

연속웨이블렛 변환에 의한 립쉬츠 지수 평가를 이용한 결함 진단 : 보의 진동모드를 대상으로

⁰홍진철* · 김윤영** · 이호철*** · 이용욱****

Damage Detection Using the Lipschitz Exponent Estimation by the Continuous Wavelet Transform : Applied to Vibration Mode Shapes in a Beam

J. -C. Hong, Y. Y. Kim, H. C. Lee and Y. W. Lee

Key Words: Damage Detection (결함진단), Mode Shapes (모드형상),
Lipschitz Exponent (립쉬츠 지수), Wavelet Transform (웨이블렛 변환)

Abstract

The objective of this paper is to show the effectiveness of the wavelet transform by means of its capability to estimate the Lipschitz exponent. In particular, we show that the magnitude of the Lipschitz exponent can be used as a useful tool estimating the damage extent. An effective method based on the Lipschitz exponent is proposed and we present the results investigated both numerically and experimentally. The continuous wavelet transform by a Mexican hat wavelet having two vanishing moments is utilized for the estimation of the Lipschitz exponent.

1. 서론

결함진단은 구조에 발생한 결함을 인지하고, 그 위치 및 심각성을 파악하는 것을 목적으로 한다. 근래에 모달 테스트의 상대적 용이성 때문에 고유진동수 및 모드형상 등의 모달 파라미터를 이용한 결함진단 기법이 광범위하게 연구되어 왔는데, 대부분의 모달 파라미터에 의한 진단 기법은 결함과 모달 파라미터간의 상관 관계를 이용한다. 그러나 모달 파라미터는 구조의 전반적인 거

동을 표현하므로, 국소적인 미세 결함에 대한 정보를 획득하는데 한계를 갖는다. 이를 극복하기 위해서 모달 파라미터를 이용한 정확하면서도 효율적인 진단 기법이 다양하게 고안되어 왔다.

Pandey 등^[1]은 모드형상의 유한차분에 의한 곡률 정보를 이용한 진단기법을 제안했으며, Maia 등^[2]은 이를 확장하여 변위의 전달함수로부터 곡률의 전달함수를 추출하여 이를 결함진단에 이용하였다. Ratcliffe^[3]는 비결함 보의 모드형상을 이용하지 않는 진단 기법을 제안했는데, 이는 결함을 포함한 보 모드형상의 라플라시안을 이용하는 것으로서 미세결함의 검출에 매우 효과적임을 밝힌바 있다. 그러나 측정 데이터가 잡음에 의해 오염되어 있을 경우 라플라시안의 계산은 심각한 오차를 발생시킨다고 알려져 있다.

최근들어 웨이블렛을 이용한 결함진단 기법이

* 서울대 기계항공공학부 대학원

** 서울대 기계항공공학부 교수

*** 삼성전기

**** 현대중공업

각광을 받고 있는데, 이는 웨이블릿 변환이 결함
과 관련된 국소적인 정보 추출에 매우 용이하기
때문이다. Liew 등^[4]은 해석적으로 얻어진 결함
보의 모드형상에 웨이블릿 변환을 적용하는 진단
기법을 제안하였고, Deng 등^[5]과 Wang 등^[6]은 진단
기법으로서의 이산웨이블릿 변환의 유용성을
검증하였다. 또한 Kim 등^[7]도 결함 보의 특이성
분석을 통해 이산웨이블릿 변환의 효율성을 모사
및 실험을 통해서 고찰한바 있다. 그러나 이런
기법들은 결함의 존재와 위치를 파악하는데 매우
유용하나, 결함의 정도(extent)에 대한 정보를 제
공하지 못한다.

