한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회논문집, pp. 1078~1082.

구조물의 방사음장을 계산하는 효율적인 방법

최성훈*

An efficient method to predict the radiated pressure field from a vibrating structure

SUNGHOON CHOI

Abstract

An alternative formulation of the Helmholtz integral equation is derived to express the pressure field explicitly in terms of the velocity vector of a radiating surface. This formulation, derived for arbitrary sources, is similar in form to the Rayleigh's formula for planar sources. Because the pressure field is expressed explicitly as a surface integral of the particle velocity, which can be implemented numerically using standard Gaussian quadratures, there is no need to use Boundary element method to solve a set of simultaneous equations for the surface pressure at the discretized nodes. Furthermore the non-uniqueness problem inherent in methods based on Helmholtz integral equation is avoided. Validation of this formulation is demonstrated for some simple geometries.

Keywords: Helmholtz integral equation, BEM, Acoustic radiation

I. 서 론

헬름홀쯔 적분식(Helmholtz integral equation)은 파동방정식의 경계치 문제를 적분 방정식 형태로 나타낸 것으로 구조물에서의 음향 방사나 산란 문제를 다루는데 널리 쓰인다. 미분 방정식을 적분 방정식으로 변환함으로써 문제를 푸는 영역의 차수를 한 단계 줄일 수 있게 된다. 예를 들면 3차원 공간상에서 임의의 형상을 가지는 구조물에서의 방사 또는 산란 음장을 구조물의 표면에서의 압력과 법선 방향의 입자 속도 및 그린함수(Green's function) 등을 포함한 2차원 공간상의 적분 형태로 나타낼 수 있다. 파동방정식 또는 헬름홀쯔 적분식에서 해석해(analytic solution)를 구할 수 있는 경우는 몇 가지 특수한 형태의 구조물에 한정되며 대부분의 경우에는 수치해를 구해야 한다. 가장 일반적인 방법에 유한요소해석과 경계요소법(Boundary element method)이 있다. 본 논문에서는 헬름홀쯔 적분식에서 출발한 새로운 형태의 적분식을 소개한다. 이 방법은 Wu [1] 등에의해 제안되었는데 그들은 LDV를 이용하여 구조물의 속도 분포 측정한 다음 이 식을 방사음장을 예측하는데 이용하였다. 이 식은 경계요소법과는 달리 행렬식을 풀 필요가 없고 직접적인 적분만으로 해를 구할 수 있기 때문에 수치해석 시 효율적이며 경계요소법 등이 가지는 해가 유일하지 않은 주파수에서의 문제도 피할 수 있다는 장점이 있다. 본 논문에서는 간단한 음향 방사 문제에 대하여 이 방법의 타당성을 검증하고 일반적인 음향/진동 연성문제에 대한 식을 유도한다.

*한국과학기술원 기계공학과 (sch@kaist.ac.kr)

II. 기본적인 서식

3차원 무한공간에서 임의의 형상을 가지는 물체로부터의 방사음장은 다음과 같은 헬름홀쯔 적분식으로부터 구할 수 있다 [2]:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} p(\mathbf{x}_S) - G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_S)\frac{\partial p(\mathbf{x}_S)}{\partial n_S}\right] dS \tag{1}$$

이 식은 $e^{-i\omega t}$의 조화 운동을 가정한 것이며 G와 $\partial G/\partial n$은 자유음장에서의 그린함수와 이것의 법선방향의 미분으로 다음과 같이 주어진다.

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_S) = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} = (ikR-1)\frac{e^{ikR}}{R^2}\frac{\partial R}{\partial n_S} \tag{2}$$

여기에서 n_S는 물체의 표면 S에서의 법선 방향을 나타내며 $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|$ 이다. 두 점 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{x}_S$는 각각 음장내와 구조물 표면 위의 점을 나타낸다. 또한 $k = \omega/c$는 파수(wavenumber) 이고 c는 유체 내에서의 음속이다.

