한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회논문집, pp. 1317~1322.

경계 조건이 음장에 미치는 영향

Effect of Boundary Condition Changes on the Sound Field

조성호*· 김양한**· 최성훈***

Sung-Ho, Cho, Yang-Hann, Kim, and Sung-Hoon Choi

Key Words : Boundary condition(경계 조건), Kirchhoff-Helmholtz Integral Equation(키르히호프-헬름홀쯔 적분 방정식) Green's function(그린 함수), Impedance(임피던스)

ABSTRACT

What changes in the eigen values and eigen functions are produced if the boundary surface S is no longer rigid but has a specific acoustic admittance which may vary from point to point on S. In this paper, changes in eigen values and eigen functions are derived by using Kirchhoff-Helmholtz integral equation. And acoustic potential energy, which is representative measure describing the physical quantity in cavity, is defined. Acoustic potential energy can be divided into primary one and secondary one. Primary one is the acoustic potential energy through unchanged eigen functions, and secondary one is through changed eigen functions. Using these two term, we can find the eigenvalue problem, which gives the control performance when the boundary condition is changed.

1. 서 론

소음 제어를 한다는 것은 파동 방정식과 경계 조건을 만족하는 관심 공간내의 음장을 청취자(수음자)의 입장에서 원하는 형태로 구현함을 의미한다. 이는 음장을 수동적으로든 능동적으로든 제어하기 위해서는 경계 조건의 변경을 통해서 원하는 음장을 획득할 수 있다는 논리와도 동일하다.

음장을 능동적으로 제어한다는 것은 원음장(primary sound field)에 대해서 제어 음원(control source)을 적절히 구동하여 원하는 정숙 공간(quiet zone)을 형성하는 방법이다. 이와 유사한 개념으로 경계 조건을 흡음재(absorption material)와 같은 제어 재료(control material)를 이용하여 정숙 공간을 얻을 수도 있다. 이러한 방법을 능동 소음 제어와 구분하여 수동적인 소음 제어 방법이라 한다[1]. 전자는 엄밀한 의미에서는 경계 조건 차제의 변경이라기 보다는 파동의 소멸 간섭을 이용할 수 있도록 또 다른 음원을 경계에 더해준다고 볼 수 있다. 하지만, 후자의 경우는 공간내의 고유 주파수(resonance frequency)와 모드 형태(mode shape) 자체의 변화를 유도하기 위해서 원래 공동(cavity)의 벽면 임피던스(impedance) 혹은 어드미턴스(admittance) 값을 직접 변경하는 방법을 사용한다. 이는 제어 재료의 적절한 적용을 통해서 정숙 공간(zone of quiet)을 구현할 수 있음을 의미한다.

본 논문에서는 경계 조건의 변화로부터 얻을 수 있는 음장을 수학적으로 기술한다. 변경된 음장은 변경 전의 원래 음장과 그에 추가되는 항의 합으로 표현한다. 제어 재료가 공동 벽면에 부착되기 전의 음장과 후의 음장을 모드 밀도가 낮은 조건(low modal density)에서 모드의 개념을 통해서 각각 유도한다. 또한, 제어 재료 부착 후의 음장을 대표할 수 있는 가격 함수(음향 포텐셜 에너지)를 정의한 후, 그 가격 함수를 최소화 할 수 있는 물리적인 상황을 유도된 수식을 통해서 살펴본다.

2. 경계 조건의 전체적인 변경을 통한 음장의 변화

3차원 공동에 대한 일반해는 지배 방정식의 변수 분리로부터 구해질 수 있다. 이는 분리 좌표계(separable coordinate)에서 표현되는 해석적으로 표현 가능한 어떤 종류의 공동에 대해서도 같은 방법으로 해를 구할 수 있다는 이론적 배경에 근거를 두고 있다[2]. $\vec{x}=\vec{\xi}$에서 음원 강도(source strength) 1 인 단극 음원 가진이 있는 경우, 직사각 공동의 내부 음장은 경계 조건에 관계없이 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(\vec{x};\vec{\xi}) = -\sum_{m,n,p} \frac{\psi(k_{mnp},\vec{x})\psi(k_{mnp},\vec{\xi})}{V\Lambda_{mnp}(k^2-k_{mnp}^2)} \qquad (1)$$

