

단부회전이 회전 스프링으로 제약받는 기둥의 자유진동

허영* · 진태기** · 김선기***

Free Vibrations of Column with Hinged End Restricted by Rotational Spring

Young Huh · Tae Ki Jin · Sun Gi Kim

ABSTRACT

This study explores the free vibrations of tapered column with hinged end restricted by rotational spring. The ordinary differential equation governing the free vibration of such column is derived as nondimensional form in which three kinds of cross-sectional shape are considered. In order to obtain the natural frequencies of column, the governing differential equation is solved by numerical procedures. Numerical results are compared with existing solutions by other methods. It is expected that the results obtained herein can be practically utilized in the structural and the vibration control fields.

1. 서론

오늘날의 구조물의 형태는 더욱 복잡, 거대해지고 있어 이에 대한 거동해석을 위해 많은 근사해법들이 제시되고 있다. 그러나 이러한 복잡한 구조물들은 보, 기둥, 평판 등과 같은 기본단위 구조의 결합구조로 이루어지므로 구조물을 설계함에 있어 이들 기본단위구조의 정적, 동적거동을 나타내는 결과들을 이용함으로써 구조물의 거동결과를 예측하는 등의 사전정보를 얻을 수 있다. 따라서 기본단위구조의 거동을 정확하게 표현할 수 있는 값을 결정하는 것은 대단히 중요한 연구과제이다.⁽¹⁾

기둥의 접합부는 일반적으로 강절 접합인 것으로 가정한다. 또한 기둥 해석시 단부조건은 고정단 또는 회전단으로 가정하여 해석한다. 그러나 실제적으로는 단부에서 단면회전 및 변위가 발생하게 된다. 따라서 단부에서의 정확한 거동특성을 파악하여야 하는데 이를 위해선 지점의 회전 및 변위를 허용하는 단부조건을 적용하여야 한다.

이상과 같은 연구배경으로 본 연구에서는 기둥요소 설계시나 동적안정성 검토시 기초자료로 이용될 수 있도록 단부 회전이 회전스프링으로 제약되는 기둥의 수학적 모형을 구축하고 자유진동 특성을 규명하여 이에 대한 기초적 이론확장을 도모하는데 이 연구의 목적이 있다. 본 연구와 타문헌과의 결과와 해석한 결과를 비교하여 본 연구방법의 타당성을 검증하고, 실제적인 공학분야에서 필요한 다양한 조건 및 경계조건에 따른 진동특성을 고찰한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 대상 기둥의 기하학적 형상 및 제변수를 나타낸 것이다. d_a, A_a, I_a 는 좌측 단부에서의 단면폭, 단면적 및 단면 2차모멘트이고 d_b, A_b, I_b 는 우측 단부에서의 단면폭, 단면적 및 단면 2차모멘트를 나타내고 있다. K_a, K_b 는 단부에서의 회전 스프링 상수이다. 기둥의 임의지점 x 에서의 단면폭 d , 단면적 A 및 단면 2차 모멘트 I 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

* 수원대학교 토목공학과 교수

** (주)제일건설

*** (유)신흥건설

$$\begin{aligned}
 d &= d_a F(x) & (1) \\
 A &= A_a G(x) & (2) \\
 I &= I_a H(x) & (3) \\
 F(x) &= [1 + (\beta - 1) l/x] & (4) \\
 G(x) &= [1 + (\beta - 1) l/x]^m & (5) \\
 H(x) &= [1 + (\beta - 1) l/x]^n & (6)
 \end{aligned}$$

위의 식에서 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ 는 단면의 변화를 표현하기 위하여 사용하는 x 만의 함수이며 β 는 단면비로서 기둥의 좌측단면쪽에 대한 우측단면쪽의 비 (d_b/d_a)이다. 또한 m 과 n 은 단면형상에 따라 결정되는 단면형상계수이다.

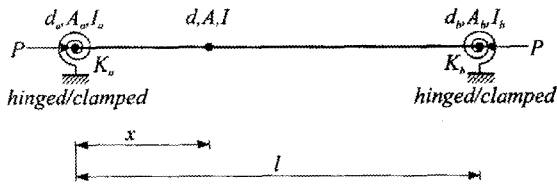


Fig 1. Tapered column with rotational spring

3. 지배미분방정식

본 연구에서 기둥은 조화진동을 한다고 가정하며 이 경우에 횡방향 변위의 조화진동식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁾

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (7)$$

윗 식에서 w 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며 ω 는 rad/sec로 표시되는 고유각 진동수, t 는 시간을 나타낸다.

기둥이 면내 진동하게 되면 기둥의 미소요소에는 변위에 의한 전단력, 휨모멘트 등의 합응력과 관성에 의한 단위길이당 관성력이 발생하게 된다. 본 연구에서 축하중 P 는 압축을(-)로 한다.

