \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

여기서 C_{dd} 는 C 의 부 행렬이며 식 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_d \\ p_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{dd}^{-1} C_{dl} \\ I_{ll} \end{bmatrix} q \quad (16)$$

여기서 $q = p_l$

식 (16)의 우측을 s 라 하고 식 (16)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$Cs=0 \quad (17)$$

식 (12)와 (14)는 독립된 좌표 q 의 항으로 다음과 같이 시스템 식을 합병시킬 수 있다.

$$M\ddot{q} + kq = s^T \phi^T f + s^T C^T \sigma \quad (18)$$

여기서

$$M = s^T \mu s \quad (19a)$$

$$k = s^T ks \quad (19b)$$

식 (17)에서 $s^T C^T = 0$ 임으로 식 (18)은 식 (20)과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{q} + kq = s^T \phi^T f \quad (20)$$

식 (20)은 공유영역 평형방정식을 만족함에 따라 다음과 같이 축소된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M\ddot{q} + kq = 0 \quad (21)$$

2.3 감쇠 시스템의 축소 방법

연속시간 방정식을 2차 동역학 운동방정식으로 표현하면 식 (22)와 같다.

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = \hat{B}u \quad (22)$$

여기서

M, D, K : 질량, 감쇠 및 강성행렬

x : n 개의 변위 벡터

u : m 개의 입력 벡터

\hat{B} : u 를 물리적자유도 x 에 맵

비 감쇠 고유치 문제에서 고유 모드는 다음과 같다.

$$K\Phi_n = M\Phi_n\Omega \quad (23a)$$

$$\Phi_n^T K \Phi_n = \Omega = \text{diag} \{ \omega_{ni}^2, i=1, 2, \dots, n \} \quad (23b)$$

$$\Phi_n^T M \Phi_n = I_{n \times n} \quad (23c)$$

$$\Phi_n^T D \Phi_n = \varepsilon \quad (23d)$$

여기서 Φ_n 은 질량에 정규화 된 K 와 M 의 모드 형태이며 Ω 는 비 감쇠 고유치의 대각행렬로 고유주파수 ω_{ni} 의 정방행렬이며 ε 는 모드 감쇠 행렬이다.

큰 차수의 구조물 동역학 모델의 자유도를 m 과 i 로 나누면 식 (22)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mi} \\ M_{mi}^T & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{mi} \\ D_{mi}^T & D_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mi} \\ K_{mi}^T & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_m \\ \hat{B}_i \end{bmatrix} u \quad (24)$$

식 (24)에서 정적인 상태인 $\hat{B}_i u = 0$ 에서 x_i 를 구하면 다음과 같다.

$$x_i(t) = -K_{ii}^{-1} K_{mi}^T x_m(t) \quad (25)$$

식 (25)을 이용하여 x 를 다음과 같이 변환 축소 연산자 형태로 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ii}^{-1} K_{mi}^T \end{bmatrix} x_m(t) = \Phi_c x_m(t) \quad (26)$$

식 (26)에서 Φ_c 는 구성품 모드 합성 이론의 구속조건 모드를 갖는다. 식 (26)을 식 (24)의 K, D, M 으로 변환시키면 다음과 같이 감소된 강성, 감쇠 및 질량 행렬을 얻게된다.

$$\bar{K} = \Phi_c^T K \Phi_c = K_{mm} - K_{mi} K_{ii}^{-1} K_{mi}^T \quad (27a)$$

$$\bar{D} = \Phi_c^T D \Phi_c \quad (27b)$$

$$\bar{M} = \Phi_c^T M \Phi_c \quad (27c)$$

최종적인 모델은 더 이상 K 와 M 에 대한 큰 차수의 동역학을 포함하지 않는다. 그러나 존속된 자유도 x_m 에 의해 크게 영향을 받는 최저 차 모드에 대하여 더욱 큰 고유치 문제의 일반적인 거동을 보존하게된다.

식 (27)의 축소된 모델은 식 (28)을 이용하여 변환시키면 새로운 축소 모델을 얻을 수 있다.

$$x(t) = \Phi_n \eta(t) = \begin{bmatrix} \phi_m \\ \phi_i \end{bmatrix} \eta(t) \quad (28)$$

식 (28)에서 ϕ_m 과 ϕ_i 는 각각 측정된, 측정하지 않은 (즉 내부) 자유도의 질량에 정규화 된 고유벡터들의 부분이다. 식 (23)과 (28)을 이용하여 구한 새로운 축소 모델의 강성, 질량 및 감쇠 행렬은 다음과 같다.

$$\bar{K} = [\phi_m \Omega^{-1} \phi_m^T]^{-1} \quad (29a)$$

$$\bar{M} = \bar{K} \phi_m \Omega^{-2} \phi_m^T \bar{K} \quad (29b)$$

$$\bar{D} = \bar{K} \phi_m \Omega^{-1} \varepsilon \Omega^{-1} \phi_m^T \bar{K} \quad (29c)$$

식 (29)의 축소된 시스템 행렬은 식 (24)의 전체 고유치 스펙트럼을 측정된 것처럼 한정된 범위 내에서 Guyan 방법과 이론적으로 일치한다.