* 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : shcho617@cais.kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3065, Fax : (042) 869-8220

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 정교수

*** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 BK21 교수

$$\psi(k_{mnp},\vec{x}) = (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x)$$
$$\times (A_n \sin k_n y + B_n \cos k_n y)$$
$$\times (A_p \sin k_p z + B_p \cos k_p z)$$

ψ는 공동 내부의 음향 모드를, $\vec{x}$는 공간내의 한 점 (x,y,z), $\vec{\xi}$는 가진 위치를 나타낸다. 아래 첨자 m,n,p은 각각 x,y,z 방향으로의 모드수(mode number)를 나타낸다. Λ_{mnp}는 정규화 계수(normalized factor)로서

$$\Lambda_{mnp} = \frac{1}{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_p} \tag{2}$$

로 표현되며, $i=0$일 때 $\varepsilon_i = 1$, $i \geq 1$ 일 때 $\varepsilon_i = 2$인 관계가 성립한다. 일반해 식 (1)에서 파수(wave number) k_i $(i=m,n,p)$는 경계 조건으로부터 유도되는 식 (3)으로부터 구할 수 있다.

$$\alpha k_i - k_i^2 \tan k_i l - \alpha\beta \tan k_i l - \beta k_i = 0, \quad i = m,n,p$$
$$\alpha = -jk\frac{\rho c}{Z_{d0}}, \quad \beta = jk\frac{\rho c}{Z_{dl}}, \quad d = x,y,z \tag{3}$$

식 (3)에서 경계 조건을 만족하는 파수는 복소수(complex number)이다. 왜냐하면, 경계 조건을 표현하는 음향 임피던스가 레지스턴스(resistance)와 리액턴스(reactance)로 이루어지는 복소수이기 때문이다. 또한, 식 (3)은 주파수에 따라서도 변화하게 됨으로써 고유 함수(eigenfunction)와 고유치(eigenvalue)는 주파수의 함수가 된다. 이는 자유 경계 조건(pressure free boundary condition)이나 강체 경계 조건(velocity free boundary condition)에서의 고유 모드와 고유치가 주파수와 무관한 것과는 다른, 일반적인 경계 조건을 가지는 경우에만 해당하는 특성이라고 할 수 있다. 식 (1)에서 계수 A_i, B_i $(i=m,n,p)$는 $\vec{x} = \vec{\xi}$에서의 그린 함수의 연속 조건을 통해서 구할 수 있다. 1차원 공동이든 3차원 공동이든 각 경계면(1차원의 경우는 2개, 3차원의 경우는 6개의 경계)에서의 임피던스 값이 일정한 경우는 경계 조건을 만족하는 음향 모드를 사용해서 그린 함수를 구할 수 있으며, 이는 경계 조건이 어떤 값을 가지더라도 일의적으로 그림 함수를 유도할 수 있다는 말이다.

3. 경계 조건의 일부 변경을 통한 공동 내부 음장의 변화

공동 내부의 경계 조건의 특성이 각 경계면에서 일정한 경우는 경계 조건을 만족하는 파수를 정확히 구하는 것으로 공간해를 구할 수 있다. 이에 비해 경계의 일부가 다른 임피던스로 대치되었을 경우는 같은 방법으로는 해를 구할 수 없다. 이는 하나의 경계면 상에서 여러 값의 임피던스를 가지기 때문에 대수 방정식의 형태로 파수를 구할 수 없다. 한 경계면 내에서의 일부가 다른 임피던스 값을 가지게 되면, 경계에서의 특성을 적분식의 형태로 나타낼 수 있다. 3장에서는 경계 조건의 일부 변경이 공동 내부의 고유치와 고유 모드를 어떻게 변경시키는지 수학적으로 유도한다. 이는 임의의 위치와 크기를 가지는 임피던스 패치(impedance patch)를 부착했을 경우의 공동 내부 음향 특성을 예측할 수 있는 이론적인 근거를 제시한다. 또한, 실제 계산 상의 난점과 근사해에 대해서도 고찰한다.