Fig. 2와 같이 기둥의 미소요소 dx 에 대한 힘들의 평형방정식을 세우면 다음과 같이 나타낼 수 있으며 식 (8), 식 (9)는 축하중을 받는 기둥이 면내 자유진동할 때 기둥의 미소요소에 작용하는 힘들의 동적평형방정식이다.

$$\frac{dV}{dx} - f_i = 0 \quad (8)$$

$$V + P \frac{dw}{dx} - \frac{dM}{dx} = 0 \quad (9)$$

$$M = EIw'' \quad (10)$$

$$f_i = -\rho A_a G \omega^2 w \quad (11)$$

윗 식에서 V 는 미소요소의 변위에 의한 전단력, M 은 임의의 변단면에 대한 휨모멘트이고 f_i 는 질량을 갖고 있는 기둥의 미소요소에서 직선운동 $w(x, t)$ 에 대한 단위길이당 관성력을 나타낸다.

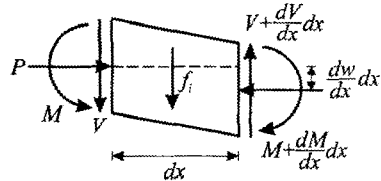


Fig 2. Loads on an column element

식 (10)으로부터 dM/dx 를 구하여 식 (9)에 대입하고 전단력 V 에 대하여 정리한 다음 dV/dx 를 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dx} &= EI_a H \frac{d^4 w}{dx^4} + 2EI_a H' \frac{d^3 w}{dx^3} \\
 &+ EI_a H'' \frac{d^2 w}{dx^2} - P \frac{d^2 w}{dx^2}
 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (10), (11)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 w}{dx^4} &= -2H'H^{-1} \frac{d^3 w}{dx^3} - [H''H^{-1} \\
 &- \frac{P}{EI_a}] \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\rho A_a}{EI_a} GH^{-1} \omega^2 w
 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)은 임의의 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이며 변단면 기둥의 변화계원을 나타내는 G , H , H' , H'' 이 주어지면 어떠한 변단면 기둥도 해석할 수 있다.

지배미분방정식을 무차원 미분방정식으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l \quad (14)$$

$$\eta = w_x/l \quad (15)$$

$$k_a = \frac{K_a l}{EI_a} \quad (16)$$

$$k_b = \frac{K_b l}{EI_a} \quad (17)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI_a} \quad (19)$$

여기서 ξ , η 는 각각 무차원 축방향 좌표, 무차원 변위, c_i 는 무차원 고유진동수 그리고 k_a , k_b 는 무차원 회전 스프링상수를 나타낸다.

식 (18)에서 c_i 는 무차원 고유진동수를 나타내며 식(19)에서 p 는 무차원 축하중으로 (+)이면 인장력, (-)이면 압축력을 나타낸다.

식 (14)~(19)에 나타난 무차원 변수를 식 (13)에 대입하여 정리하면 식 (20)과 같은 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 지배미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \eta'''' &= -2n(\beta-1)[1+(\beta-1)\xi]^{-1}\eta'' \\ &\quad - \{n(n-1)(\beta-1)^2[1+(\beta-1)\xi]^{-2} \\ &\quad - p[1+(\beta-1)\xi]^{-n}\}\eta'' \\ &\quad + c_i^2[1+(\beta-1)\xi]^{m-n}\eta \end{aligned} \quad (20)$$

본 연구에서는 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 모멘트가 "0" 이고 고정단에서는 수직방향변위, 단면회전각이 "0"이므로 각각의 단부조건에 대한 좌단($\xi=0$), 우단($\xi=1$)의 경계조건을 무차원 변수를 이용하여 각각 정리하면 다음과 같다.

• 회전단

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{에서} \quad (21)$$

$$\eta'' - k_a \eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{에서} \quad (22)$$

$$\eta = 0, \quad \xi = 1 \text{에서} \quad (23)$$

$$\eta'' + \beta^{-n} k_b \eta' = 0, \quad \xi = 1 \text{에서} \quad (24)$$

• 고정단

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{에서} \quad (25)$$

$$\eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{에서} \quad (26)$$

4. 수치해석 결과 및 토의

유도한 미분방정식의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 타 문헌의 무차원 고유진동수를 Table 1에 비교하였다. Table 1은 단면이 등단면일 때 회전 스프링상수의 값을 변화시키면서 문헌[4]와 본 연구의 결과를 비교한 표이다. 표에서 볼수 있듯이 본 연구결과와 문헌의 결과는 그 오차가 0.02% 이내로 매우 우수하게 일치하고 있어 본 연구에서 유도한 지배미분방정식과 수치해석 알고리즘의 타당성을 입증할 수 있었다.