최근 본 연구자들에 의해 모드형상의 연속웨이
블릿 변환을 통해 특이성의 차수를 표현하는 립
슈츠 지수(Lipschitz exponent)를 예측함으로써,
결함의 위치 및 정도를 파악하는 결함진단 기법이
새로 제안된 바 있다.^[8] 본 논문에서는 관련된 주
요 연구 내용을 소개하고, 실험 결과를 보여주고
자 한다. 립슈츠 지수는 결함부 부근에서 연속웨이
블릿 변환의 계수 최대(modulus maximum)를 추
출함으로써 평가 가능한데, 이를 위해서 소멸 모
멘트 2를 갖는 Mexican hat 웨이블릿이 사용하였
다. 수치 및 실험적 검증을 통해 보에서의 결함
의 위치 및 정도를 파악하는데 본 진단 기법이
매우 효과적으로 이용될 수 있음을 확인하였다.

2. 연속웨이블릿 변환과 립슈츠 지수

2.1 연속웨이블릿 변환

연속웨이블릿 변환은 특이점 등의 신호의 국소
적 정보를 추출하는 매우 효과적인 시간-주파수
기법이다. L_2 공간의 신호 $f(x)$ 에 대하여, 연
속웨이블릿 변환은 다음과 같이 정의된다.^[9,10]

$$\begin{aligned} Wf(u, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{u,s}^*(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{s}}\psi^*\left(\frac{x-u}{s}\right)dx \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)에서 $\psi(x)$ 는 다음과 같은 조건을 만족하는
모(mother) 웨이블릿 함수이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2)$$

여기서 $\psi(\omega)$ 는 모 웨이블릿의 푸리에 변환이
다. 식(2)의 존재는 다음과 같은 조건을 만족해야

한다.

$$\hat{\psi}(\omega) = 0, \quad \text{즉} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (3)$$

함수 $\psi_{u,s}(x)$ 는 모 웨이블릿 $\psi(x)$ 를 스케일 파
라미터 s 에 의해 스케일링(scaling)하고 위치 이
동(translation) 파라미터 u 에 의해 이동하여 얻어
진다.

2.2 립슈츠 지수

연속웨이블릿 변환은 함수의 국소적 정규성을
분석하는데 중요한 방법으로 사용될 수 있으며,
이 국소적 정규성은 립슈츠 지수에 의해 예측할
수 있다. 립슈츠 지수 α 는 다음과 같이 정의된
다. 만일 식 (4)처럼 상수 $K(>0)$ 와 m 차의 다항함
수 p_ν 가 존재한다면 함수 f 는 점 ν 에서 립슈츠
 α (≥ 0)라고 한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= p_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x) \\ |\varepsilon_\nu(x)| &\leq K|x - \nu|^\alpha \end{aligned} \quad (4)$$

예를 들어 $0 < \alpha < 1$ 라면 함수 f 는 점 ν 에서 미
분 불가능하다. 따라서 립슈츠 지수 α 는 $x = \nu$
에서 특이성의 차수를 분석하기 위해 사용될 수
있다.

일반적으로 구조에 결함이 존재할 경우 해당하
는 진동모드에는 결함과 관련된 특이점이 반영된
다. 이런 특이점은 위에서 소개된 립슈츠 지수의
개념에 의해 분석될 수 있다. 따라서 본 논문의
목적은 연속웨이블릿을 통해 립슈츠 지수를 예측
함으로써 구조의 결함을 진단하는 데 있다.

립슈츠 지수 예측을 위해 연속웨이블릿을 적용
함에 있어 웨이블릿의 소멸 모멘트의 개념이 중
요한 역할을 한다. 다음과 같은 조건을 만족할
때, 웨이블릿 함수 $\psi(x)$ 는 n 개의 소멸 모멘트를
갖는다고 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0 \quad \text{for } 0 \leq k < n \quad (5)$$

조건 (5)는 n 개의 소멸 모멘트를 갖는 웨이블릿
함수는 $n-1$ 차의 다항함수와 직교함을 의미한
다. 따라서 $n \geq \alpha$ 인 웨이블릿을 이용하여 식(4)
형태의 함수에 연속웨이블릿 변환을 수행할 경우
 $Wp_\nu(u, s) = 0$ 이므로 다음과 같은 결과를 얻는
다.

$$Wf(u, s) = W\varepsilon_\nu(u, s) \quad (6)$$

즉 f 의 연속웨이블렛 변환은 함수의 특이성을 반영하는 ε_ν 의 연속웨이블렛 변환이 된다.