3.1 균일하지 않은 경계 조건을 가지는 직사각 공동의 내부 음장

경계에서의 음향 임피던스의 비균일성(nonuniformity)은 균일한 특성을 가지는 공동(2장 참고)에서의 고유 모드와 고유치에 어떤 차이값을 가감함으로써 계산되어질 수 있다. 수학적 표현의 단순함을 위해서 경계가 모두 강체인 것으로부터 시작하여, 임의의 위치에 임의의 크기로 임피던스 패치가 부착되어 경계가 비균일해질 때 고유 모드와 고유치는 어떻게 변해가는지를 살펴본다. 혼동을 피하기 위하여 강체 경계 조건인 공동과 그렇지 않은 공동에서의 음향 특성 표기를 표 1과 같이 정의하고 따르기로 한다.

비균일한 경계로 이루어진 공동 내부 음장의 표현은 키르히호프-헬름홀쯔 적분 방정식(Kirchhoff-Helmholtz Integral Equation)으로부터 얻어진다.

$$p_\omega(\vec{r}) = \iint_S \left[G_\omega(\vec{r};\vec{r}_s)\frac{\partial}{\partial n_s}p_\omega(\vec{r}_s) - p_\omega(\vec{r}_s)\frac{\partial}{\partial n_s}G_\omega(\vec{r};\vec{r}_s) \right] dS \tag{4}$$

식 (4)에서 p_ω는 공동 내부 음압, G_ω는 그린 함수를 나타내며, 아래 첨자 ω는 주파수의 함수임을 나타낸다. S는 적분을 수행할 경계의 면적을 나타내며, $\frac{\partial}{\partial n_s}$는 경계에 수직한 방향으로의 미분을 나타낸다. $\vec{r}$은 공동 내부의 한 점(field point)을 나타내고, $\vec{r}_s$는 경계면상의 한 점(surface point)을 나타낸다. 키르히호프-헬름홀쯔 적분 방정식은 경계에서의 음압과 속도가 주어진 경우, 어

떠한 그린 함수 G_ω를 사용하더라도 공간 내의 음압 p_ω를 구할 수 있음을 의미한다. 이는 디락 델타 함수 형태의 가진에 의한 음압의 크기를 나타내는 그린 함수 G_ω를 물리적 의미의 선호도에 따라 사용자가 선택하여 결정할 수 있음을 말하고 있다. 예를 들어, G_ω를 모드합(modal summation)의 형태로 표현하여 비강체 경계 조건을 가지는 공동 내부 음장을 살펴본다면, 각 모드별로 강체 경계 조건의 공동 내부 음장과 비교할 수 있다는 것이다. 본 논문에서는 이러한 사실을 근거로 하여, 강체 경계 조건을 가지는 공동 내부 음장을 모드합의 형태로 표현하고, 이를 이용하여 비강체 경계 조건에서의 내부 음장 변화를 수학적으로 표현한다.

모든 경계가 강체인 공동의 지배 방정식과 경계 조건은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\nabla^2\phi_{mnp}+\eta^2_{mnp}\phi_{mnp}=0 \text{ within } R \tag{5}$$

$$\nabla\phi_{mnp}=0 \text{ on } S \tag{6}$$

R과 S는 각각 공동 내부와 경계를 나타낸다. η_{mnp}는 고유치(eigenvalue)를 나타내고, ϕ_{mnp}는 고유 함수(eigenfunction)를 나타낸다. 고유 함수 ϕ_{mnp}는 직교 성질을 만족하여 식 (7)와 같이 표현할 수 있다.

$$\iiint\phi^2_{mnp}dV=V\Lambda_{mnp} \tag{7}$$

V는 전체 공간의 부피를 나타내며, Λ_{mnp}는 정규화 계수(normalized factor)이다.