3. 해석 결과

3.1 유연한 구조물

그림 2는 힌지로 연결된 구조물 시스템으로 A 와 B 는 스프링으로 연결된 강체 디스크이며 주어진 질량은 Kg 이고 강성은 $N\text{-m/rad}$ 이다. 시뮬레이션은 각 각에 대한 운동방정식을 구한 후 전체 시스템으로 중첩하여 고유치와 고유벡터를 구한 후 원하는 모델로 축소하여 고유치

를 비교하였으며 시뮬레이션은 Matlab을 이용하였다.

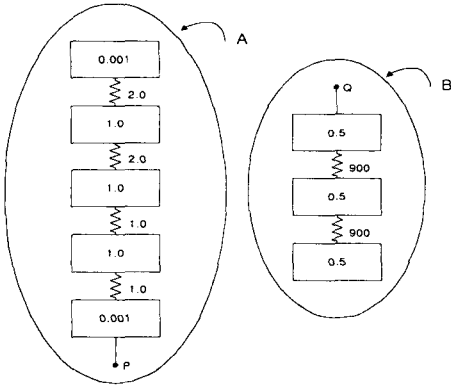


그림 2 Mass-spring example

(1) 운동방정식 유도

그림 2의 전체 시스템에 대한 운동방정식은 다음이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{x} + Kx = F \quad (30a)$$

$$x = \Phi y \quad (30b)$$

$$I\ddot{y} + \Lambda y = \Phi^T F \quad (30c)$$

여기서

x : 힘 함수 F 에 의한 응답

M : 시스템 전체의 질량 행렬

K : 시스템 전체의 강성 행렬

I : identity matrix

Λ : 대각행렬 (ω^2)

자유도 n 은 $n < n_A + n_B$ 가 된다. 식 (30)을 구조물 A와 B에 대한 운동방정식으로 나타내기 위해서는 두 번의 좌표 변환을 통해 구할 수 있으며 다음과 같다.

최종적으로 구한 구조물 A의 운동방정식은 식 (31)과 같으며 구조물 B도 동일한 운동방정식을 갖게 된다.

$$I_A \ddot{v}_A + \lambda_A v_A = \zeta_A^T \phi_A^T F_A \quad (31a)$$

$$\psi_A = \phi_A \zeta_A \quad (31b)$$

여기서

$$x_A = \phi_A u_A \quad (32a)$$

$$u_A = \zeta_A v_A \quad (32b)$$

(2) 시뮬레이션 결과 및 해석

구조물 A와 B의 고유치 및 고유벡터를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1001 \end{bmatrix} \quad (33a)$$

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.4924 & 0.4472 & -0.4130 & 0.0000 \\ -0.0100 & -0.4912 & 0.4472 & -0.4127 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6718 & 0.4472 & -0.1511 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.1799 & 0.4472 & 0.5637 & -0.0010 \\ 0.0000 & -0.1807 & 0.4472 & 0.5644 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (33b)$$

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 5400 \end{bmatrix} \quad (34a)$$

$$\Phi_B = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ 0.5774 & 0.0000 & -0.8165 \\ 0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{bmatrix} \quad (34b)$$

구조물 A와 B의 총 자유도는 8이며 이를 자유도 7인 시스템으로 결합시키면 질량 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.501 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (35a)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.0 & 4.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 3.0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 901 & -900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -900 & 1800 & -900 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -900 & 900 \end{bmatrix} \quad (35b)$$

결합된 원래의 시스템의 고유치와 고유벡터는 다음과 같다.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1799.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5398.5 \end{bmatrix} \quad (36a)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0.4845 & 0.3780 & -0.3407 & -0.4186 & 0 \\ 0.0010 & 0 & 0.4834 & 0.3780 & -0.3403 & -0.4185 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6786 & 0.3780 & 0.0554 & -0.3061 & 0 \\ 0 & -0.0004 & 0.2568 & 0.3780 & 0.7180 & 0.0830 & -0.0001 \\ 0 & 0.7069 & -0.0411 & 0.3780 & -0.2878 & 0.4276 & 0.4075 \\ 0 & -0.0003 & -0.0414 & 0.3780 & -0.2885 & 0.4278 & -0.8167 \\ 0 & -0.7073 & -0.0415 & 0.3780 & -0.2889 & 0.4279 & 0.4085 \end{bmatrix} \quad (36b)$$