함수 $f(x)$ 가 $x=\nu$ 에서 립쉬츠 $\alpha \leq n$ 를 이라고 하면, $x=\nu$ 부근에서 연속웨이블렛 변환 Wf 의 거동은 다음과 같은 특징을 갖는다.^[10,11]

$$|Wf(u, s)| \leq A's^{-\frac{\alpha+1}{2}} (1 + |\frac{u-\nu}{s}|^\alpha) \quad (A' > 0) \quad (7)$$

$x=\nu$ 의 cone of influence 부근에서 식 (7)은 다음과 같이 정리된다.

$$|Wf(u, s)| \leq As^{-\frac{\alpha+1}{2}} \quad (8)$$

립쉬츠 지수의 예측을 위해 식 (8)의 변형식으로 식 (9)가 일반적으로 사용된다.

$$\log_2 |Wf(u, s)| \leq \log_2 A + (\alpha + \frac{1}{2}) \log_2 s \quad (9)$$

립쉬츠 지수는 식 (9)를 이용하여, 웨이블렛 변환의 국소 계수 최대 선의 궤적을 분석함으로써 예측할 수 있다.

3. 웨이블렛 선택과 결함진단

연속 웨이블렛 변환에 의한 립쉬츠 지수 평가를 이용한 결함진단의 예로서 Fig. 1과 같이 특정 부위에서 두께가 변화하는 결함 보를 고려한다.

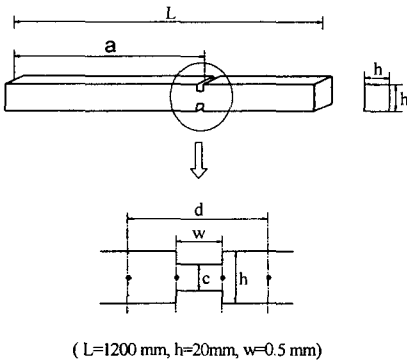


Fig. 1. A model for a damaged beam

본 장에서는 단순 오일러 (Euler) 보 이론을 사용하여 보의 결함 부위에서의 립쉬츠 지수의 범위를 유도하며, 이를 통해 립쉬츠 지수 예측을 위한 최적의 웨이블렛 선정 기준을 제시하고자 한

다.

Fig. 1의 불연속부 좌우 ($x=\nu^-, \nu^+$)에서 굽힘강성 EI 가 불연속이므로

$$EI(\nu^-) \neq EI(\nu^+) \quad (10)$$

이다. 따라서 오일러 보 이론에 따르면, 보의 중립면의 횡변위 $w(x)$ 와 그것의 일차미분만이 불연속부의 좌우에서 연속이 된다. 그러므로, 결함부 부근에서 모드형상의 립쉬츠 지수는 1과 2사이의 값을 갖는다.

$$1 < \alpha < 2 \quad (11)$$

식 (12)에 근거하여 연속웨이블렛 변환을 통해 립쉬츠 지수를 예측하기 위해서는 웨이블렛 함수의 소멸 모멘트가

$$n \geq 2 \quad (12)$$

이어야 한다.