식 (5)와 (6)으로 표현되는 강체벽 경계 조건을 만족하는 공동의 강제 응답(forced response)은 그린 함수로서 식 (8)의 해(solution)라고 볼 수 있다.

$$\nabla^2G_K+K_{MNP}G_K=-\delta(\vec r-\vec r_0) \tag{8}$$

$\vec r_0$는 음원의 위치를 나타낸다. 식 (8)의 해는 공간 내의 음원 강도(source strength) 1인 단극 음원(monopole)이 생성시키는 음장이라고 이해할 수 있다. 이는 식 (5)와 (6)에서 사용된 고유 함수와 고유치를 이용하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_K(\vec r;\vec r_0)=\sum_{m,n,p}\frac{\phi_{mnp}(\vec r_0)\phi_{mnp}(\vec r_0)}{V\Lambda_{mnp}(\eta^2_{mnp}-K_{MNP}{}^2)} \tag{9}$$

식 (4)과 식 (9)를 이용하면, 경계 조건이 일부 변경된 직사각 공동에서의 음장 변화를 표현할 수 있으며 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi_{MNP}(\omega,\vec r)=\phi_{MNP}(\vec r)+ik\sum_{\substack{m,n,p\\ \neq M,N,P}}\left[\iint_{S_\beta}\frac{\phi_{mnp}(\vec r_s)\beta(\vec r_s)\psi_{MNP}(\vec r_s)}{V\Lambda_{mnp}(\eta^2_{mnp}-K^2_{MNP})}dS_\beta\right]\phi_{mnp}(\vec r) \tag{10}$$

식 (10)에서 β는 비 어드미턴스(specific admittance)로서 공기의 특성 임피던스(characteristic impedance)를 경계에서의 음향 임피던스 Z_s로 나눈 값이다. 이는 제어 재료의 특성 중의 하나로서 파동의 입장에서 전파하는 매질에 비해서 경계에서의 임피던스가 얼마나 다른가를 평가하는 값이라 볼 수 있다. 식 (10)을 좀 더 간결하게 표현하면,

$$\psi_{MNP}(\omega,\vec r)=\phi_{MNP}+ik\iint_{S_\beta}G_{MNP}(\vec r;\vec r_s)\beta(\vec r_s)\phi_{MNP}(\vec r_s)dS_\beta \tag{11}$$

$$G_{MNP}(\vec r;\vec r_s)=\sum_{\substack{m,n,p\\ \neq M,N,P}}\frac{\phi_{mnp}(\vec r)\phi_{mnp}(\vec r_s)}{V\Lambda_{mnp}(\eta^2_{mnp}-K^2_{MNP})}$$

와 같이 표현할 수 있는데, $G_{MNP}(\vec r;\vec r_s)$는 (M,N,P)번째 모드를 제외한 다른 모드들의 합을 나타내는 값이다. S_β는 비 어드미턴스가 0(강체벽)인 것에

표 1. 강체 경계 조건과 비강체 경계 조건인 공동에서의 음향 특성 표기

	강체벽 공동	비강체벽 공동
고유 모드	ϕ_{mnp}	ψ_{mnp}
고유치	η_{mnp}	K_{mnp}
지배 방정식	$\nabla^2\phi_{mnp}+\eta^2_{mnp}\phi_{mnp}=0$	$\nabla^2\psi_{mnp}+K^2_{mnp}\psi_{mnp}=0$
경계 조건	$\nabla\phi_{mnp}=0$	$\nabla\psi_{mnp}=ik\left(\frac{\rho c}{z_s}\right)\psi_{mnp}$
강제 응답	$G_\omega(\vec r;\vec\xi)=\sum_{m,n,p}\frac{\phi_{mnp}(\omega,\vec r)\phi_{mnp}(\omega,\vec\xi)}{V\Lambda_{mnp}(\eta^2_{mnp}-k^2)}$	$G_\omega(\vec r;\vec\xi)=\sum_{m,n,p}\frac{\psi_{mnp}(\omega,\vec r)\psi_{mnp}(\omega,\vec\xi)}{V\Lambda_{mnp}(K^2_{mnp}-k^2)}$