헬름홀쯔 적분식에서 우변에 있는 압력의 미분치는 오일러식(Euler equation)에 의해 구조물 표면에서의 법선방향 속도 $v_n(\mathbf{x}_S)$로 나타낼 수 있다. 식 (1)에서 알 수 있듯이 방사음장의 해를 얻기 위해서는 구조물 표면에서의 압력과 법선방향의 속도 성분을 모두 알아야 한다. 표면압력(surface pressure)을 구하기 위해서는 식 (1)에서 $\mathbf{x}$를 구조물의 점인 $\mathbf{x}_S'$에 접근시키면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$p(\mathbf{x}_S') =$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} p(\mathbf{x}_S) - i\omega\rho_0 v_n(\mathbf{x}_S) G(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S)\right] dS \tag{3}$$

구조물의 변위가 주어진 경우 식 (3)은 표면압력에 대한 적분방정식의 형태가 된다. 이 적분방정식은 미분방정식 형태의 음향 방사 문제와 마찬가지로 몇 가지 특수한 형태의 구조물(구, 무한길이의 평판 또는 원통형 셸 등)에 대해만 해석해를 구할 수 있고 일반적인 형태의 구조물에 대해서는 수치해석 방법을 적용해야 한다.

적분방정식의 해를 구하는 가장 보편적인 방법 중의 하나로 경계요소법이 있다. 경계요소법은 구조물의 표면을 적절한 크기의 요소로 세분화 한 후 식(3)의 적분을 각 요소에서 적분의 합으로 근사하는 방법이라고 할 수 있는데 요소의 절점에서의 음압과 법선방향의 속도에 대하여 다음과 같은 행렬식을 얻게 된다.

$$[D]_S\{p\}_S = [M]_S\{v\}_S \tag{4}$$

여기서 $\{p\}_S$와 $\{v\}_S$는 각각 표면압력과 접선방향의 속도벡터이며 $[M]_S$와 $[D]_S$는 각각 단극(monopole) 행렬과 쌍극(dipole) 행렬이다. 주어진 속도 분포에 대한 음장을 구하기 위해서는 식 (4)로부터 표면압력을 구하고 이 결과를 식(1)에 대입하여 임의의 위치에서의 음압을 구하게 된다. 경계요소법은 적분방정식에서 출발하기 때문에 미분방정식으로부터 얻어진 유한요소법(Finite element method)과 비교하면 몇 가지 장점과 단점이 있다. 장점으로는 모델링이 용이하고 변수의 수가 적다는 것이다. 이는 3차원 공간 전체를 모델링하는 대신 경계만을 모델링하기 때문이며 따라서 이 방법은 무한 공간에서의 음향 방사나 산란문제 등에 많이 쓰인다. 반면 경계요소법에서 사용되는 행렬(식 (4)의 $[M]_S$와 $[D]_S$)은 유한요소법의 행렬들과는 달리 꽉찬 형태가 되어 요소수가 많은 경우에는 행렬식의 해를 구하는데 아주 많은 시간이 필요하게 된다. 경계요소법의 또 다른 단점으로는 해가 유일하지 않는 주파수가 존재 한다는 것이다 [3]. 이 주파수는 같은 경계 조건을 가지는 내부문제의 고유치(eigenvalue)에 해당하는 것으로 헬름홀쯔 적분식 으로부터 전개된 해석 방법은 모두 이 문제점을 가진다. 이때는 행렬식에 0의 압력값을 가지는 공간 내부의 점들을 임의로 추가 하여 풀거나 [3] 헬름홀쯔 적분식과 함께 이 식의 미분형태를 함께 이용하여 문제를 해결한다 [4].

여기에서는 경계요소법과 마찬가지로 헬름홀쯔 적분식에서 출발하지만 식 (3)에서처럼 표면압력에 대한 식이 적분방정식이 되어 행렬식을 풀어야하는 형태가 아니라 표면에서의 법선 및 접선 방향의 속도 성분에 대한 적분만으로 압력을 구할 수 있는 새로운 식을 유도한다.