일반적으로 웨이블렛의 소멸 모멘트의 수와 지지구간 (support size) 간에 보상관계가 존재하고, 소멸 모멘트의 수가 늘어날수록 계수 최대선의 수가 증가하여 결함으로 인한 특이점 구분이 어려워진다. 본 논문에서는 최적의 국소화를 유지하기 위해서 $n=2$ 인 웨이블렛 함수를 적용하였다. 웨이블렛 함수의 선정에 있어 또 하나의 중요 고려사항은 웨이블렛 변환 $Wf(u, s)$ 의 계수 최대선의 연속성이다. 웨이블렛 $\psi(x)$ 가 다음과 같은 가우스 함수 $\theta(x)$ 의 n 차 도함수라고 할 때,

$$\psi(x) = (-1)^n \frac{d^n \theta(x)}{dx^n} \quad (13)$$

$Wf(u, s)$ 의 계수 최대선은 스케일 s 가 0으로 수렴할 때까지 연속성이 유지된다고 알려져 있다. (참고 [10]) 더욱이 이 웨이블렛은 n 개의 소멸 모멘트를 갖는다. 따라서 본 연구에서는 $n=2$ 인

$$\psi(x) = -\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} \quad (14)$$

이 웨이블렛 함수로서 이용되었다. 식 (14)에서의 웨이블렛 함수는 보통 Mexican hat 웨이블렛으로 알려져 있으며, 다음과 같이 수식적으로 표현된다.

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma} \pi^{-1/4} (x^2 - 1) \exp(-\frac{x^2}{2} \sigma^2) \quad (15)$$

4. 수치 및 실험적 고찰

4.1 수치 예제

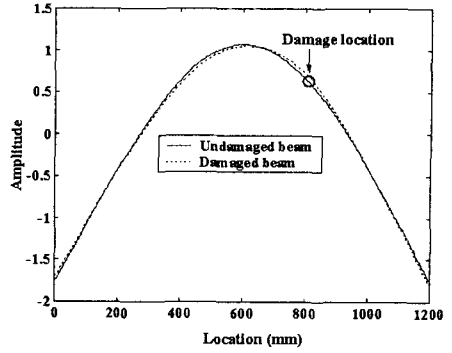
수치 예제를 통하여 본 논문에서 제시된 결합 진단 기법의 유용성을 살펴보았다. 본 장의 목적은 1) 립쉬츠 지수와 결합의 정도와의 관계 2) 지수에 대한 데이터 샘플링(sampling) 정도의 영향을 고찰하는 데 있다.

수치적 검증을 위해 Fig. 1과 같은 두께 변화를 포함하는 보 모델이 사용되었고, 수치적 모달 해석은 상용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS^[12]를 통하여 수행하였다. 보의 폭 및 두께 h 는 20mm이고, 결합부의 두께 c 는 2mm에서 14mm까지 변화한다. 또한 결합의 길이 w 는 0.5mm로서 국소적 미세 결합을 가정하였으며 양단 자유보의 경계조건을 사용하였다. 보 모델은 ANSYS를 이용하여 2400개의 보 요소(요소 크기=0.5mm)로 구성되었는데, 이 정도의 요소 수는 수렴 결과를 얻기에 충분하다고 가정하였다. 사용된 물성치는 영률 $E=70$ (GPa), 밀도 $\rho=2700$ (kg/m^3)이다.

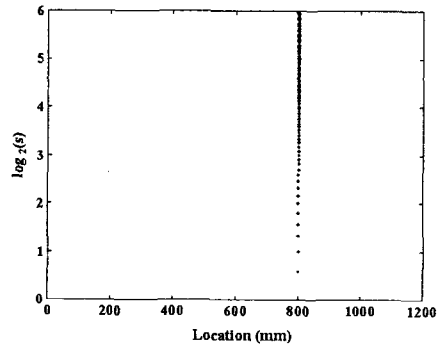
Fig. 3(a)는 $a=800\text{mm}$ 에서 $c=6\text{mm}$ 즉 $c/h=0.3$ 인 결합을 포함한 보와 무결합 보의 1차 굽힘 모드를 나타낸다. 그림에서 알 수 있는 것처럼 두 모드 형상 자체만으로는 결합의 유무를 확인하기 어렵다. 식 (15)으로 정의된 Mexican hat 웨이블릿 함수를 이용하여 모드 형상에 대해 연속 웨이블릿 변환을 수행하였다. Fig. 3(a)의 데이터에 웨이블릿 변환을 수행한 후 계수 최대선이 있는 위치 ($u \approx 800\text{mm}$)를 따라 Ridge 알고리즘을 적용하면 Fig. 3(b)를 얻는다. 결합부의 립쉬츠 지수를 추정하기 위해, Fig. 3(b)의 계수 최대선의 스케일에 대한 감소 거동을 Fig. 3(c)에서 도시하였다. 직선 회귀법을 이용하여 그 기울기 $\alpha+1/2$ 를 구하면 다음과 같이 립쉬츠 지수 α 가 추정된다.