서 β로 변경된 경계의 면적을 의미한다. 식 (10)과 (11)의 물리적인 의미를 살펴보면, 경계 조건의 일부 변경을 통해서 직사각 공동의 (M,N,P)번째 모드의 변화량을 경계 면적 적분의 형태로 표현하였음을 알 수 있다. 그러나, 변화된 음향 모드 $\psi_{MNP}(\omega,\vec{r})$를 구하기 위해서는 필연적으로 경계에서의 $\psi_{MNP}(\omega,\vec{r}_s)$를 알아야만 하는 파라독스(paradox)에 빠지게 된다. 이는 적분 방정식을 이용하여 표현한 음장이 완전한 형태의 해가 아니라, 지배 방정식과 경계 조건을 모두 포함하는 또 다른 형태의 방정식임을 의미한다. 일반적으로 음향과 관련된 적분 방정식은 경계 요소법(boundary element method)을 사용하여 풀 수가 있다. 하지만, 주파수가 증가할수록 경계 요소의 크기가 작아져야하고, 그에 따라 방정식을 이산화하여 표현한 행렬의 크기가 기하급수적으로 증가하는 단점이 있다. 따라서, 본 논문에서는 낮은 모드 밀도를 유지하면서도 높은 주파수까지도 계산가능하도록 식 (11)의 근사해를 구하는데 주안점을 둔다. 근사해를 구하는데 사용하는 하나의 방법은 경계에서의 $\psi_{MNP}(\omega,\vec{r}_s)$를 강체벽일 때의 $\phi_{MNP}(\omega,\vec{r}_s)$의 상수배라고 가정하는 것이다.

$$\psi_{MNP}(\omega,\vec{r}_s)=A\phi_{MNP}(\omega,\vec{r}_s) \tag{12}$$

식 (12)를 식 (11)에 대입하고, 양변에 변분을 취하여 정리하면,

$$A=\left(1-ik\frac{\int_{S_\beta}\phi_{MNP}\beta dS_\beta\int_{S_\beta}G_{MNP}\beta\phi_{MNP}dS_\beta}{\int_{S_\beta}\phi_{MNP}\beta\phi_{MNP}dS_\beta}\right)^{-1} \tag{13}$$

와 같이 구할 수 있다. 따라서, 변경된 고유 함수와 고유치를 아래와 같이 표현가능하다.

$$\psi_{MNP}(\omega)\approx\phi_{MNP}-ikA\iint_{S_\beta}G_{MNP}\beta\phi_{MNP}dS_\beta \tag{14}$$

$$K_{MNP}(\omega)\approx\eta_{MNP}-\frac{ikA}{2V\Lambda_{MNP}\eta_{MNP}}\iint_{S_\beta}\phi_{MNP}^2\beta dS_\beta \tag{15}$$

식 (14)과 (15)는 경계 조건의 일부 변경을 통해서 변화된 공동 내부 음장을 나타내는 고유 함수와 고유치를 표현하고 있다. 이는 경계 조건의 변화로부터 발생된 내부 공명 주파수와 모드 함수의 변화량을 정량화한 것이라 볼 수 있다. 그러나, 변경된 고유치와 고유 함수를 계산할 때에는 식 (13)~(15)를 서로 연립하여 풀어야하는 난점이 있음을 주의해야 한다.

이후의 표기를 간소화하기 위해 식 (14)를

$$\psi_{MNP}(\omega)\approx\phi_{MNP}+\gamma_{MNP} \tag{16}$$

와 같이 나타내기로 한다. 여기서, γ_{MNP}는 식 (14)의 오른쪽 두번째 항을 나타내는 것으로서 경계 조건 변화에 따른 고유 모드의 변화량을 나타내는 값이다.

4. 변경된 음향 모드를 이용한 공동 내부 음향 에너지의 계산

4.1 가격 함수의 설정

본 논문에서는 경계 조건의 변화를 통한 공동 내부 음장의 변화를 나타내는 대표 물리량으로서, 공동 내부의 음향 포텐셜 에너지를 예로 들어 설명한다. 음향 포텐셜 에너지는 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$E_p^t=\frac{1}{V_{QZ}}\int_{QZ}\left|p^t(\vec{r})\right|^2dV_{QZ} \tag{17}$$

V_{QZ}는 정숙 공간의 부피, 아래 첨자 p는 가격 함수가 음향 포텐셜(potential) 에너지임을 의미하고, 위 첨자 t는 경계 조건 변화 전, 후의 음장을 합한 것임을 의미한다. 따라서, 적분식 안의 음압은 식 (18)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}p^t(\vec{r})&=\sum_{n=1}^{N}b_n\psi_n\\&=\overline{\Psi B}\end{aligned} \tag{18}$$