식 (36b)에서 처음 3열 벡터를 이용하여 원래의 모델을 3자유도로 축소시키기 위해 ϕ_A 와 ϕ_B 를 다음과 같이 선택한다. 여기서 ϕ_A 와 ϕ_B 는 고유 모드이며 시스템 A의 축소된 질량 행렬 \overline{M}_A 와 강성 행렬 \overline{K}_A 은 다음과 같다.

$$\phi_A = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0.4845 \\ 0.0010 & 0 & 0.4834 \\ 0 & 0 & -0.6786 \\ 0 & -0.0004 & 0.2568 \\ 0 & 0.7069 & -0.0411 \end{bmatrix} \quad (37a)$$

$$\phi_B = \begin{bmatrix} 0 & 0.7069 & -0.0411 \\ 0 & -0.0003 & -0.0414 \\ 0 & -0.7073 & -0.0415 \end{bmatrix} \quad (37b)$$

$$\overline{M}_A = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 & -0.0001 \\ 0 & -0.0001 & 0.7603 \end{bmatrix} \quad (38a)$$

$$\overline{K}_A = \begin{bmatrix} 2.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5003 & -0.2111 \\ 0 & -0.2111 & 3.6641 \end{bmatrix} \quad (38b)$$

3자유도로 축소된 모델의 고유치와 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_A = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 \\ 0 & 1000.8 & 0 \\ 0 & 0 & 4.7 \end{bmatrix} \quad (39a)$$

$$\phi_A = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.3893 \\ 0 & -0.0001 & 0.9211 \end{bmatrix} \quad (39b)$$

식 (39a)에서 축소되기 전의 고유치인 식 (33a)와 비교할 경우 1차 및 2차 모드는 정확하게 일치함을 알 수 있었으며 5차 모드는 0.02% 정도의 오차를 보임을 알 수 있었다. 마찬가지로 B 시스템에 대하여 동일한 방법으로 구하면 축소된 질량 및 강성 행렬은 각각 다음과 같다.

$$\overline{M}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.001 \\ 0 & 0.001 & 0.0026 \end{bmatrix} \quad (40a)$$

$$\overline{K}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 899.9998 & 0.2111 \\ 0 & 0.2111 & 0.0001 \end{bmatrix} \quad (40b)$$

고유치와 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_B = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1800 \end{bmatrix} \quad (41a)$$

$$\phi_B = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (41b)$$

B 시스템의 축소된 모델의 고유치는 앞에서 구한 원래 시스템의 고유치 식 (34a)와 정확하게 일치함을 볼 수 있다.

다음은 고유 모드와 구속조건 모드를 합성하여 고유치를 구한 결과이다. 구속조건 모드는 다음과 같다.

$$\overline{\Phi}_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

고유 모드와 구속조건 모드의 차원을 3x5로 구성하기 위

해 사용된 새로운 모드는 다음과 같다.

$$\overline{\Phi}_{conA} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.4924 & 1.0000 \\ -0.0100 & -0.4912 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.6718 & 1.0000 \\ 0.0000 & -0.1799 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (43)$$

이 모드를 이용하여 앞에서 구한 방법과 동일하게 축소된 A시스템의 새로운 질량 및 강성 행렬을 구한 후 이것을 이용하여 고유치와 고유벡터를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\overline{\lambda}_{conA} = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44a)$$

$$\overline{\psi}_{conA} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (44b)$$

식 (44a)에서 전체 시스템의 고유치인 식 (35a)의 1차 및 3차 모드 고유치와 정확하게 일치함을 볼 수 있다. 마찬가지로 B 시스템에 대해서도 동일한 방법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\overline{\Phi}_{conB} = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & 1.0000 \\ 0.5774 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (45)$$

고유치와 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{\lambda}_{conB} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46a)$$

$$\overline{\psi}_{conB} = \begin{bmatrix} -0.7661 & 0.7071 & 0 \\ 0.6255 & 0.5774 & 0 \\ 0.1474 & -0.4082 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (46b)$$

식 (46a)에서 고유치는 전체 시스템의 2차 및 7차 모드의 고유치와 거의 오차가 없음을 볼 수 있다.

3.2 감쇠 시스템의 모델 축소

다음은 그림 3과 같은 시스템을 10자유도로 확대한 후 각각 3, 5, 7 자유도로 축소하였을 때 주파수 응답 특성을 비교하였다.