$$\alpha = 1.31$$

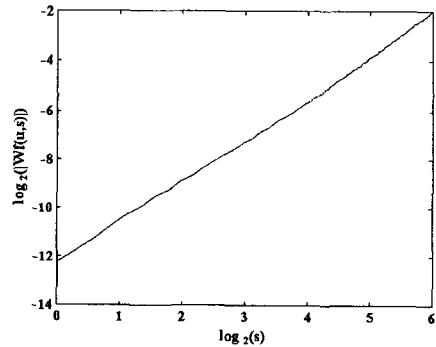
이는 예측한바와 같이 식 (12)에서 결정된 범위 내에 존재하며, 이로써 보 내의 특정 부위의 결합을 검출할 수 있다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3. Simulation for a damaged beam with $c/h=0.3$. The damage location is $a=800\text{mm}$. (a) The first bending mode shape denoted by $f(x)$ (b) the locus of the modulus maximum, (c) the decay behavior along the modulus maximum line.

립쉬츠 지수와 결함의 정도와의 관계를 조사하기 위해 결함의 상대적 크기 c/h 를 0.1에서 0.7까지 변화시키고 그에 해당하는 립쉬츠 지수를 앞선 방법을 이용하여 추정하였다. Fig. 4에서 그 결과를 나타내었다.

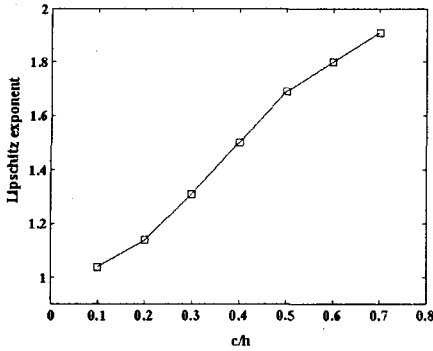


Fig. 4. The estimates of the Lipschitz exponent for different values of c/h

c/h 가 감소할수록, 즉 결함의 정도가 심해질수록 결함부의 특이성이 증가하므로, 그를 반영하는 립쉬츠 지수는 감소하는 것을 확인할 수 있으며, 이는 통상의 물리적 직관과 일치한다. 이는 립쉬츠 지수와 결함의 정도 사이의 관련성을 이용하면, 결함의 검출뿐만 아니라 그 정도까지 예측할 수 있음을 의미한다.

다음으로 동일한 결함의 크기에 대해서 립쉬츠 지수에 대한 결함의 위치의 영향을 고려해 보았는데, 그 영향을 거의 무시할 수 있는 것으로 나타났다. (자세한 결과는 지면상 생략)

일반적으로 모드 형상을 얻기 위한 모달 테스트는 변위나 가속도 등의 변수를 보의 일정 거리 간격으로 측정함으로써 이루어진다. 따라서 동일한 결함에 대하여 샘플링 거리가 립쉬츠 지수 추정에 미치는 영향을 고려할 필요가 있다. Fig. 5에서 그 결과를 나타내었다. w 는 결함의 길이이고, d 는 샘플링 거리를 의미하는데, Fig. 5에서 알 수 있듯이, w/d 의 값이 증가할수록 립쉬츠 지수 예측에 대한 민감도가 증가한다. 이는 샘플링의 정도가 부족할 때, 국소적 특이점에 대한 정보가 상당부분 소실됨을 의미한다. 그러므로 샘플링 해상도가 높지 않은 실제적 상황에서는

추정된 립쉬츠 지수에 대한 정확한 해석을 내리기 위해서 조심스런 판단이 요구된다. 그러나 Fig. 5에서 확인할 수 있듯이 결함의 검출 및 정도 파악에 있어 본 결함 진단 기법은 상당히 만족스러운 결과를 제공한다.

