

## 자유진동 해석에서 수치적분기법의 수치적평가

○ 송 주 한\* · 안 대 순\*\* · 오 상 진\*\*\* · 박 광 규\*\*\*\*

### Numerical Evaluation of Various Numerical Integration Methods in Free Vibration Analysis

Song, Ju Han · An, Dae Soon · Oh, Sang Jin · Park, Kwang Kyou

#### ABSTRACT

Numerical analysis is sometimes used to solve the problems in the engineering and natural science fields. On this reason, the faster, more practical system in computing the numerical solution is required. This paper deals with the numerical evaluation of various numerical integration methods which is frequently used in the engineering fields. This paper choices four integration methods such as Euler method, Heun's method, Runge-Kutta method and Gill's method for evaluating the each integration method. In numerical examples, the free vibration problem on an elastic foundation is chosen. As the numerical results, the natural frequencies and the running time are obtained, and these results are compared to examine the practicality of integration methods.

#### 1. 서 론

컴퓨터의 기계적인 발전에 따라 공학과 자연과학에서 여러 가지 수치해석기법들이 많이 이용되고 있다. 이에 따라 많은 동적 시스템의 시뮬레이션에서 보다 빠른 수치해석방법이나, 작은 컴퓨터 저장공간을 필요로 하는 정확하고 효율적인 수치해석 시스템이 요구되고 있다. 이러한 요구에 부응하여 여러 가지 수치해석의 효율성에 대한 검증방법이 연구되고 있다. 본 논문에서는 그 중에서도 수치적분에 이용되고 있는 일반적인 방법들의 효율성을 비교 검증하는 데 연구목적이 있다.

수치적분은 원시함수의 형태를 알지 못하거나 또는 원시함수를 쉽게 구할 수 없는 함수의 정적

분값을 계산하는 경우에 사용되는 방법이다. 본 논문에서는 Euler method, Heun's method, Runge-Kutta method, Gill's method를 이용하여 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동을 해석함으로써 각 수치적분법의 효율성을 검증하고자 한다.

공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler<sup>(1)</sup>가 제안한 탄성지반모형이다. 탄성지반모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 지반모형으로 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 공학분야에서 이용되고 있어 본 논문에서 수치적분의 효율성을 검증하기 위한 대상부재로 선택하였다.

본 논문에서는 이와 같은 연구배경을 토대로 각 수치적분법의 정확성 및 효율성을 정확해(closed solution)와 computing time을 이용하여 검증하고, 단계길이에 따른 computing time을 측정하여 각 수치적분법의 효율성을 검증한다.

\* 제일건설

\*\* (유) 신한개발 기술단

\*\*\* 담양대학교 토탐과 교수

\*\*\*\* 대전대학교 토탐공학과 교수

## 2. 수치적분 방법

수치적분 방법에는 여러 가지 방법이 있으나, 본 연구에서는 Euler method, Heun's method, Runge-Kutta method, Gill's method에 대하여 설명하고 이들에 대한 효율성을 비교 분석한다. 각각의 방법에 대한 수치적분법을 설명하면 다음과 같다.<sup>(2-3)</sup>

### 2.1 Euler's method

Euler's method에서는 Fig. 1에서와 같이 초기 점  $(x_i, y_i)$  점으로부터 한 단계길이  $h$  만큼 전진한 좌표  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ 은 다음 식과 같이 구한다.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (1)$$

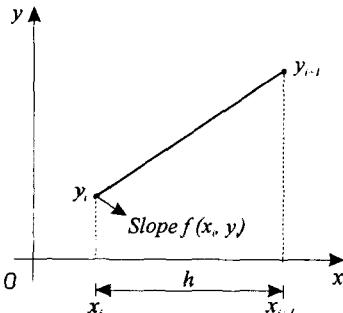


Fig. 1. Euler's method procedures

### 2.2 Heun's method

Heun's method는 Fig. 2에서와 같이 본질적으로 Euler's method를 연속적으로 두 번 시행한 결과와 같으며, 따라서 한 단계길이  $h$  만큼 전진한 좌표값은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

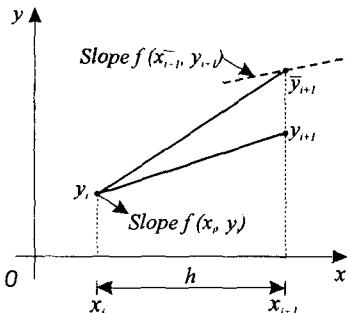


Fig. 2. Heun's method procedures

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \quad (2)$$

여기서  $\bar{y}_{i+1}$ 은 식 (1)과 같다.