Table 1. Comparison of c_i * between this study and reference

k_b	Reference	Frequency parameter, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0	This study	15.42	49.96	104.25	178.27
	Reference[4]	15.42	49.97	104.26	178.30
	Error(%)**	0.00	0.02	0.01	0.02
10	This study	19.63	55.50	110.71	185.35
	Reference[4]	19.63	55.50	110.71	185.36
	Error(%)**	0.00	0.00	0.00	0.01
100	This study	21.95	60.55	118.76	196.42
	Reference[4]	21.95	60.55	118.76	196.42
	Error(%)**	0.00	0.00	0.00	0.00

* 등단면, $k_a = 10^{10}$

** Error(%) = | 1 - Reference / This study | × 100

Table 2는 단면비 β 는 0.5, 양단의 회전 스프링상수 k_a , k_b 의 크기는 1, 그리고 압축하중 p 는 0 일 때 각각의 단부조건과 단면형상에 따라 무차원 고유진동수 c_i 값을 비교한 것이다. 이 표에서 나타난 바와 같이 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전지점 순으로 무차원 고유진동수 값이 작아지며 폭 변화 단면이 깊어 변화단면, 정방형 변화단면에 비해 무차원 고유진동수 값이 큼을 알 수 있다.

Table 2. Effect of variable cross-section on c_i *

End constraint	type of taper	Frequency parameter, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Hinged - Hinged	width	11.41	41.33	90.84	160.02
	depth	8.92	31.38	67.87	118.56
	square	8.96	32.05	69.08	120.21
Hinged - Clamped	width	15.23	49.60	103.83	177.82
	depth	10.63	35.66	75.14	129.04
	square	10.08	35.09	74.54	128.42
Clamped - Clamped	width	16.87	51.48	105.87	179.95
	depth	13.46	39.23	79.25	133.49
	square	14.12	40.46	81.00	135.65

* $\beta = 0.5$, $k_a = k_b = 1$, $p = 0$

Fig. 3은 축압축력이 작용하는 변단면 기둥에서 단면비가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 회전 스프링상수 k_a , k_b 의 크기는 1, 압축하중 p 는 0, 그리고 정방형 변화단면 일 때 단면비를 0.01~1까지 변화시키면서 수치해석한 결과를 나타낸 그림이다.

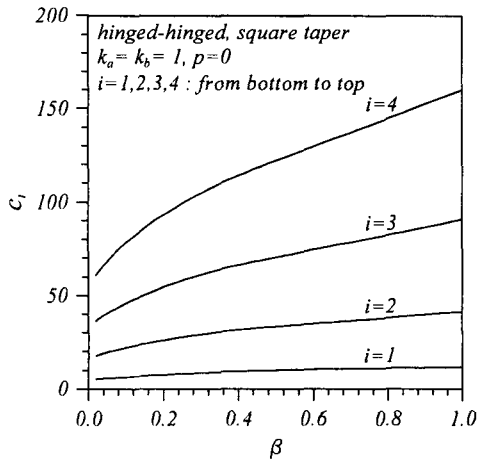


Fig. 3. c_i versus β curves

이 그림에서 단면비는 무차원 고유진동수를 증가시키는 요인임을 알 수 있고 저차모드에서 고차모드로 갈수록 단면비에 따른 무차원 고유진동수가 크게 증가함을 알 수 있다.

Fig. 4는 회전 스프링상수가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 k_b 는 1, 단면비 β 는 1.0, 압축하중 p 는 0, 그리고 정방형 변화단면에 대하여 수치해석한 결과를 나타낸 그림이다.

이 그림에서 회전 스프링상수 k_a 가 증가할수록 무차원 고유진동수가 커짐을 알 수 있다. 또한 회전 스프링상수가 작은 값에서 무차원 고유진동수는 일정값에 수렴하므로 고유진동수를 증가시키기 위하여 회전 스프링상수값을 크게 증가시키는 것은 무의미함을 알 수 있다.

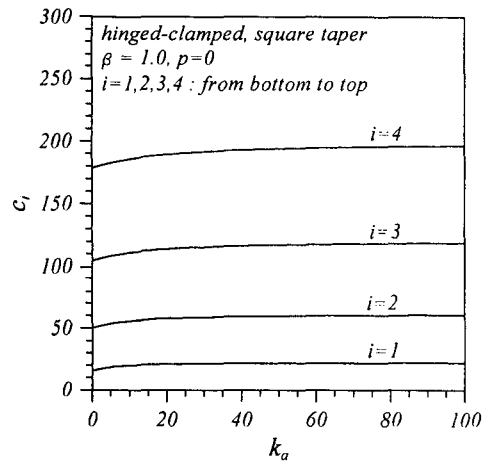


Fig. 4. c_i versus k_a curves

Fig. 5는 양단의 회전 스프링상수가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 단부조건이 회전-회전, 단면비 β 는 1.0, 그리고 압축하중 p 는 0일 때 정방형 변화단면에 대하여 제 1 고유진동수를 나타낸 그림이다.