$\overline{\Psi}=[\psi_1\ \psi_2\ \Lambda\ \psi_N]$, $\overline{B}=[b_1\ b_2\ \Lambda\ b_N]^T$

c_n은 각 모드들의 기여도를 나타내는 모드 계수이며, ψ_n은 변경된 모드 함수를 나타낸다. 위 첨자 T는 전치(transpose)를 나타낸다. 대문자 위의 막대는 벡터량임을 의미한다. 식 (16)으로부터 변경된 모드 ψ_n은 $\phi_n+\gamma_n$이므로 식 (18)은 아래와 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$p^t(\vec{r})=(\overline{\Phi}+\overline{\Gamma})\overline{B} \tag{19}$$

$\overline{\Phi}=[\phi_1\ \phi_2\ \Lambda\ \phi_N]$, $\overline{\Gamma}=[\gamma_1\ \gamma_2\ \Lambda\ \gamma_N]$

식 (19)를 이용하면 음향 포텐셜 에너지를 강체벽 공동의 모드 함수에 의한 것과 경계 조건 변화에 의한 것으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}E_p^t&=\overline{B}^H\left[\int_{QZ}\overline{\Phi}^H\overline{\Phi}dV_{QZ}\right]\overline{B}\\&\quad+\overline{B}^H\left[\int_{QZ}(\overline{\Phi}^H\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}^H\overline{\Phi}+\overline{\Gamma}^H\overline{\Gamma})dV_{QZ}\right]\overline{B}\\&=\overline{B}^H\overline{WB}+\overline{B}^H\overline{CB}\\&=E_p^p+E_p^s\end{aligned} \tag{20}$$

위 첨자 H는 공액·전치(conjugate transpose) 행렬임을 나타낸다. 여기서, E_p^p는 경계 조건이 변하

기 전의 음장을 나타내는 모드로 구성된 음향 포텐셜 에너지, E_p^s는 경계 조건이 변하고 난 후의 음장의 변화로부터 유도된 음향 포텐셜 에너지를 나타낸다.

4.2 음향 에너지 제어 성능

음향 포텐셜 에너지를 제어한다는 관점에서의 성능 제어 전,후의 에너지의 비를 보는 것이 타당할 것이다. 왜냐하면, 절대적인 차이는 원래 시스템이 가지고 있던 초기 에너지에 대해서 의미가 달라지기 때문이다. 예를 들어, 초기 에너지가 10J(*Joul*)이었던 시스템에서 5J 줄이는 노력과 초기에 100J 의 에너지를 가진 시스템에서 5J 줄이는 노력은 다르기 때문이다. 따라서, 초기 음장에 대한 상대적인 개념에서 제어 성능을 판단해야만 올바른 제어 성능을 나타내는 지수로서 의미가 있다고 볼 수 있다. 이런 관점에서 본 논문에서는 식 (21)과 같은 무차원 수를 정의한다.

$$R_p = \frac{E_p^s}{E_p^p} \tag{21}$$

측정하는 입장에서의 음향 포텐셜 에너지는 측정점의 개수만큼의 공간 평균값이 사용될 것이므로 $V_{QZ} = \int_V \sum_{l=1}^{L} \delta(\vec{r} - \vec{r}_l^m) dV$ 와 같이 나타낼 수 있다. 여기서, $\vec{r}_l^m$은 각 마이크로폰의 위치 벡터이다. 이를 사용하면 음향 포텐셜 에너지를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_p^t &= \overline{B}^H \overline{\Phi}^{m^H} \overline{\Phi}^m \overline{B} \\ &\quad + \overline{B}^H (\overline{\Phi}^{m^H} \overline{\Gamma}^m + \overline{\Gamma}^{m^H} \overline{\Phi}^m + \overline{\Gamma}^{m^H} \overline{\Gamma}^m) \overline{B} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\overline{\Phi}^m = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 & \Lambda & \phi_N^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 & \Lambda & \phi_N^2 \\ M & M & O & M \\ \phi_1^L & \phi_2^L & \Lambda & \phi_N^L \end{bmatrix} \quad \overline{\Gamma}^m = \begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_2^1 & \Lambda & \gamma_N^1 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \Lambda & \gamma_N^2 \\ M & M & O & M \\ \gamma_1^L & \gamma_2^L & \Lambda & \gamma_N^L \end{bmatrix}$$