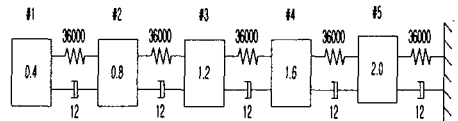


그림 3 Mass-damping-stiffness example

그림 4, 5, 6은 10자유도 시스템을 고유 모드를 이용하여 축소하였을 때와 고유 모드와 구속조건 모드를 이용하여 각각 3, 5, 7자유도로 축소하였을 때 주파수 응답 특성

을 비교한 것이다. 그림에서 첫 번째 모드에서는 매우 일치함을 볼 수 있었으며 구속조건 모드를 이용한 경우가 고유 모드를 이용한 것 보다 원래 모델의 응답 특성에 근사적으로 접근함을 볼 수 있었다.

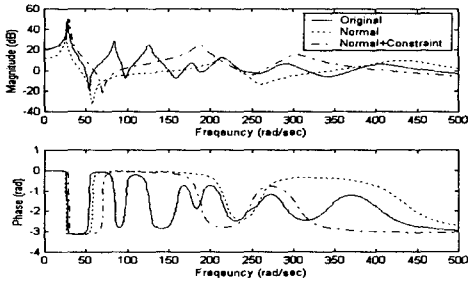


그림 4 주파수 응답 비교(3자유도 축소모델)

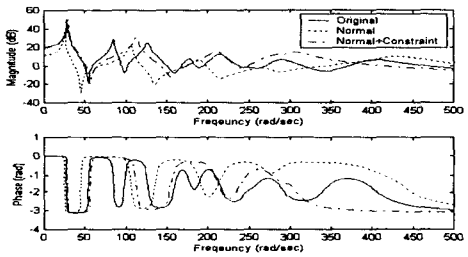


그림 5 주파수 응답 비교(5자유도 축소모델)

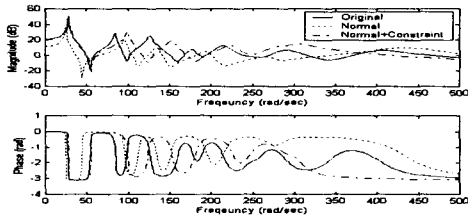


그림 6 주파수 응답 비교(7자유도 축소모델)

4. 결론

본 논문에서는 구조물을 효율적으로 해석하기 위한 모델 축소 기법을 연구하였다. 모델 축소 방법은 유연한 구조물이나 대형 구조물의 해석 시 유용하게 사용할 수 있으며 또한 복잡한 구조물을 단순화하여 원래 모델에 상당히 근사적인 고유치를 갖음을 알 수 있었다. 특히 모드를 이용한 축소 방법은 고유치 뿐 만 아니라 주파수 응답 특성도 매우 잘 일치함을 볼 수 있었다.

고유 모드를 이용하여 해석한 결과 원래 시스템의 고

유치와 매우 잘 일치함을 볼 수 있었으며 축소된 모델은 원래 모델의 고유치 범위 내에 있음을 알았다. 또한 구속조건 모드를 사용하였을 때도 원래 모델의 특성과 잘 일치함을 알 수 있었으며 주파수 응답도 원래 모델과 유사함을 알 수 있었다.

이와 같이 본 논문에서 제안한 축소 기법을 이용할 경우 유연한 구조물이나 대형구조물의 동적 해석에 유용하게 사용될 수 있다고 판단하며 아울러 인공위성이나 항공기와 같은 구조물에도 적용이 가능하여 동적인 해석과 제어에 유용하게 이용될 수 있을 것이라고 판단된다.

참고 문헌

- [1] R. R. Craig, Jr., "Method of Component Mode Synthesis," Shock and Vib. Digest, Naval Research Lab., Washington, DC, vol. 9, 1977, pp. 3-10.
- [2] R. R. Craig, Jr. and M. C. C. Bampton, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis," AIAA J., vol. 6, 1968, pp. 1313-1319.
- [3] R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," AIAA J., vol. 3, 1965, p.380.
- [4] R. H. MacNeal, "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis," Comp. and Struct., vol. 1, 1971, pp. 581-601.
- [5] R. R. Craig, Jr. and C-J. Chang, "On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Analysis," AIAA/ASME 18th, San Diego, 1977, pp. 89-97.
- [6] R. R. Craig, Jr. and C-J. Chang, "A Review of Substructure Coupling Methods for Dynamic Analysis," NASA CP-2001, Washington, DC, vol. 2, 1976, pp. 393-408.
- [7] Robert Morris Hintz, "Analytical Methods in Component Modal Synthesis," AIAA J., vol. 13, 1975, pp. 1007-1016.
- [8] W. C. Hurty, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA J., vol. 3, 1965, pp. 678-685.
- [9] Xiaojian Liu, and Junjiro Onoda, "Partitioned Model Reduction for Large Space Structural Control Problem," AIAA J., vol. 34, 1996, pp. 2149-2151.
- [10] K. F. Alvin, K. C. Park, and L. D. Peterson, "A Consistent Model Reduction of Measured Modal Parameters for Reduced-Order Active Control," AIAA, 1993, pp. 644-650.