음장내의 압력과 입자속도는 다음과 같은 오일러 방정식(Euler equation)을 만족한다.

$$\nabla p(\mathbf{x}) = i\omega\rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

이 식의 양 변을 공간상의 두 점 $\mathbf{x}_A$와 $\mathbf{x}_B$를 잇는 임의의 궤적 ℓ을 따라 적분하면 다음과 같다.

$$\int_\ell \nabla p(\mathbf{x})\cdot \mathbf{e}\, dl = \int_\ell dp(\mathbf{x}) = i\omega\rho_0 \int_\ell \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{e}\, dl \tag{6}$$

식 (6)에서 $dp(\mathbf{x})$에 대한 적분은 궤적과는 무관하고 양 끝점에 의해서만 결정된다. 따라서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p(\mathbf{x}_B) = p(\mathbf{x}_A) + i\omega\rho_0 \int_\ell \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{e}\, dl \tag{7}$$

이 식은 임의의 위치에서의 음압을 다른 기준위치에서의 음압과 두 점을 잇는 선상에서의 입자속도에 대한 선적분의 합으로 나타낼수 있다는 의미이다. 이제 두 점과 궤적 ℓ이 모두 구조물의 표면에 있다고 가정하자. 표면에서의 속도 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$를 법선 방향과 접선 방향으로 나누어 각각 v_n과 v_η로 나타낸다. 그러면 적분 궤적 ℓ은 항상 법선 방향과 수직이므로 v_n에 대한 적분은 0이 된다. 표면 위의 두 점을 각각 $\mathbf{x}_S$와 $\mathbf{x}'_S$ 라고 하면 식 (7)은 다음과 같이 된다.

$$p(\mathbf{x}_S) = p(\mathbf{x}'_S) + i\omega\rho_0 \int_{\mathbf{x}'_S \to \mathbf{x}_S} v_\eta(\mathbf{x})\, d\eta \qquad (8)$$

여기에서 $d\eta$는 구조물 표면에서 접선 방향으로의 궤적의 증분을 나타낸다. 식 (8)을 식 (3)에 대입하면 다음과 같은 표면압력에 대한 식을 얻는다.

$$p(\mathbf{x}'_S) = \Gamma(\mathbf{x}'_S)\times$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}'_S|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} V(\mathbf{x}'_S|\mathbf{x}_S) - v_\nu(\mathbf{x}_S) G(\mathbf{x}'_S|\mathbf{x}_S)\right] dS. \qquad (9)$$

이 식에서 $\Gamma(\mathbf{x}'_S)$와 $V(\mathbf{x}'_S|\mathbf{x}_S)$는 다음과 같다.

$$\Gamma(\mathbf{x}'_S) = i\omega\rho_0 \left[2\pi - \iint_S \frac{\partial G(\mathbf{x}'_S|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} dS\right]^{-1} \qquad (10)$$

$$V(\mathbf{x}'_S|\mathbf{x}_S) = \int_{\mathbf{x}'_S \to \mathbf{x}_S} v_\eta(\mathbf{x}_S)\, d\eta \qquad (11)$$

헬름홀쯔 적분식과 비교하여 식 (9)를 살펴보면 우변에 표면압력 항이 없기 때문에 적분만을으로도 표면압력을 구할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 진동하는 구조물의 속도 분포를 알고 있으면 식 (9)를 이용하여 임의의 기준점에서의 표면 압력을 구한 후 다시 식 (8)을 이용하여 다른 위치에서의 표면 압력을 구할 수 있는 것이다. 공간상의 음장을 구하기 위해서는 식 (1)에 표면압력과 속도분포를 대입하면 된다.

III. 축 대칭 문제의 예

이 절에서는 앞에서 유도한 식을 구(sphere) 또는 실린더(cylinder) 등의 축 대칭(axially symmetric)인 구조물에 대해서 적용한다. 그림 1과 같이 축 대칭 구조물의 표면을 따라 새로운 좌표 s를 정의 하면 식 (2)에서 R과 $\partial R/\partial n_S$는 다음과 같다.

$$R = \sqrt{r(s)^2 + r(s')^2 - 2r(s)r(s')\cos\varphi + (z(s) - z(s'))^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_S} = R^{-1}\times$$

$$\left\{[r(s) - r(s')\cos\varphi]\frac{dz(s)}{ds} - [z(s) - z(s')]\frac{dr(s)}{ds}\right\}$$