위 첨자 m은 벡터 $\overline{\Phi}$, $\overline{\Gamma}$를 L개의 마이크로폰 지점에서 각각 측정한 것을 요소로 하는 행렬임을 나타낸다. 식 (22)를 사용하여 제어 성능 지수를 표현하면

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{\overline{B}^H (\overline{\Phi}^{m^H} \overline{\Gamma}^m + \overline{\Gamma}^{m^H} \overline{\Phi}^m + \overline{\Gamma}^{m^H} \overline{\Gamma}^m) \overline{B}}{\overline{B}^H \overline{\Phi}^{m^H} \overline{\Phi}^m \overline{B}} \\ &= \frac{\overline{B}^H \overline{CB}}{\overline{B}^H \overline{WB}} \end{aligned} \tag{23}$$

$\overline{W} = \overline{B}^H \overline{\Phi}^{m^H} \overline{\Phi}^m \overline{B}$, $\overline{C} = \overline{\Phi}^{m^H} \overline{\Gamma}^m + \overline{\Gamma}^{m^H} \overline{\Phi}^m + \overline{\Gamma}^{m^H} \overline{\Gamma}^m$ 와 같이 된다. 식 (23)을 살펴보면, 경계 조건이 변하기 전의 고유 모드들로 이루어진 분모 $\overline{B}^H \overline{WB}$에 대해서 분자 $\overline{B}^H \overline{CB}$의 크기가 작으면 작을수록 전체 음향 포텐셜 에너지 E_p^t가 작아질 것임을 알 수 있다. 여기서, 식 (23)을 다른 관점에서 살펴보면, 일정한 $\overline{B}^H \overline{WB}$에 대해서 $\overline{B}^H \overline{CB}$가 가질 수 있는 값의 범위는 주어진 경계 조건상에서 얼마이며, 그 값의 범위가 의미하는 것이 무엇인지에 대한 의문이 생길 수 있다. 이를 수식으로 표현하면

$$J = \overline{B}^H \overline{CB} + \lambda (E_p^p - \overline{B}^H \overline{WB}) \tag{24}$$

과 같이 표현할 수 있다. 식 (24)에서 λ는 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)이다. $E_p^p = \overline{B}^H \overline{WB}$인 제한 조건을 만족하면서 가격 함수 J가 가질 수 있는 값의 범위를 구하기 위해서는 J의 극점을 살펴보면 된다. 이를 위해 $\frac{\partial J}{\partial \overline{B}} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$을 취하면

$$\frac{\partial J}{\partial \overline{B}} = \overline{CB} - \lambda \overline{WB} = 0 \tag{25-1}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = E_p^p - \overline{B}^H \overline{WB} = 0 \tag{25-2}$$

을 구할 수 있으며, J의 극대, 극소값이 존재하는 $\overline{B}$의 필요 조건은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{CB} = \lambda \overline{WB} \tag{26-1}$$

$$E_p^p = \overline{B}^H \overline{WB} \tag{26-2}$$

$\overline{q} = \overline{W}^{\frac{1}{2}} \overline{B}$라 하면 식 (26)은 식 (27)과 같은 고유치 문제 형태로 바뀌게 된다[3]. 이 때 $\overline{q}$는 각 마이크로폰에서 측정되는 음향 포텐셜 에너지 크기의 1/2 승을 나타내는 $(L \times 1)$행렬이며, $\overline{q}^H \overline{q}$는 공간 내의 음향 포텐셜 에너지를 나타낸다.