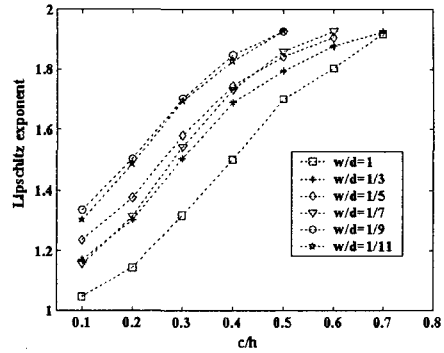
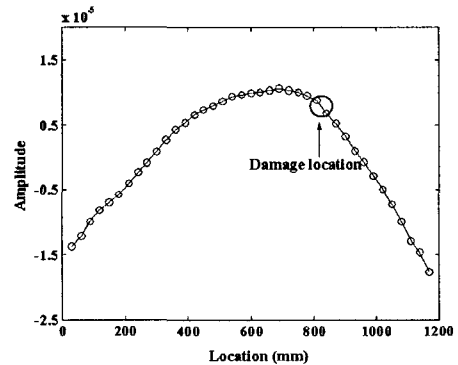


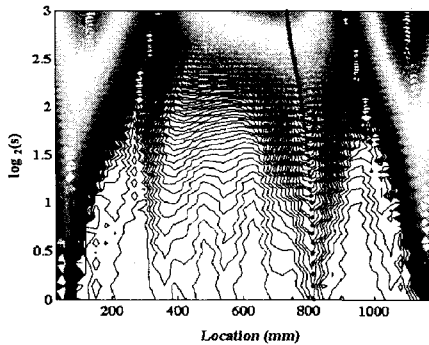
Fig. 5. The effects of sampling distances on the estimates of the Lipschitz exponent. (w =damage size, d =sampling distance)

4.2. 실험적 검증

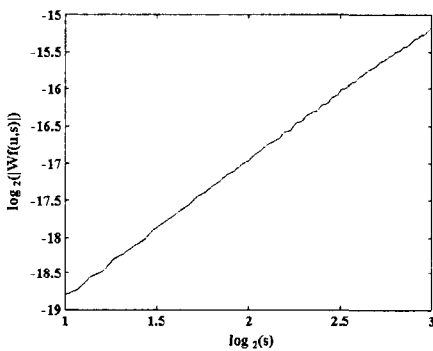
본 결함 진단 기법의 유용성을 실험적으로 검증하였다. 실험 모델은 Fig. 1의 보 모델과 규격과 물성치가 동일하나, $a=810\text{mm}$, $w=30\text{mm}$, $c=10\text{mm}$ ($c/h=0.5$)이며, 샘플링 간격 $d=30\text{mm}$ 로써 데이터는 보의 길이 방향으로 39개의 점에서 얻어졌으며, 양단 자유보를 가정하였다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6. The wavelet and Lipschitz singularity analysis performed on the experimental mode shape of a damaged beam. (a) The first mode shape $f(x)$ of a damaged beam, (b) the contour plot of $|Wf(u, s)|$ with a modulus maximum emanating from near $u=825\text{mm}$, (c) the decay behavior along the modulus maximum line

Fig. 6(a)는 모달 테스트를 통해 얻어진 1차 모드 형상을 의미한다. 수치 예제에서 소개된 방법대로 수행하면 Fig. 6(b)와 같은 $|Wf(u, s)|$ 를 얻을 수 있으며, 결함부 ($820 \leq u \leq 830\text{mm}$)에 수렴하는 계수 최대선을 추출할 수 있다. Fig. 6(c)의 계수 최대선에 따른 감소 거동에 대해 그 기울기를 직선 회귀법을 이용하여 구하면 다음과 같은 결함부의 립쉬츠 지수값을 얻을 수 있다.