이 그림에서 나타난 바와 같이 양단의 회전 스프링상수 k_a , k_b 가 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있으나 회전 스프링상수의 크기가 비교적 적은 값에서 수렴함을 알 수 있다. 따라서 무차원 고유진동수를 증가시키기 위하여 회전 스프링상수값을 크게 증가시키는 것은 무의미함을 알 수 있다.

Fig. 6은 축압축력이 변단면기둥의 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 단면비 β 는 1.0이고 정방형 변화단면을 갖는 기둥에 대하

여 해석한 결과를 나타낸 그림이다.

그림에서 축압축력은 무차원 고유진동수를 감소시키는 요인으로 작용함을 알 수 있으며 제 1고유진동수 곡선이 횡축, 즉 하중축과 만나는 점이 이 기둥의 최소임계하중이 된다. 그러므로 임계하중 이후의 하중에 대해서는 기둥이 직선형상을 잃고 좌굴된 곡선형상을 이루며 후좌굴 거동을 하게 된다.

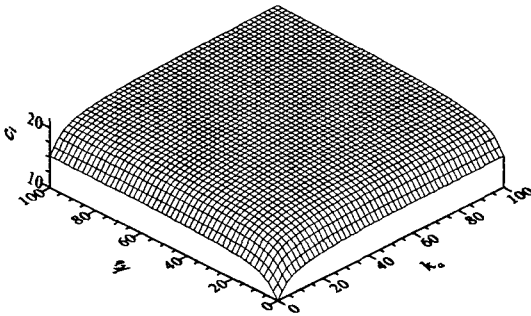


Fig 5. c_1 versus k_a, k_b curves

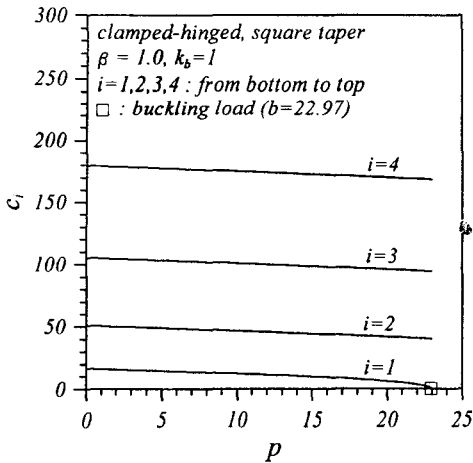


Fig 6. c_i versus p curves

5. 결론

이 논문은 단부회전이 회전스프링으로 제약받는 기둥의 자유진동 해석에 관한 연구이다. 이를 위하여 단부회전이 회전스프링으로 제약받는 기둥을 모형화하여 좌굴된 기둥의 정적 거동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에

는 단면비와 각 지점에서의 회전 스프링상수를 고려하였다. 이 상미분방정식들을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta method를 이용하고, 무차원 고유진동수를 산출하기 위하여 Regula-Falsi method를 이용하였다. 이 연구의 수치해석 결과와 타 문헌과의 결과가 아주 우수하게 일치하여 본 연구방법의 타당성을 검증할 수 있었으며 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고 기둥의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계를 그림으로 나타내었다.

이 연구에서 개발한 수치해석 방법은 스프링으로 지지된 기둥요소 문제에 폭 넓게 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

1. R.R. Craig, Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods, John Wiley, 1981, pp.381-445.
2. B.K Lee and J.F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, 1989, pp.75-89
3. H.K. Kim and M.S. Kim, "Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions Using Fourier Series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, 2001, pp.771-784
4. W.L. Li, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, 2000, pp.709-725
5. N.M. Auciello, "On The Transverse Vibrations of Non-Uniform Beams with Axial Loads and Elastically Restrained Ends," International Journal of Mechanical Science, Vol. 43, 2001, pp.193-208
6. 이병구, 오상진, 모정만, "단순지지 변단면 기둥의 임계하중 및 후좌굴 거동," 대한토목학회 논문집, 제 11 권 4호, 1991, pp.17-26
7. A.W. Al-Khafaji and J.R. Tooley, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1986
8. J.M. Gere and S.P. Timoshenko, Mechanics of Materials, Fourth Edition Book/PWS Publishing Company., 1997.