$$\overline{W}^{-\frac{1}{2}H} \overline{C} \overline{W}^{-\frac{1}{2}} \overline{q} = \lambda \overline{q} \tag{27-1}$$

$$\overline{q}^H \overline{q} = E_p^p \tag{27-2}$$

$\overline{W}^{-\frac{1}{2}H} \overline{C} \overline{W}^{-\frac{1}{2}}$는 $(L \times L)$행렬이므로 L개의 고유치(λ_l)와 고유 벡터$(\overline{q}_l)$를 가진다. 따라서, $\overline{q}$를 고유 벡터 $\overline{q}_l$을 이용하여 표현하면

$$\overline{q} = \sum_{l=1}^{L} d_l \overline{q}_l , \quad \text{constraint} \quad \sum_{l=1}^{L} |d_l|^2 = 1 \tag{28}$$

과 같이 표현할 수 있다. 이 때, d_l은 $\overline{q}$를 구성하는 $\overline{q}_l$의 기여도를 나타낸다. 식 (27)을 식 (24)에 대입하고 식 (28)을 이용하면,

$$E_p^s = (|d_1|^2 \lambda_1 + |d_2|^2 \lambda_2 + \Lambda + |d_L|^2 \lambda_L) E_p^p \tag{29}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 편의상 고유치의 크기가 작은 순서대로 번호를 붙이기로 한다. 식 (29)의 물리적인 의미는 L개의 마이크로폰으로 공간상의 음향 포텐셜 에너지를 측정하였을 경우 E_p^s가 가질 수 있는 값의 범위는

$$\lambda_1 E_p^p \le E_p^s \le \lambda_L E_p^p \tag{30}$$

로 나타남을 의미한다. 여기서, 고유치 λ_l을 바꿀 수 있는 조건은 경계 조건임을 알 수 있으며, 주어진 경계 조건 하에서 측정점의 위치에 따른 음향 포텐셜 에너지의 기대값은

$$E_p^t = \left(1 + \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\right)E_p^p \tag{31}$$

와 같이 표현할 수 있다. 식 (31)을 다른 관점에서 살펴보면,

$$(\lambda_1 + 1)E_p^p \le E_p^t \le (\lambda_L + 1)E_p^p \tag{32}$$

와 같이 나타낼 수 있는데, 이 식으로부터 음향 에너지 레벨은

$$10\log_{10}\frac{(\lambda_1+1)E_p^p}{E_{ref}} \le 10\log_{10}\frac{E_p^t}{E_{ref}} \le 10\log_{10}\frac{(\lambda_L+1)E_p^p}{E_{ref}} \tag{33}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식 (33)으로부터 알 수 있는 물리적 상황은, 경계 조건에 의해 결정되는 고유치 λ_l이 -1이 되도록 경계 조건을 변경하면 최대의 제어 효과를 거둘 수 있음을 알 수 있다. 따라서, 경계 조건 변화에 의한 음장 제어 성능을 나타내는 값으로 식 (33)을 생각할 수 있다.

$$Control\ Performnce = 10\log_{10}(\lambda + 1) \tag{33}$$

5. 결 론

본 논문에서는 공동 내부 경계면의 일부가 다른 임피던스 패치로 변경되었을 경우, 변화된 고유치와 고유 함수를 구하였다. 이는 경계 조건이 비균일한 공동의 내부 음장을 예측할 수 있는 이론적 배경을 제시한다. 변화된 공동 내부 음장을 대표하는 물리량으로 음향 포텐셜 에너지를 정의하고, 제어 성능을 나타내는 지수(index)를 제안하였다. 이로부터 수동 소음 제어의 한 방법으로 경계 조건을 변화시킬 때, 음향 포텐셜 에너지를 최소화 시키기 위한 방법을 수학적으로 유도하였다.

후 기

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)의 국가지정 연구실(NRL) 사업과 교육부의 두뇌한국21(BK21) 사업의 지원으로 수행되었음을 밝히며, 지원에 감사드립니다.

참고문헌

(1) 남경욱, 박주배, 김양한, 2001, "흡음재 배치를 이용한 정숙 공간 형성 방법," 한국소음진동공학회지, 제 11 권, 제 2 호, pp. 221~225.

(2) P. M. Morse and K. U. Ingard, 1986, Theoretical Acoustics, Princeton University Press, Princeton New Jersey, pp.554~563.

(3) Yakov Ben-Heim, 1996, Robust Reliability in the Mechanical Sciences, Springer-Verlag, Chapter 3.