### 2.3 Runge-Kutta method

Runge-Kutta method는 초기치의  $x$  좌표  $x_i$ 로부터 한 단계길이  $h$  만큼 증가한  $x_{i+1}$ 의 좌표에서  $y$  값  $y_{i+1}$ 을 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + mh \\ &= y_i + \frac{m_1 + 2(m_2 + m_3) + m_4}{6} h \end{aligned} \quad (3)$$

위의 식에서  $m$ 은 초기치  $(x_i, y_i)$ 에서 평균 기울기이며,  $m_1 \sim m_4$ 는 초기치 및 반 단계길이 또는 한 단계길이 전진한  $x$  좌표에서 기울기이며 다음 식들과 같다.

$$m_1 = f(x_i, y_i) \quad (4)$$

$$m_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}m_1h\right) \quad (5)$$

$$m_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}m_2h\right) \quad (6)$$

$$m_4 = f(x_i + h, y_i + m_3h) \quad (7)$$

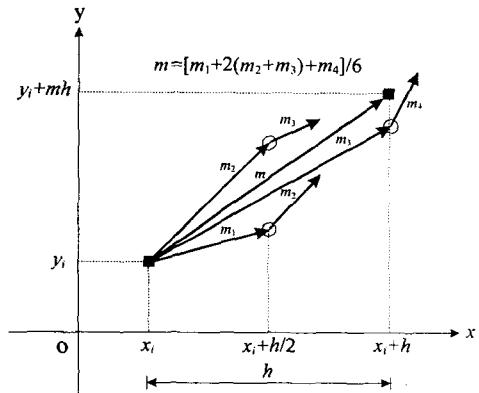


Fig. 3. Runge-Kutta method procedures

### 2.4 Gill's method

Gill's method는 Runge-Kutta method와 유사한 방법으로 다음 식 (8)과 같이 정의된다.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[ m_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)m_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)m_3 + m_4 \right] \quad (8)$$

위의 식에서  $m$ 은 초기치  $(x_i, y_i)$ 에서 평균 기울기이며,  $m_1 \sim m_4$ 는 초기치 및 반 단계길이 또는 한 단계길이 전진한  $x$ 좌표에서 기울기이며 다음 식들과 같다.

$$m_1 = f(x_i, y_i) \quad (9)$$

$$m_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hm_1) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} m_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})hm_1 \\ &\quad + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})hm_2) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} m_4 &= f(x_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}hm_2 \\ &\quad + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})hm_3) \end{aligned} \quad (12)$$

### 3. 자유진동문제의 선택

앞에서 설명한 수치적분기법의 효율성을 비교하기 위하여 다음의 자유진동문제를 선택하여 그 효율성을 비교 분석한다.

Fig. 4는 지간길이가  $l$ 인 탄성지반 위에 놓인 보의 기하학적인 형상을 나타내고 있다. 이 그림에서 탄성지반은 무한개의 독립적인 스프링으로 모형화한 것이며, 여기서  $k$ 는 지반계수이다. 이러한 보에 대한 동정평형방정식은 다음 식 (13)과 같다.<sup>(4)</sup>

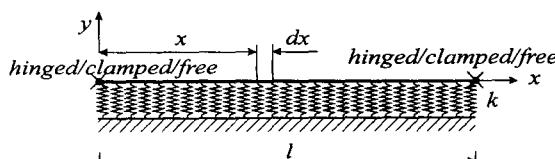


Fig. 4. Beam on Elastic foundation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) dx = -ky dx - \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (13)$$

위 식에서  $E$ 는 재료의 탄성계수,  $I$ ,  $A$  및  $\rho$ 는 각각 부재의 단면 2차 모멘트, 단면적 및 단위체적 당 질량이다. 식 (13)의 양변을  $dx$ 로 나누고, 등단면 보에 적용시키면 다음 식과 같이 정리된다.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky = -\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (14)$$

보가 조화진동한다고 가정하면 보에 발생하는 변위에 대한 조화진동식은 다음 식 (15)와 같다.

$$y_i = X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \quad (15)$$

위의 식에서  $X_i$ 는 조화진동의 진폭,  $p_i$ 는 고유진동수,  $A_i, B_i$ 는 상수이다.