$$\alpha_{\text{exp}} = 1.31$$

실험적으로 얻어진 립쉬츠 지수와 동일한 조건에 대해서 수치적으로 얻어진 립쉬츠 지수를 비

교해 보았다. 보의 길이 방향으로 2400개의 보요소 절점 중에서 30mm 간격으로 데이터를 샘플링하여 실험을 모사하였다. 이를 통해 얻어진 립쉬츠 지수값은 $\alpha_{\text{num}} = 1.51$ 이다. 이런 차이는 실제 모달 테스트에서 측정 오차로 인한 모드 형상의 왜곡때문에 발생하는 것으로 판단된다. 그러므로, 실제 실험에서 빈번하게 발생하는 이런 오차에 의한 왜곡이 립쉬츠 지수 평가에 미치는 영향은 중요하게 고려되어야 한다.

5. 결론

연속웨이블릿 변환에 의해 립쉬츠 지수를 평가함으로써 결함을 검출하고 그 정도를 파악하는 새로운 결함 진단 기법을 살펴보았다. 이러한 연구로부터 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) Mexican hat 웨이블릿 변환으로 립쉬츠 지수를 효과적으로 평가할 수 있었다.
- (2) 결함이 있는 보의 립쉬츠 지수는 1과 2 사이의 값을 갖으며, 결함의 정도는 그 값과 밀접히 연관된다.
- (3) 상대적으로 큰 샘플링 거리에 대해서도 본 결함 진단 기법은 적용될 수 있다.
- (4) 모드 형상의 왜곡은 특이성의 증가를 유발한다.

참고문헌

- [1] Pandey, A. K., Biswas, M., Samman, M. M., "Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes," *Journal of Sound and Vibration*, 145(2), pp. 321-332., 1991.
- [2] Maia, M. M. M., Silva, J. M. M., Sampaio, R. P. C., "Localization of Damage Using Curvature of the Frequency Response Functions," *Proc. of IMAC 15*, 2, pp. 942-946, 1997.
- [3] Ratcliffe, C. P., "Damage Detection Using a Modified Laplacian Operator on Mode Shape Data," *Journal of Sound and Vibration*, 204(3), pp. 503-517, 1997
- [4] Liew, K. M., Wang, Q., "Application of

- Wavelet Theory for Crack Identification in Structures," *J. of Engineering Mechanics*, 124(2), pp.152-157, 1998.
- [5] Deng, X., Wang, Q., "Crack Detection Using Spatial Measurements and Wavelet," *Int. J. of Fracture*, 91, L23-L28, 1998.
- [6] Wang, Q., Deng, X., "Damage Detection with Spatial Wavelets," *Int. J. of Solids and Structures*, 36, pp. 3443-3468, 1999.
- [7] Kim, Y. Y., Lee, H. C., Lee, Y. W., "Damage Detection in a Beam Via the Wavelet Transform of Mode Shapes," *The Korean Society of Mechanical Engineers*, 24(4), pp. 916-925, 2000.
- [8] Hong, J.-C. Kim, Y. Y., Lee, H. C., Lee, Y. W., "The Lipschitz Exponent in Damage Detection Based on The Fundamental Bending Mode Shapes in a Beam : Numerical and Experimental Investigations," submitted in *Int. Journal of Solids and Structures*, 2001.
- [9] Daubechies, I., 1992, *Ten Lectures on Wavelets*, Philadelphia: SIAM.
- [10] Mallat, S., 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, USA: Academic Press.
- [11] Jaffard, S., 1991, *Pointwise Smoothness, Two-Microlocalization and Wavelet Coefficients*, *Publications Matematiques*, 35, pp. 155-168.
- [12] ANSYS, 1993, *Analysis Dynamics Users Guide for Revision 5.0*, Swanson Analysis System, Inc.