여기서 φ는 s와 s'으로 나타낸 두 점의 회전축 방향으로의 각도 차이를 나타낸다. 속도와 압력이 축 대칭인 경우 식 (9)는 다음과 같은 식이 된다.

$$p(s') = \Gamma(s')\times$$

$$\int_{s_0}^{s_1} r(s)\,[V(s,s')H_1(s,s') - v_n(s)H_2(s,s')]\, dS \qquad (12)$$

이 식에서

$$\Gamma(s) = i\omega\rho_0 \left[2\pi - \int_{s_0}^{s_1} r(s)H_1(s,s')ds\right]^{-1} \qquad (13)$$

$$V(s,s') = \int_{s'}^{s} v_\eta(\xi)d\xi \qquad (14)$$

그리고,

$$H_1(s,s') = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} d\varphi \qquad (15)$$

$$H_2(s,s') = \int_0^{2\pi} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_S) d\varphi \qquad (16)$$

이다.

수식의 적용을 위해 $v_c e^{-i\omega t}$의 속도로 왕복 운동을 하는 구 표면에서의 압력을 비교하였다. 운동방향으로부터 θ 방향에서의 음압은 다음과 같이 주어진다 [5].

$$p(\theta) = -\frac{i\rho_0 c v_c ka(1-ka)\cos\theta}{(2-(ka)^2 - 2ika)} \qquad (17)$$

식 (12)를 계산하기 위해 반구의 표면을 9개의 요소로 나누고 각각의 요소에서의 적분은 3차의 Gaussian quadrature를 이용하였다. 그림 2에 $\theta = \pi/6$ 에서의 압력을 비교하였다. 이 그림에서 실선은 식 (17)로 구한 정해를 나타내고 점들은 수치해를 나타낸다. 수치해의 결과가 $ka \le 9$ 범위에서는 정확하다는 것을 알 수 있다. 그 이상의 범위에서는 요소 크기의 문제로 오차가 발생하기 시작하는데 이 때 주파수와 적분하는 점들의

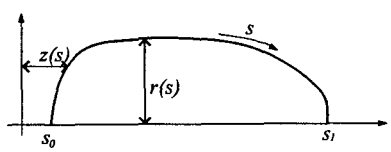

FIG. 1: An axisymmetric body and its coordinate system.

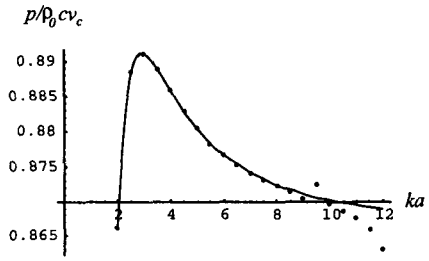

FIG. 2: Surface pressure of a oscillating sphere at $\theta = \pi/6$: solid line - exact solution, points - numerical solution.

거리를 비교하면 한 파장당 6개 정도 이상의 점을 이용하여 계산해야 한다는 것을 알 수 있다.

IV. 구조/음향 연성문제

III절 에서는 구조물 표면에서의 속도가 주어져있는 경우에 대한 식을 전개하였다. 여기서는 보다 일반적인 구조/음향 연성 문제, 즉 구조물의 운동과 음장을 모두 구하고자 하는 경우에 대해서 다룬다. 이 경우에는 앞서 구했던 것처럼 표면압력과 속도와의 관계와 함께 구조물의 운동방정식을 같이 고려하여 해를 구해야 한다.

먼저 구조물의 속도를 표면에 대하여 직교성(orthonormality)을 가지는 함수로 나타낸다. 예를들면 유체가 없는 상태에서의 구조물의 모드를 이용할 수 있는데 이를 $\psi_k(\mathbf{x})$라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_S) = \sum_k A_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}_S) \tag{18}$$

법선 및 접선 방향으로의 속도 성분은 각각의 방향으로의 단위벡터인 $\mathbf{e}_n$과 $\mathbf{e}_t$와의 내적을 취하여 얻는다. 즉,

$$v_\nu(\mathbf{x}_S) = \sum_k A_k(\mathbf{e}_n \cdot \psi_k(\mathbf{x}_S)) = \sum_k A_k \psi_k^\nu(\mathbf{x}_S)$$
$$v_\eta(\mathbf{x}_S) = \sum_k A_k(\mathbf{e}_t \cdot \psi_k(\mathbf{x}_S)) = \sum_k A_k \psi_k^\eta(\mathbf{x}_S)$$