식 (15)를 식 (14)에 대입하고 정리하면 다음 식 (16)과 같고, 이 식은 식 (17)과 같이 간략화하여 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{d^4 X_i}{dx^4} - (\rho A p_i^2 - k) X_i = 0 \quad (16)$$

$$EI \frac{d^4 X_i}{dx^4} - \left( \frac{p_i^2}{a^2} - \frac{k}{EI} \right) X_i = 0 \quad (17)$$

위의 식에서  $a = \sqrt{EI/\rho A}$ 이다.

본 연구의 단부조건은 회전, 고정 및 자유단을 고려하였으며, 먼저 회전지점의 경계조건은 다음과 같다.

$$X_i = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } x = l \text{에서} \quad (18)$$

$$\frac{d^2 X_i}{dx^2} = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } x = l \text{에서} \quad (19)$$

고정지점의 경계조건은 다음과 같다.

$$X_i = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } x = l \text{에서} \quad (20)$$

$$\frac{d X_i}{dx} = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } x = l \text{에서} \quad (21)$$

마지막으로 자유단의 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{d^2X_i}{dx^2} = 0, \quad x=0 \text{ 또는 } x=l \text{ 에서} \quad (22)$$

$$\frac{d^3X_i}{dx^3} = 0, \quad x=0 \text{ 또는 } x=l \text{ 에서} \quad (23)$$

미분방정식의 고유치인  $p_i$  값을 단순보인 경우에 대하여 정확해를 구하면 다음과 같다.<sup>(4)</sup>

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2 a}{l} \sqrt{1 + \frac{kl^4}{EIi^4 \pi^4}} \quad (24)$$

#### 4. 수치해석 결과 및 토의

식 (17)의 상미분방정식을 경계조건을 초기치로 하여 2장에서 설명한 수치적분법을 이용하여 고유진동수  $p_i$ 를 산출하고 정확해와 비교하였다. 이 논문에서 모든 보의 기하학적 변수값들을 무차원 단위로 수치해석하였다. 먼저  $k=0$  즉, 탄성지반 위에 놓여있지 않은 보의  $p_i$ 값을 다음 Table 1

에서 비교하였다. 참고로  $p_i$ 의 정확해는 각종 참고문헌<sup>(5)</sup>에 이미 널리 알려져 있다. 이 표에서 모든 수치해는 수치적분시 단계길이  $h=1/50$ 을 이용하여 산출하였다. 이 표에 보인바와 같이 수치해의 오차는 정확해와 비교하여 2.5% 이내에 있고, 그 정확성은 Runge-Kutta method, Gill's method, Euler method, Heun's method, Euler's method 순서임을 알 수 있다. 특히 Runge-Kutta method, Gill's method는 정확해에 매우 근접함을 알 수 있다.

Tabl 2는 탄성지반 위에 놓인 회전-회전 보에서 지반계수  $k$ 를 변화시키면서 각종 수치해석방법으로 고유진동수  $p_i$ 를 산출하고, 식 (24)로 나타낸 정확해와 비교한 것이다. 이 표에 보인바와 같이 수치해의 오차는 2.0% 이내이고, 정확성은 Runge-Kutta method, Gill's method, Heun's method, Euler method 순서임을 알 수 있다. 앞에서와 마찬가지로 Runge-Kutta method, Gill's method는 정확해에 매우 근접함을 알 수 있다.

Table 1. Comparison of results by the end constraints

End constraint	Method	Frequency Parameter, $p_i$				error
		$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	
Hinged hinged	Closed solution	9.87	39.48	88.83	157.91	-
	Euler	9.90	39.90	90.97	164.81	2.04
	Heun	9.88	39.58	89.36	159.59	0.50
	Rk4	9.87	39.48	88.83	157.92	0.00
	Gill	9.87	39.48	88.83	157.92	0.00
Hinged clamped	Closed solution	15.41	49.96	104.25	178.27	-
	Euler	15.48	50.64	107.22	187.10	2.40
	Heun	15.43	50.13	104.98	180.41	0.59
	Rk4	15.42	49.97	104.25	178.28	0.02
	Gill	15.42	49.97	104.25	178.28	0.02
Clamped clamped	Closed solution	22.37	61.67	120.90	199.86	-
	Euler	22.52	62.69	124.91	211.01	1.98
	Heun	22.41	61.93	121.89	202.55	0.49
	Rk4	22.37	61.67	120.91	199.88	0.01
	Gill	22.37	61.67	120.91	199.88	0.01
Clamped free	Closed solution	3.52	22.03	61.70	120.09	-
	Euler	3.52	22.15	62.74	124.91	1.56
	Heun	3.52	22.06	61.95	121.88	0.51
	Rk4	3.52	22.03	61.70	120.91	0.17
	Gill	3.52	22.03	61.70	120.91	0.17

Table 2. Comparison of results by the foundation parameter(simple beam)

Foundation parameter	Method	Frequency Parameter, $p_i$				error
		$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	
$k = 100$	Closed solution	14.05	40.73	89.39	158.23	-
	Euler	14.07	41.13	91.52	165.11	1.96
	Heun	14.05	40.83	89.91	159.90	0.47
	Rk4	14.05	40.73	89.39	158.24	0.00
	Gill	14.05	40.73	89.39	158.24	0.00
$k = 200$	Closed solution	17.25	41.94	89.95	158.55	-
	Euler	17.27	42.33	92.07	165.42	1.93
	Heun	17.25	42.03	90.47	160.22	0.46
	Rk4	17.25	41.94	89.95	158.56	0.00
	Gill	17.25	41.94	89.95	158.56	0.00
$k = 300$	Closed solution	19.94	43.11	90.50	158.86	-
	Euler	19.95	43.50	92.61	165.72	1.90
	Heun	19.94	43.21	91.02	160.53	0.46
	Rk4	19.94	43.11	90.50	158.87	0.00
	Gill	19.94	43.11	90.50	158.87	0.00

Table 3은 단계길이  $h$ 를 변화시키면서 각 방법들의 computing time을 비교한 것이다. 이 표에서 등분수는 단계길이의 역수 즉,  $1/h$ 이다. 이 표에서 computing time은 Euler method, Heun's method, Runge-Kutta method, Gill's method의 순서로 작은 것을 알 수 있다. 특히 Runge-Kutta method와 Gill's method는 정확성은 유사하나 computing time은 Gill's method가 더 큼을 알 수 있다.

Table 3. Comparison of computing time(sec) with changing the number of dividing element

Method	Number of the dividing element			
	51	101	151	201
Euler	3	4	5	7
Heun	7	12	17	22
Rk4	10	20	28	37
Gill	13	24	34	45

## 5. 결 론

본 논문은 구조해석에서 수치적분법의 수치적 평가에 관한 연구이다. 해석대상 모형을 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동문제를 선택하여 Euler method, Heun's method, Runge-Kutta method,

Gill's method의 4가지 방법으로 고유진동수를 산출하여 정확해와 비교하였다.

정확성에 있어서는 Runge-Kutta method와 Gill's method가 가장 좋았고, Heun's method, Euler method 순서로 우수하였다. 한편 computing time은 Euler method, Heun's method, Runge-Kutta method, Gill's method 순으로 작은 것을 알 수 있었다.

## 참고문헌

1. 이병구, 오상진, 이제만, 1998, "탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동", 한국전 산구조공학회 논문집, 제11권 제2호, pp.273-280.
2. Luther. H.A. and Wilkes. J.O., 1969, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc. pp. 361-363.
3. Chapra. S.C. and Canale. R.P., 1998, Numerical Mehthods for Engineerings, McGraw-Hill, pp. 675-717.
4. Timoshenko, Young and Weaver, 1974, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, Inc. pp. 455-458.
5. Pilkey. W.D., 1994, Stress, Strain and Structural Matrics, John Wiley & Sons, Inc. pp. 469.