이 식을 식 (9)에 대입하고 적분과 합의 순서를 바꾸면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$p(\mathbf{x}_S') = \Gamma(\mathbf{x}_S') \sum_k A_k \times$$
$$\iint_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} V_k(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S) - \psi_k^\nu(\mathbf{x}_S) G(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S) \right] dS \tag{19}$$

여기에서

$$V_k(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S) = \int_{\mathbf{x}_S' \to \mathbf{x}_S} \psi_k^\eta(\mathbf{x}_S)\, d\eta. \tag{20}$$

이다. 표면압력 또한 속도와 마찬가지로 직교성을 가지는 함수 $\phi_m(\mathbf{x})$를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(\mathbf{x}_S') = \sum_m B_m \phi_m(\mathbf{x}_S') \tag{21}$$

이 식을 식 (19)에 대입하고 양변에 $\phi_m'(\mathbf{x})$를 곱하여 적분하면 함수 ϕ_m의 직교성에 의하여 속도와 표면압력의 계수인 $\{A_k\}$와 $\{B_m\}$에 대한 관계식을 다음과 같이 얻는다.

$$\{B_m\} = [Q_{mk}]\{A_k\} \tag{22}$$

여기서 행렬의 요소 Q_{mk}는 다음과 같다.

$$Q_{mk} = \iint_{S'} \Gamma(\mathbf{x}_S') \left\{ \iint_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S)}{\partial n_S} V_k(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S) - \psi_k^\nu(\mathbf{x}_S) G(\mathbf{x}_S'|\mathbf{x}_S) \right] dS \right\} \phi_m(\mathbf{x}_S') dS' \tag{23}$$

식 (22)는 각각의 구조모드와 음압모드 사이의 상관성을 나타내는 식이고 이 식과 구조물의 운동을 기술하는 식을 함께 고려하여 연성문제의 해를 구한다.

V. 결 론

음향 방사 문제와 음향/진동 문제에 적용할 수 있는 구조물 표면에서의 속도 분포와 압력에 대한 식을 유

도하고 간단한 예에 대하여 적용하였다. 기존의 헬름홀쯔 적분식과는 달리 구조물의 속도분포만으로 음장을 계산할 수 있기 때문에 경계요소법과 같은 수치 해석을 할 때 행렬식을 풀지 않아도 되는 장점이 있다. 이 방법은 요소수가 많은 경우 계산시간을 크게 줄일 수 있으며 경계요소법이 가지는 특정 주파수 에서의 해의 유일성 문제도 없다. 본 논문를 통하여 간단한 방사음장 문제에 대하여 이 방법을 적용 하였고 일반적인 음향/진동 연성문제에 대한 식을 유도하였다. 연성문제에서는 구조물의 진동 모드를 이용할 수 있기 때문에 유체가진(fluid loading)의 영향에 대하여 보다 물리적인 의미를 가지는 분석을 할 수 있을 것이다.

후기

본 논문의 저자는 교육부의 두뇌한국 21(BK 21)에 의하여 지원 받고 있습니다.

REFERENCES

[1] S. F. Wu and Q. Hu, "An alternative formulation for predicting sound radiation from a vibrating object," J. Acoust. Soc. Am. **103**(4), 1763-1774 (1998).

[2] M. C. Junger and D. Feit, *Sound, structures, and their interactions*, MIT Press, 1986.

[3] H. A. Schenck, "Improved Integral formulation for acoustic radiation problems," J. Acoust. Soc. Am., **44**(1), 41-58 (1968).

[4] A. J. Burton and G. F. Muller, "The applicaton of the integral equation method to the numerical solution of some exterior boundary value problems," Proc. R. Soc. London, Ser. A **323**, 202-210 (1970).

[5] E. G. Williams, *Fourier acoustics*, Academic Press, 1999.